In het vorige nummer van de *Wiskrant* belichtte **Aad Goddijn** de achtergronden van het nieuwe meetkundeprogramma VWO 2015. Onder de titel 'Beweging, raaklijn, snelheid' werd onder andere ingegaan op wat we precies moeten verstaan onder raken. In dit vervolgartikel staat snelheid van bewegen centraal, komen vectoren goed van pas en wordt een inkijkje gegeven in het derde artikel in deze serie in het volgende nummer.

Snelheid, vector, afgeleide

Achtergronden bij beweging in meetkunde met coördinaten, deel II

Wat vooraf ging en wat nog komt

Dit artikel sluit aan op 'Beweging, raaklijn, snelheid' in de vorige *Nieuwe Wiskrant*. Daar werd vanuit intuïtieve begrippen over beweging toegewerkt naar meer precisie. Deze werd nog niet volledig bereikt, maar we hebben wel twee vormen van raaklijnen onderscheiden, waarbij de beruchte limietstand van een koorde nu eens niet bij de in de schoolwiskunde erg dominante grafieken en functies opdook, maar in een onvervalst meetkundige setting. Raken bleek met de richting van een beweging over een kromme te maken hebben. Snelheid bleek wat meer in te houden: snelheid heeft behalve richting ook grootte. Snelheid op een bepaald moment werd (vaag?) omschreven als het plan van een beweging voor de nabije toekomst.

We betrapten Gilles de Roberval in 1637 op een fout, toen hij net iets te kort de bocht nam in het redeneren met snelheden bij een parabool. Hij maakte onterecht gebruik van het samenstellen van snelheden via de parallellogramconstructie. Tot slot gunden we Roberval alle eer omdat hij dezelfde methode bij de cycloïde wel correct toepaste. Waarom had hij daar wel gelijk? Zie de vorige *Nieuwe Wiskrant*!

We gaan in dit artikel wat meer precisie rond ons rijtje van concepten opzoeken. De afgeleide herontdekken we uiteindelijk vanuit het begrip snelheidsvector en niet andersom; een beetje ongebruikelijk maar daardoor misschien juist verhelderend, want van ingesleten gewoontes leren we meestal weinig nieuws.

In dit artikel pakken we de bewegingen weer op en net als de vorige keer starten we met een probleem. Dit probleem leert ons een paar dingen over vectoren, die in de schoolsituatie gewoonlijk in de schaduw worden gehouden. Maar omdat dit artikel juist mikt op achtergrondinzichten, nemen we ze hier wel nader onder de loep. Net als de vorige keer zijn wat intuïtieve reacties gevraagd. Die waren de vorige keer bij de versleepte driehoek vrij eenduidig, maar nu ligt helder en volledig inzicht blijkbaar minder dichtbij.

Midden tussen twee klokken

Stel je voor, aan de muur hangen twee klokken. Ze zijn niet even groot, ze hangen scheef, ze lopen niet gelijk, maar ze lopen wel exact even snel. Tussen de eindpunten van de ongelijke grote wijzers spannen we een dun elastiekje en we markeren daarvan het midden met een stip. De klokken trekken zich niets aan van stip en elastiekje, ze lopen gewoon door. Vraag: *hoe beweegt die stip?*

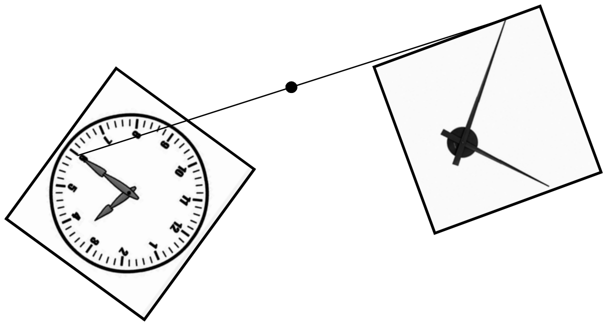


fig. 1 Twee grote wijzers en hun midden.

Enkele eerste verkenningen liggen wél voor de hand. Bijvoorbeeld: bij een tweetal wel gelijke, gelijklopende en gelijkhangende klokken beweegt de stip in een cirkel. Als we in die situatie de ene klok een half uur voorsprong geven, beweegt de stip helemaal niet. Maar bij een kwartier achterstand wordt het voorspellen lastiger en als de maten dan ook nog afwijken, kan een ellips dan misschien voorkomen? Of een achtje en misschien soms zelfs een recht lijntje? Maak een schetsje, volg je eigen stip!

