

Niet zelden worden doorbraken in een vakgebied teweeg gebracht door wetenschappers die oorspronkelijk niet uit dit gebied afkomstig zijn, of minstens ook een andere achtergrond hebben. Kennelijk schept een brede blik of kennis uit een ander vakgebied voorwaarden voor grensverleggende (combinaties van) inzichten. In dit artikel filosoferen **Nico Krijn** en **Manuel Nepveu** over dit verschijnsel en geven ze enkele voorbeelden.

## Innovatie op raakvlakken - de algebra van George Boole

### Inleiding

Claude Elwood Shannon (1916-2001) was een verbaazingwekkend veelzijdige onderzoeker. Hij is vooral bekend als de vader van de informatietheorie. Een en ander op grond van zijn beroemde artikel *A mathematical theory of communication* (1948). Maar hij bemoeide zich ook met cryptografie en hij hield zich bezig met computerschaak. Zijn artikelen op deze gebieden deden er toe. Minder bekend is wellicht dat hij in 1937 een doctoraalscriptie schreef die door Howard Gardner, een hoogleraar aan Harvard, werd bestempeld als waarschijnlijk de belangrijkste van de twintigste eeuw. In de scriptie *A symbolic analysis of relay and switching circuits* (1937) legde Shannon een verband tussen elektronische schakelingen enerzijds en de algebra van George Boole anderzijds.

*Manuel:* Nico, wist jij al eigenlijk al vroeg van dit artikel?

*Nico:* Nee, ik wist niets daarvan. Op de middelbare technische school werd les gegeven in techniek zonder enige historische of culturele achtergrond. De heersende moraal was: geen vragen stellen en leren wat je wordt voorgeschoteld. De leraar digitale techniek was uit ander hout gesneden en wilde ons begrip bijbrengen. Hij schreef een lange zin op het bord waarin de logische voegwoorden ‘en’, ‘of’ en ‘niet’ veelvuldig voorkwamen. We moesten proberen die lange zin te vereenvoudigen. Dat lukte alleen als je snapte wat er stond. Bij elke vereenvoudiging die je toepaste moest je nagaan of er nog steeds hetzelfde stond. Toen iedereen ervan doordrongen was dat dit geen eenvoudige kost is, leerde hij ons hoe je – met behulp van Boole-algebra – een moeilijke zin als formule kon noteren en hoe je met een paar eenvoudige rekenregels zo’n formule kon vereenvoudigen. Als laatste stap zette je de vereenvoudigde formule weer om in normaal Nederlands. Kinderspel. Ik weet zeker dat ik het belang van de Boole-algebra destijds niet

besepte. De kracht van dit ‘werktuig’ is intussen immens. Je kunt een formule vereenvoudigen zonder stil te staan bij de betekenis daarvan. Stoeien met formules is op het niveau van syntax; pas als wiskunde wordt *toegepast* komt betekenis – semantiek – om de hoek kijken.

*Manuel:* In het genoemde artikel zie je dat gebeuren. Voor mij was het een echte verrassing. Op een of andere manier is de connectie tussen elektrische circuitjes en de algebra van de Engelsman Boole zo voor de hand liggend, dat ik verbaasd was dat het kennelijk zo lang heeft geduurd voordat die werd ontdekt. Maar goed, veel dingen lijken heel ‘logisch’ als ze eenmaal ontdekt zijn.

Als je de biografie van Shannon leest, bijvoorbeeld op Wikipedia, dan blijkt dat hij zich in 1932 inschreef aan de universiteit van Michigan voor twee studies: elektronica en wiskunde. Bij de wiskundestudie maakte hij kennis met de Boole-algebra, maar hij ging na zijn bachelor(s) werken aan circuitproblemen. Omdat hij, blijkens Wikipedia, met kennelijk niet al te overzichtelijke circuits te maken kreeg, kan juist dit hem tot de vraag hebben geleid of het allemaal niet wat eenvoudiger kon. Door zijn dubbelstudie was hij bij uitstek de persoon bij wie vervolgens het kwartje kon vallen.