Twee extra punten, drie parallellogrammen

Helaas kan ik de lezer niet lang in onzekerheid laten, want ik wil het voorbeeld gebruiken om een belangrijk bewijsmiddel bij beweging in de meetkunde onder de loep te nemen.

Handige Geogebra-gebruikers namen vast wel waar dat de stip een cirkel doorloopt, waarvan het middelpunt midden tussen de middelpunten van de klokken ligt, hoe gek de klokken ook gedraaid zijn, hoeveel de wijzers ook verschillen in lengte. Voor de grootte van de cirkel is waarschijnlijk niet zo snel een vermoeden te bedenken. Hopelijk kunnen we de waarnemingen spoedig wiskundig ondersteunen met een bewijs en tevens de grootte van de nieuwe cirkel voorspellen.

In figuur 2, een momentopname, staan de (klok)cirkels, hun middelpunten K en L, de wijzerpunten V en W met het middelpunt R van VW en het middelpunt M van lijnstuk KL. Kleine pijltjes suggereren de draaiingen. Bovendien zijn twee extra punten getekend, P en Q, want zo gaat dat altijd bij de synthetische meetkunde: de bewijsmaker voegt bij de start van het bewijs geheimzinnige extra punten of lijnen aan de figuur toe, die het bewijs als water doen lopen, maar die je zelden zelf vindt. De punten P en Q zijn hier zó gekozen dat MP en MQ gelijke maat en richting hebben als de wijzers KV en LW.

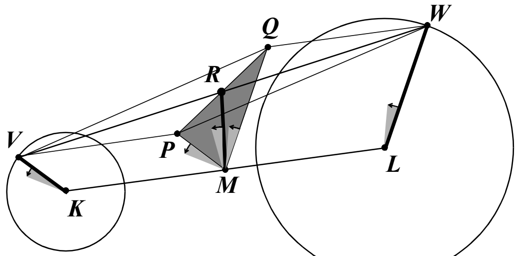


fig. 2 Hoe beweegt R? Traditionele meetkunde met parallellogrammen.

$KMPV$ en $MLWQ$ zijn dus parallellogrammen. Het ziet ernaar uit dat het midden R van VW (de stip) ook het midden van PQ is. Zou dat echt zo zijn?
Jazeker, want $VPWQ$ is óók een parallellogram, VP en QW zijn immers even groot en gelijk gericht, omdat KM en ML dat zijn. R is het gemeenschappelijk midden van de diagonalen van $VPWQ$.

Tot zover het statische deel van het bewijs. Nu de bewegingen! MP en MQ gedragen zich precies als de wijzers KV en LW. Driehoekje PMQ draait in zijn geheel als vast figuurtje om vast punt M, gelijk op met de wijzers. Maar dan is MR ook vast in lengte en draait ook gelijk op met de rest! Het vermoeden is juist en we hebben ook een constructie in handen voor de grootte van de cirkel waarover R beweegt.

Verplaatsingspijlen?

Meetkundige vragen gaan vaak over onderlinge posities van punten. De klokkenvraag kan ook vertaald worden in pijlen, die de onderlinge posities van punten beschrijven als verplaatst vanuit één bron; dat levert een andere beschrijving op die een nuttige methode binnen handbereik brengt. We moeten dan wel uitgaan van zo'n startpunt; in figuur 3 is dat punt O.

Pijlen met namen in kleine letters met een pijltje op het hoofd geven de verplaatstingen aan; de correspondentie met de kloksituatie is in deze momentopname weer duidelijk; straks zijn x en y *draaiende* pijlen.

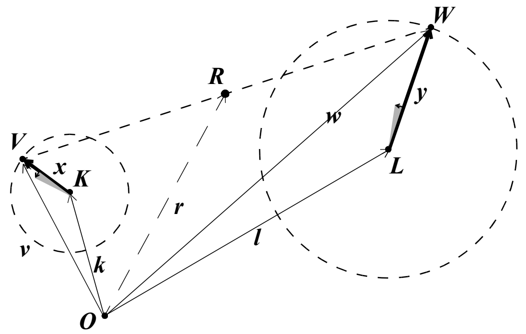
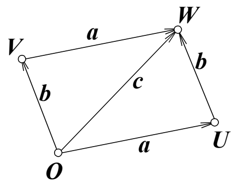
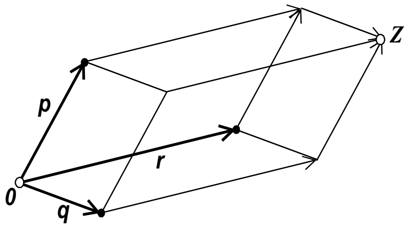


fig. 3 Hoe beweegt R? Aanpak met vaste en draaiende pijlen.

Zo'n verplaatsingspijl heeft richting en grootte, de pijl kan overal met zijn werking beginnen.

Hoe werken zulke pijlen dan, puur meetkundig? In deze voorbeeldfiguur wordt de verplaatsing van O naar V volgens pijl a gevolgd door de verplaatsing over pijl b naar W. Het kan ook andersom: O eerst volgens b verplaatsen en dan over a. Via beide routes komen we op hetzelfde punt W uit, het zijn de twee manieren om via het parallellogram van O naar W te komen. Als we het na elkaar toepassen van verplaatsingen a en b noteren als $a + b$, dan blijkt dus voor onze verplaatsingen een mooie wet te gelden: $a + b = b + a$. In de figuur geven we ook de gezamenlijke verplaatsing nog een naam, c. Nu is het algebra geworden, $c = a + b$, zeker als we via de volgende figuur nog meenemen dat het optellen van drie pijlen onafhankelijk is van de volgorde.





Van mij mag u dit aannemen op grond van stevige voorkennis over tekeningen van balken in parallelprojectie, maar voor een echt fundamentele aanpak van een bewijs van $(p + q) + r = p + (q + r)$ moeten we niet uit het vlak stappen, maar parallellogrammen gebruiken. Dat kan best, probeer het maar; welke diagonalen van parallellogrammen nog verder nodig zijn, blijkt vanzelf.

Voor ons klokkenvraagstuk zou ik ook nog een aangepaste onderbouwing voor zoiets als de helft (of het dubbele, of een ander veelvoud) van een verplaatsingspijl moeten geven, genoteerd als $\frac{1}{2}a$ of $2b$. Zo volledig ga ik maar niet zijn, het is aardiger om in het volgende bewijs bij de klokstelling te zien dat alle algebraïsche stappen goed functioneren.

Vectoren!

Natuurlijk, natuurlijk, het zijn vectoren. Ik hield het echter even bij de verplaatsingentaal, om te laten zien hoe zo'n probleem op betrekkelijk natuurlijke wijze tot een algebra met pijlen/vectoren leidt. We maken het bewijs dan ook maar af in een passende notatie, die bij vectoren gebruikelijk is.

R is het midden van VW, in pijlentaal is dat

$$\vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{w})$$

De volgende stap laat zien hoe $\vec{v}$ en $\vec{w}$ tot stand kwamen, hier wat overdreven duidelijk uitgeschreven :

$$\vec{r} = \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{w}) = \frac{1}{2}((\vec{k} + \vec{x}) + (\vec{l} + \vec{y}))$$

$\vec{k}$ en $\vec{l}$ zijn hier vaste pijlen, tijdens het lopen van de klok zijn $\vec{x}$ en $\vec{y}$ de draaiende wijzers/pijlen.
De algebra van de pijlen laat ze ons in enkele stappen ordenen in een vast deel plus een draaiend deel:

$$\vec{r} = \frac{1}{2}((\vec{k} + \vec{x}) + (\vec{l} + \vec{y})) = \frac{1}{2}(\vec{k} + \vec{l}) + \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y})$$

Pijl $\vec{m}$, met $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{k} + \vec{l})$, wijst vanuit O het punt M aan, en $\vec{z} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y})$ wijst van M naar R.

Dat $\vec{z}$ weer een draaiende pijl van vaste lengte is (om dezelfde redenen als bij het eerste bewijs) wordt door de inzet in onderstaande figuur nader belicht, de redeneerstap is hetzelfde als bij het eerdere bewijs.