De Boole-algebra heeft duidelijke axioma’s en regels. Er vindt een vertaling plaats van ‘en’, ‘of’, ‘niet’ naar simpele algebraïsche bewerkingen. Elke zogenaamde uitspraakvariabele heeft maar twee mogelijke waarden (0 en 1, onwaar en waar) en ook een functie van uitspraakvariabelen kan alleen maar deze twee waarden aannemen. Bij elektronische circuits geldt iets dergelijks: een relais ( ~ uitspraakvariabele) staat in de uit- of aan-stand en in het circuit ( ~ de Booleaanse functie) loopt een stroompje of niet. De manipulatie van de Booleaanse formules heeft een perfecte elektro-technische tegenhanger in de manipulatie met relais.

Met name het vereenvoudigen van elektrische circuits kon zo gebeuren op een manier die niet langer afhankelijk was van eindeloos experimenteren in het lab. Het raakvlak van elektronica en symbolische logica heeft zo wat moois opgeleverd. Wat bij de Grieken begon op het vlak van de logica heeft uiteindelijk een zeer praktische consequentie gekregen.

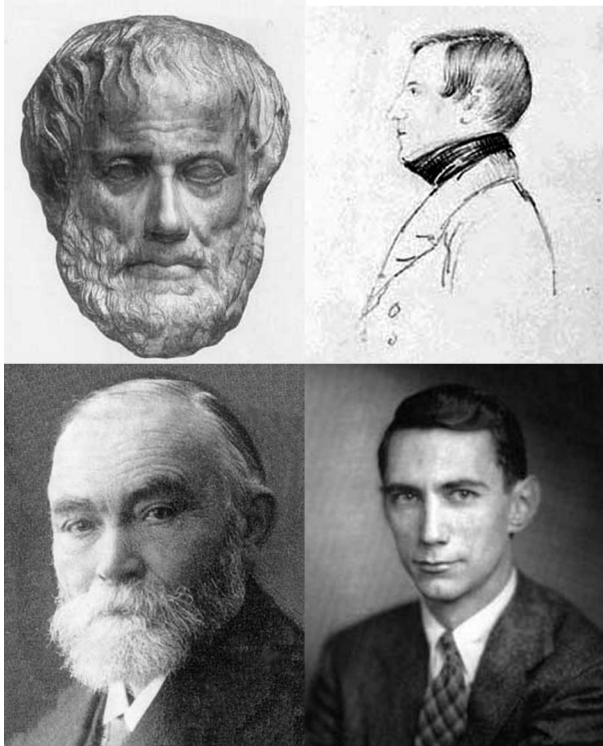


fig. 1 Van linksboven naar rechtsonder: Aristoteles (384 v. Chr.-322 v.Chr.), George Boole (1815-1864), Gottlob Frege (1848-1925) en Claude Shannon (1916-2001).

Nico: Ja, de Aristotelische logica. Daar begon het mee, maar het was niet het einde. Ze kwam na een winterslaap van zo'n 2200 jaar tot leven, wakker geschud door achtereenvolgens George Boole, Gottlob Frege en Claude Shannon. De ontwikkeling loopt van verdieping en uitbreiding naar toepassing. Eerst gaf Boole in 1854 een verdieping van de syllogismen (zie kader 1). Met behulp van algebra ontleedde hij de logica tot elementaire elementen. Vervolgens presenteerde Frege met zijn predicatenlogica van 1879 een uitbreiding op de Aristotelische logica en in 1937 gaf Shannon in zijn doctoraalscriptie een toepassing van de Boole-algebra met verstrekkende gevolgen.

George Boole was van eenvoudige komaf. Zijn vader verdiende de kost als schoenmaker, maar had veel interesse in wetenschap, wiskunde en literatuur en fabriceerde in zijn vrije tijd telescopen, microscopen en camera's. De jonge Boole kreeg wetenschap met de paplepel ingegoten. Nagenoeg zonder schooloplei-

ding klom hij op tot hoogleraar en werd hij in 1856 gekozen tot Fellow aan de prestigieuze Royal Society of London. Mogelijk mede omdat hij geen formele universitaire opleiding had gevolgd, ontwikkelde hij zich tot onafhankelijke denker: hij was in staat zich buiten de gebaande paden te begeven en vernieuwende inzichten te ontwikkelen. Boole's algebraïsche interpretatie van logica, met slechts drie krachtige symbolische voegwoorden, wordt algemeen beschouwd als een grote doorbraak in de geschiedenis van de logica. Hij had goed in de gaten dat zijn drie voegwoorden voldoende waren om de gehele syllogistische structuur van Aristoteles' logica te analyseren.