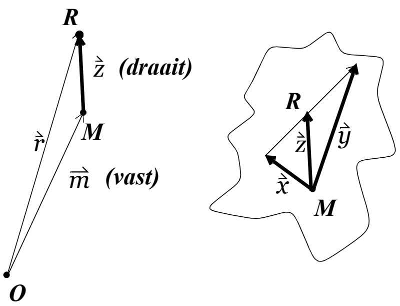


fig. 4 Daarom draait R over een cirkel!

Nu is het bewijs met pijlen/vectoren voltooid en kunnen we kijken naar verschillen en overeenkomsten met het eerste bewijs.

Voors en tegens

Allereerst een woord van hulde voor de vectormethode. Die maakt het ons toch heerlijk gemakkelijk. Na het neerschrijven van de vectoren kunnen we R gewoon berekenen en resultaat wordt bereikt door basale rekenregels toe te passen. De magische punten P en Q, die een gewoon mens nooit zou bedenken, zijn niet meer nodig; de vectoralgebra kan het zonder, dat kun je zo aan de figuur zien.

Misleidende hulde! De cruciale stap in het bewijs is namelijk deze:

$$\vec{r} = \frac{1}{2}((\vec{k} + \vec{x}) + (\vec{l} + \vec{y})) = \frac{1}{2}(\vec{k} + \vec{l}) + \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y})$$

Die is zeker wel makkelijk te *bewijzen* door links en rechts haakjes verdrijven en termen verwisselen. Maar de *keuze* van juist die algebraïsche stap zit in de meetkundige argumentatie, zoëven geformuleerd als *ordenen in een vast deel plus een draaiend deel.* Hoogstwaarschijnlijk staat de algebraïsche aanpak op zich niet zonder meer garant voor het vinden van een oplossing van een probleem als hierboven, als zulke meetkundige sturing er niet is.

In het pilotmateriaal voor meetkunde in wiskunde B VWO voor 2015 wordt dan ook gekozen voor vervlechting en wederzijdse bevruchting van synthetische meetkunde met algebraïsche methoden (waaronder naast vectoren natuurlijk ook coördinaten, later meer daarover).

Het klokkenvoorbeeld komt in dat materiaal niet voor, maar op grond van ervaringen met leerlingen valt wel te voorspellen dat heel wat leerlingen na de eerste op basisvaardigheden gebaseerde stappen wel kunnen komen tot zoiets als

$$\vec{r} = \frac{1}{2}((\vec{k} + \vec{x}) + (\vec{l} + \vec{y})) = \frac{1}{2}\vec{k} + \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{l} + \frac{1}{2}\vec{y}$$

en dan de handdoek in de ring werpen. Of erger: denken dat ze klaar zijn na het uitwerken van de formule. Algebra, opgenomen in een kader van een betekenisvol probleem en niet als algebra op zich, dat valt niet mee; maar zo'n betekenisvol kader, dat is wél waar het bij wiskunde om gaat.

In het synthetische bewijs (aan de hand van figuur 2) wordt de bouwsteen 'parallellogram' herhaaldelijk gebruikt. In het vectorenbewijs is die bouwsteen niet verdwenen, maar zit nu verborgen in de commutativiteit en andere algebraregels van de optelling van de vectoren. Dat verdwijnen van een meermaals herhaald basiselement is een voordeel, als het om complexere problemen gaat, waarbij je echt niet steeds met het basisniveau van die parallellogrammen geconfronteerd wil worden. Maar het is in de onderwijssetting in het VWO ook een gevaarlijke wending; als de leerling het onderwerp vectoren zó aanleert, dat er geen weg meer terug is naar de onderbouwing vanuit de vraag zelf die tot vectoren aanleiding gaf, dan vaart de leerling op het gezag van degene die de vectorrekening heeft voorbedacht en beweert dat dít model correct werkt bij dít meetkundige probleem. Of varen op gezag van anderen – zelfs dat van een goede docent – een wiskundige attitude is, daar kan wat mij betreft niet over getwist worden; het is gewoon: nee.

Terug naar de vectoren, in het bijzonder naar punt O dat opdook in figuur 3.