#### Kader 1

Aristoteles was een van de eersten die een begin maakte met het formaliseren van logica. Bekend zijn de redeneerschema's – de zogenaamde syllogismen – die hij overzichtelijk bij elkaar bracht. Een bekend syllogisme is 'Alle mensen zijn sterfelijk, Atheners zijn mensen, Atheners zijn sterfelijk'.

Boole verdiepte de logica van Aristoteles. Met zijn algebraïsche methode noteerde hij bijvoorbeeld de uitspraak 'geen X is Y' als ' $xy = 0$ ', of 'elke X is Y' als de formule ' $x(1-y) = 0$ '.

Gottlob Frege breidde de logica uit met het symbool '∃' in de betekenis 'er is een' en '∀' voor 'alle'. Hierdoor werd het mogelijk uitspraken als 'alle P's zijn Q's' te noteren als ' $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ '.

Manuel: Trok het werk van Boole eigenlijk wel de aandacht?

Nico: Naast de kwaliteiten van een nieuwe theorie is het minstens zo belangrijk hoe die gepresenteerd wordt. Het werk van Boole werd gemakkelijker toegankelijk doordat John Venn de algebra van Boole in diagrammen kon weergeven waarmee hij proposities als 'alle B's zijn A, sommige A zijn niet B' uit kon beelden. Venn was diep onder de indruk van de *Laws of thought* van Boole (1854/2010). Hij noemde het '[...] a work of astonishing originality and power [...]'. Voor de logische proposities van Boole ontwierp hij de diagrammen waaraan nu zijn naam verbonden is. Anthony Edwards schrijft over de bijdrage van Venn: '[...] it was he [Venn] who had supplied the very diagram which made Boole's system of mathematical logic so accessible. Boole himself having suggested nothing in the way of diagrams'. Venn was van 1853 tot aan zijn dood in 1923 aan Gonville and Caius College in Cambridge verbonden, eerst als student, later als docent. Ter nagedachtenis aan hem is in het College een glas-in-loodraam in de hal aangebracht. De diagrammen van Venn lijken ook zo een triviale ontdekking. Onderwijskundigen weten als

geen ander dat een plaatje meer zegt dan duizend woorden. Een wiskundig verhaal kun je abstraheren tot een formule, die vaak in een oogopslag inzicht oplevert. Een plaatje van een formule geeft nog meer mogelijkheden om tot begrip te komen. Wanneer iemand ergens grip op wil krijgen slaat hij al snel aan het tekenen. Winston Churchill, die voor zover ik weet niet was ingewijd in Venn-diagrammen, tekende een Venn-diagram om de wederzijdse relaties tussen drie mogendheden uit te drukken.

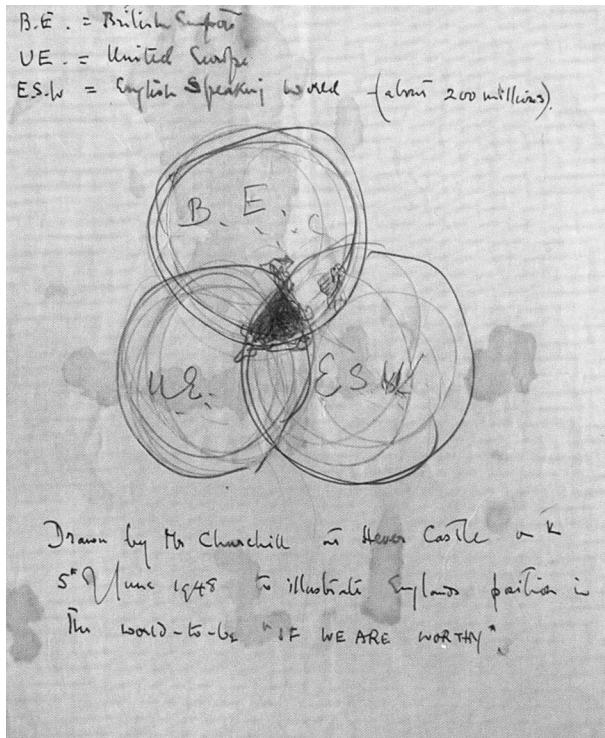


fig. 2 Winston Churchills diagram uit 1948.

*Manuel:* Grappig trouwens om te zien dat de logica verder werd ontwikkeld door een filosofische buitenstaander. Je zou toch vermoed hebben dat aan de ‘beroepsfilosofen’ deze eer te beurt zou zijn gevallen.