O kwam in het verkeerde vlak terecht

In de vectormethode bij de klokken trad dat punt O waarvan we niet konden of wilden aangeven waar het zich bevond, zomaar op. Heeft de vectormethode zo'n O echt nodig, terwijl het stellen van het probleem in het meetkundige vlak dat niet heeft? Hoe zit dat? Deze vraag vraagt om het transparant maken van de relatie meetkunde/vectoren. Ik pak het daarom wat abstracter aan dan tot nu toe en roep er een absolute kenner bij.

Hier op tafel ligt *Introduction to Geometry* van H.S.M. Coxeter; dat boek staat nooit lang in de kast. Hoofdstuk 3 gaat over isometrieën, waaronder translaties: verplaatsingen. Bij elk puntenpaar (A, A') past een translatie die A naar A' brengt. Let op: de translatie is wel bedoeld als werkend op het hele vlak, en daarom horen verschillende puntenparen als (A, A') en (B, B') mogelijk bij dezelfde translatie. Dat gebeurt als $AA'B'B$ een parallellogram is. Translaties regeren bij Coxeter hoofdstuk 13, dat over affiene meetkunde gaat. Affiene meetkunde is meetkunde waarin wel het begrip parallelle lijnen functioneert, maar niet het begrip afstand. Translaties zijn daar heel belangrijk en hier noemt Coxeter de translaties vrij plotseling vectoren!

Dat het na elkaar toepassen van twee translaties onafhankelijk van de volgorde van toepassen is, blijkt snel. In het volgende fragment, het midden van de middelste bladzijde van het boek, zien we translaties (vectoren) genoteerd als een pijl boven een puntenpaar en zien we meerdere representaties voor wat één vector is; raadpleeg daarbij ook Coxeters hier opgenomen figuur 13.2b.

De slotregels tonen Coxeters geliefde vectornotatie. Daarmee maakt hij visueel onderscheid tussen de algebrawereld van vectoren en de meetkundewereld van punten en lijnen. In het (meetkunde)vlak staan punten met cursieve hoofdletters, in de vectorwereld kleine vette letters, rechtop, en de verbinding is gelegd via punt-naar-punt pijlen.

In this notation, 13.21 asserts that any two points A and A' determine a unique vector $\overrightarrow{AA'}$ (going from A to A'), Figure 13.2*b* illustrates a situation in which

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'},$$

13.23 asserts that

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC},$$

and 3.23 asserts that, for any two vectors **a** and **b**,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

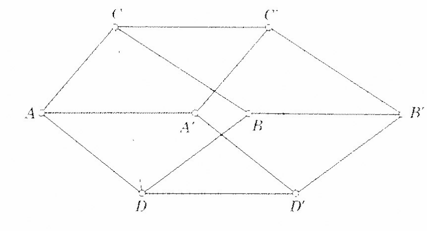


Figure 13.2b

Er ontstaat een helder verschil tussen de punten en hun positie in de tekening enerzijds, en anderzijds de vectoren, die hier alleen verplaatsingen en nooit zelf posities zijn. Ze horen eigenlijk niet in de meetkundige figuur, vandaar dat die O er bij ons in figuur 3 zo raar bijstaat; in de figuur verschijnt hij alleen als punt; er is geen vector die het punt 'aanwijst' en daarom is het een willekeurige toevoeging aan de figuur.

Coxeters aanpak is vast wat te abstract voor onze huidige VWO-situatie. Wat blijft staan, is dat zonder enige abstractie in de aanpak het onderscheid tussen posities en vectoren verduisterd wordt, zeker als we sommige vectoren *plaatsvectoren* gaan noemen als ze vanuit een O komen en ze praktisch met de meetkundige punten identificeren, terwijl we dat bij de andere vectoren niet doen.

Coxeter is mooi consequent door de nulvector met een vette rechtop gezette nul, **0**, aan te geven en niet in de figuur tussen de meetkundige punten te plaatsen, waar soms wel eens een niet vette cursieve hoofdletter 'O' optreedt, O, als oorsprong van een coördinatenstelsel.

Coxeter bouwt vanuit vectoren en hun onderlinge samenhang een coördinatenstelsel op (en niet andersom!), maar voor het verdere verloop van dit artikel is dat niet per se nodig; in een volgend artikel gaan we werken met bewegingen die via coördinaatfuncties gegeven zijn en dan gaan we van het stelsel uit dat we gewend zijn.