*Nico:* Inderdaad. Je zou in eerste instantie denken dat filosofen – en ik bedoel filosofen die filosofie gestudeerd hebben – filosofische doorbraken in gang zetten. Niet waar. Descartes, de grondlegger van de westerse filosofie had nauwelijks enige filosofische scholing. Hij studeerde literatuur met verplichte vakken als geschiedenis, retoriek en natuurlijke filosofie. Hij behaalde een academische graad in de rechten. Hij was van mening dat we wiskunde moesten gebruiken om de natuur te beschrijven. Dan zouden we heer en meester van de natuur worden. In zijn ‘methode’ voegde hij de daad bij het woord en combineerde hij meetkunde met algebra. Deze analytische meetkunde maakte het mogelijk functies grafisch weer te geven. Net zo’n ‘voor de hand liggende ontdekking’ als de

toepassing van Boole-algebra. Ook in latere tijden hebben beroepsfilosofen weinig in de melk te brokkelen. ‘Kruisbestuiving’ is het sleutelwoord, waarbij concepten die ontwikkeld zijn in een bepaald vakgebied toegepast worden in een ander vakgebied. Het raakvlak van vakgebieden kan een broedplaats voor innovatie zijn. Shannon kende twee vakgebieden – wiskunde en elektronica – en was in staat een wiskundig concept toe te passen in de elektronica. Een soortgelijke ontwikkeling heeft plaatsgevonden vanuit de biologie naar de gedragswetenschappen. Tegenwoordig worden ook daar modellen uit de evolutietheorie toegepast. Je moet dus over de schutting van je eigen vakgebied kunnen kijken.

*Manuel:* De moderne propositietheorie kent het begrip ‘waarheidswaarde’. Gebruikte Boole dat ook?

*Nico:* Nee, de algebra zoals Boole die ontwikkelde heeft geen betrekking op waarheidswaarden. De ‘niet’ in zijn algebra moet je interpreteren als ‘non’ of nauwkeuriger gezegd ‘complement’. Dit complement slaat niet op een functie, maar op een predicaatsymbool. Wanneer je een verzameling knikkers van verschillende kleuren hebt, dan geeft ‘complement-rood’ de knikkers in de verzameling aan die niet rood zijn. Binnen de verzameling wordt zo onderscheid gemaakt tussen rode en niet rode knikkers. Het voegwoord ‘niet’ daarentegen wordt bij de moderne propositielogica gebruikt voor de ontkenning van de waarheid van een functie. Als een knikker rood is, dan is (rood knikker) waar en (niet-rood knikker) niet waar. Het zou beter zijn het complement van Boole te benoemen als ‘non’ en ‘niet’ alleen te gebruiken bij de propositielogica.

*Manuel:* Had Boole een specifieke toepassing voor de door hem ontwikkelde wiskunde op het oog?

*Nico:* Boole beseftte dat een wiskundig model meerdere interpretaties kan hebben. Hij schrijft: ‘Every system of interpretation which does not affect the truth of the relations supposed, is equally admissible, and it is thus that the same process may, under a scheme of interpretation, represent the solution of a question on the properties of numbers, under another, that of a geometrical problem, and under a third, that of a problem of dynamics or optics’. Boole heeft uiteraard niet voorzien dat de programmering van computers wellicht de meest belangrijke toepassing van zijn algebra zou worden. Hij voorzag zelf twee toepassingen, de waarschijnlijkheidstheorie en de psychologie. Deze twee hebben niet tot belangrijke nieuwe ontdekkingen geleid en worden tegenwoordig niet als hoogstaand beschouwd.

**Kader 2 – spraakverwarring over de twee interpretaties van de waarschijnlijkheidstheorie**

Er zijn twee soorten interpretaties van de waarschijnlijkheidstheorie. In de *epistemologische* interpretatie wordt waarschijnlijkheid beschouwd als een graad van kennis die wij mensen hebben, de klassieke interpretatie van Laplace behoort tot deze categorie. Volgens de zogenaamde *objectieve* interpretatie is waarschijnlijkheid een objectieve eigenschap van de wereld. Deze waarschijnlijkheid is onafhankelijk van het menselijk kennen. Helaas worden verschillende namen voor de twee stromingen gebruikt, waarbij ‘subjectief’ en ‘objectief’ ook nog eens in het alledaagse taalgebruik ingeburgerde ongewenste connotaties bezitten. De epistemische interpretatie wordt ook wel de subjectieve interpretatie genoemd. Aanhangers van de objectieve school worden als frequentisten aangeduid.