In de schoolboeken w(e)(o)rden vectoren vaak van meet af aan van kentallen voorzien, met als gevolg dat we het de leerling moeilijk maken ze van punten en hun coördinaten te onderscheiden. Het lijkt mij beter de vectoren en punten in *hun gebruik* te onderscheiden. Zinvol vectorgebruik in een meetkundige situatie, waarbij beweging en snelheid functioneren en coördinaatgebruik nog helemaal niet nodig is, kan bijdragen aan de conceptopbouw.

Van positiebeschrijving naar snelheid

In het artikel in de vorige *Nieuwe Wiskrant* ('Beweging, raaklijn, snelheid') werd vooral bij de cycloïde, maar ook bij de te verslepen driehoek volop gebruik gemaakt van vectoren die snelheden representeerden. Ik herhaal nog even figuur 8 uit het artikel, waarin vierkant $ABCD$ in beweging wordt gebracht volgens de aangegeven pijlen.

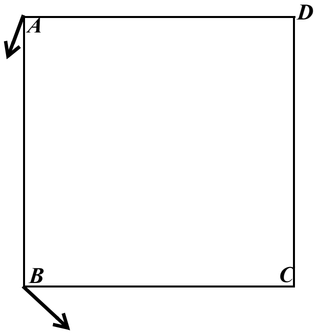


fig. 5 Op het allereerste moment van de beweging.

De pijlen hebben hier een geheel andere rol dan de pijlen in figuur 3. Ze suggereren hier richting en grootte van een beweging; de pijlen in figuur 3 zijn daar wel 'verplaatsingen' genoemd, maar de verplaatsingen zijn niet die van de probleemsituatie zelf; dat waren namelijk de bewegingen van de wijzerpunten van de klokken. De 'verplaatsingen' zijn een hulpmiddel uit de vectorwereld om berekenbare grip op de situatie te krijgen. Dat maakt hun gebruik eigenlijk een stukje abstracter dan de 'natuurlijke' pijlen bij de bewegende vierkante aardschol.

Anders gezegd: op grond van deze voorbeelden lijkt de snelhedencontext een wat directere instap tot vectoren te bieden dan de positiecontext. Als systematisch (maar misschien net iets te schools) denkend wiskundige wil je daar misschien niet zomaar aan: de snelheid wordt toch bepaald door de manier waarop een positie verandert? Gaat die positiebenadering dus niet intrinsiek vooraf aan de snelheidsbeschrijving? Dat is niet per se zo. Als fietser (of automobilist) weten we dat door bijsturen van de snelheid in grootte en richting uiteindelijk het doel, een bedoelde nieuwe positie, bereikt wordt. Je kunt evengoed snelheid als basisbegrip bij beweging kiezen. Voor leerlingen is snelheid ook vaak meer een eigenschap van een bewegend object zelf dan een ingewikkelde relatie tussen tijd en afgelegde weg. In *Modelling Motion* (Doorman, 2005) wordt ruim aandacht besteed aan intuïtieve noties van leerlingen over snelheid.

In wezen gaat het hier om het verschil tussen differentiëren en integreren. De raaklijn en de snelheid op een gegeven tijdstip bij de beweging over een cycloïde (vorige artikel) is daar gevonden op grond van de meetkundige bewegingsbeschrijving. Uit de gegeven totale beweging is de snelheid – de momentane karakterisering van de beweging – afgeleid. Er is een sterke parallel met het vinden van de lineaire benadering bij functies. We kunnen dat heel exact en algemeen beschrijven; dat wordt een wat abstractere paragraaf straks.

Eerst doen we het omgekeerde in een eenvoudig geval: vanuit snelheden, die niet alleen voor één moment maar voor een langere tijdsspanne gegeven zijn, een werkelijke toekomst voorspellen, niet alleen de 'infinitesimaal' nabije toekomst.

Het wordt wat erg eenvoudig als we daarvoor één punt beschouwen dat één vaste snelheid heeft, dus we nemen er twee om een betekenisvolle situatie te hebben: twee schepen op de wijde zee, elk in eenparige rechtlijnige beweging.

Ik geef het probleem in de vorm van een voorgestructureerde opgave. De opgave komt, afgezien van het *cursieve* gedeelte na de inleiding, uit de eerste versie van het experimentele materiaal voor de meetkundepilot en is slechts weinig voor dit artikel aangepast.