	Epistemologische interpretatie	Ontologische interpretatie
<b>Referentie</b>	De menselijke kennis	De toestand in de wereld
<b>Staat ook bekend als</b>	Subjectieve interpretatie	Objectieve interpretatie
<b>Grondleggers</b>	Pierre-Simon Laplace, Thomas Bayes	Jerzy Neyman, Ronald Fischer, Karl Pearson
<b>Aanhangers</b>	Bayesianen	Frequentisten

*Manuel:* Wauw! We gaan ruzie maken! Het idee dat de toepassingen op de waarschijnlijkheidstheorie niet belangrijk zou zijn, lijkt mij inmiddels flink achterhaald. De Boole-algebra beschrijft wat *is*. De Bayesiaanse waarschijnlijkheidstheorie staat toe dit uit te breiden tot wat je *weet*. Voorbeeldje? Ik kan zeggen dat er Marsmannetjes *zijn* of niet *zijn*. Maar ik *weet* niet (zeker) welke van de twee gevallen aan de orde is. Met het Bayesiaanse waarschijnlijkheidsbegrip (zie kader 2) maak je als het ware een uitbreiding van de Boole-algebra van wat is naar wat je weet. In 2003 is er een schitterend boek verschenen, *Probability theory, the logic of science*. Het is geschreven door een erkend rebelse natuurkundige, Edwin T. Jaynes (1922-1998). Zijn ook literair interessante boek opent met een expositie van ‘inference’, *het trekken van verantwoorde conclusies uit onvolledige kennis*. Jaynes begint met het voorbeeld van de gemaskerde man die met een gevulde zak uit een gebroken winkelruit stapt. Als oom agent zoiets ziet, waarom gaat hij dan tot actie over? Logisch gezien zijn hier heel wat hypothesen te maken over wat er *feitelijk* aan de hand is. Een daarvan is, *gezien allerhande achtergrondkennis*, toch heel wat plausibeler te achten dan de rest. Vermoedelijk is oom agent inderdaad een inbreker aan het betrappen, maar hij weet niet absoluut

zeker of dit de juiste interpretatie is van het schouwspel dat zich voor zijn ogen ontrolt.

Jaynes komt al snel te spreken over Boole-algebra en voor je het weet is er een uitbreiding aan de orde waarin er plaats is voor kwantificering van onzekerheid. Concrete hypothesen kunnen van een waarschijnlijkheid worden voorzien. A priori kennen we ze een waarschijnlijkheid toe en allerlei gegevens zullen die bijstellen tot een a posteriori waarschijnlijkheid. Belangrijk is om in te zien dat de Bayesiaanse waarschijnlijkheidstheorie een soort uitgebreide propositierekening wordt. Het begrip waarschijnlijkheid wordt daarmee toepasbaar op een veel grotere verzameling fenomenen dan de frequentistische interpretatie van waarschijnlijkheid toelaat.

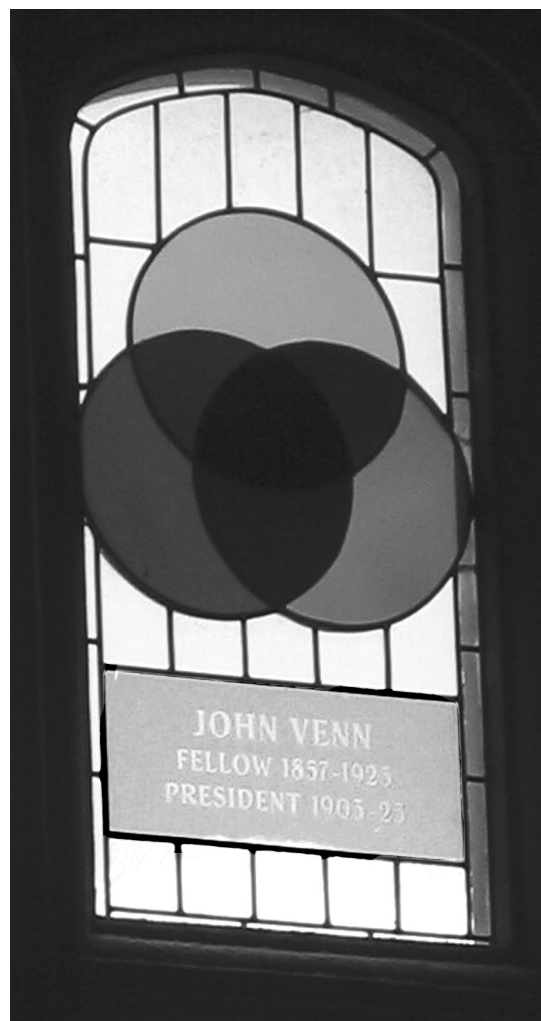


fig. 3 Glas-in-lood met Venn-diagram in Gonville and Caius College te Cambridge.

Het is indrukwekkend dat de Fransman Pierre-Simon Laplace al in de achttiende, begin negentiende eeuw een dergelijke interpretatie had van het begrip waarschijnlijkheid, uiteraard zonder de beschikking te hebben over het apparaat van de Boole-algebra. Zijn *Essai*

*philosophique sur les probabilités* (1812) is nog steeds een goed leesbaar document, en gewoon van het internet te plukken. Volgens mij kun je stellen dat de zeer zichtbare ontwikkelingen in de waarschijnlijkheidstheorie langs Bayesiaanse lijnen van de laatste decennia een innovatie betekenen. In heel wat harde natuurwetenschappelijke disciplines, zoals gegevensverwerking in de astronomie, wordt hiervan al volop gebruik gemaakt. De meer gebruikelijke statistiek van Karl Pearson en Ronald Fischer en hun trawanten wordt nog steeds onderwezen op de universiteiten, maar volgens Jaynes zou dat zijn langste tijd kunnen hebben gehad.

We hebben gezien dat de Boolese algebra een natuurlijk verbond is aangegaan met de elektronica, waardoor de ontwikkeling daarvan vleugels kon krijgen. De innovatie zat hem in het herkennen van een isomorfie tussen elektrische schakelingen en de Boolese algebra en het benutten daarvan.

De interpretatie van waarschijnlijkheid als maat voor plausibiliteit die expliciet is gebaseerd op je (achtergrond-)kennis heeft aanleiding gegeven tot een uitbreiding van de standaardlogica. Waar de laatste zich beweegt op het vlak van waar of niet waar, voegt de Bayesiaanse waarschijnlijkheid het kennisaspect toe. Jaynes kon aan zijn boek uit 2003 dan ook volledig terecht de titel meegeven *Probability theory, the logic of science*. In de complexe problemen van de moderne natuurwetenschap, waarbij men hypothesen wil toetsen met inachtneming van relevante kennis is deze ‘wetenschapslogica’ onontbeerlijk. De verrassende innovatie is hier dat de Bayesiaanse waarschijnlijkheidstheorie een diepere betekenis heeft dan *logica*. Als je eenmaal zover bent, zou je nog een stap verder kunnen gaan. Zou er een mogelijkheid zijn om deontische

logica’s in het spel te brengen, logica’s dus met een ethische dimensie? Kunnen we laten zien wat we, logisch gezien, *waarschijnlijk* behoren te doen als we een bepaalde ethische positie innemen? Kan de logica uiteindelijk helpen in het moeras van ethische kwesties, die toch zo vaak voor welles/nietesgehanes zorgen (en het opspelen van de onderbuik)?

*Nico*: Aristoteles gaf in zijn *Ethica Nicomacheia* al voorbeelden van ethische redeneringen. Bij het systematiseren van onze ethische redeneringen loop je tegen meerdere problemen op. Stel je voor dat een bepaalde handeling verplicht is. Is deze verplichting dan universeel, of zijn er toch uitzonderingen mogelijk? En wanneer men het over bepaalde morele principes eens is, dan ontstaan er toch meningsverschillen door verschil in interpretatie.

*Manuel*: Misschien is dit een weg met een toekomst, misschien zal het kolder blijken te zijn. En toch... je weet maar nooit hoever de eerste logische onderzoeken van Aristoteles uiteindelijk zullen reiken...

*Nico Krijn, Manuel Nepveu*

## Literatuur

- Shannon, C.E. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell system technical journal*.
- Shannon, C.E. (1937). *A symbolic analysis of relay and switching circuits*, MIT, Cambridge, 1937.
- Boole, G. (1854/2010). *An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probability*, Watchmaker Publishing.
- Jaynes, E.T. (2003). *Probability theory, the logic of science*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Laplace, P.-S. (1812). *Théorie analytique des probabilités*, Paris.