Twee schepen

In het linkerdeel van figuur 6 zie je startpositie en snelheidsvectoren voor twee schepen. Eén schip gaat vanaf positie $\vec{R}$ op tijdstip $t = 0$ weg en legt in de eerste minuut af wat door vector $\vec{s}$ wordt aangegeven. De positie van dat schip geven we aan met $\vec{S}(t)$. Er geldt:

$$\vec{S}(t) = \vec{R} + t \cdot \vec{s}$$

Het andere schip start in $\vec{P}$, vaart per minuut $\vec{v}$ en de positie ervan geven we aan met $\vec{T}(t)$. Dus:

$$\vec{T}(t) = \vec{P} + t \cdot \vec{v}$$

Op die notaties valt wel wat af te dingen. Het probleem is dat we hier posities en snelheden beide als vectoren schreven. In de figuur de positie met P *(zonder pijldakje) aangeven en in het vectorrekeningdeel met kleine letters met pijlen werken, dus met* $\vec{p} + t \cdot \vec{v}$*, lost wel iets op en dit is in de latere versie ook gedaan; het is de werkwijze van de pijlenaanpak bij de klokken! De bekende bij het voorbeeld van Coxeter gegeven notatie zou zijn: de punten* P *en* $T(t)$ *noemen, en de vector* $\overrightarrow{PT(t)}$*. Zodat de voorstelling van de beweging er zo uitziet:* $\overrightarrow{PT(t)} = t \cdot \vec{v}$*. Deze notatie is voor dit probleem wat te zwaar, maar in het theoretische paragraafje straks gebruik ik die wel.*

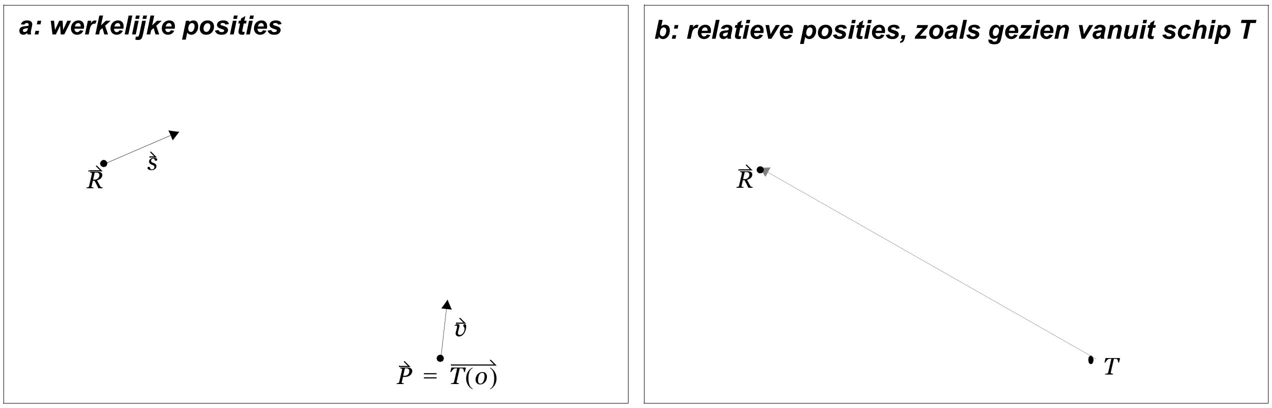


fig. 6 Twee schepen op één zee in twee figuren. Wordt het botsen? Kunnen we de minimale onderlinge afstand vinden?

Een andere adder onder het gras is de variabele t die de verlopen tijd weergeeft. Als die echt als tijd bedoeld is (en niet als aantal - minuten - zoals dadelijk duidelijk wordt), is er een dimensieprobleem want dan tellen we hier posities en snelheden op. Natuurkundigen staan niet te juichen bij de gebruikelijke schoolwiskundeaanpak waarin de tijd vaak een plat reëel getal is. Omdat deze problematiek bepaald niet tot werken met vectoren beperkt is, vermijd ik het probleem hier. Er is wel dieper gravende literatuur over; zie Van der Kooij (2006).

a. Teken nauwkeurig de posities van beide schepen na 1, 2 en 3 minuten.
Geef ze met $\overrightarrow{T(1)}, \overrightarrow{T(2)}, \dots$ en $\overrightarrow{S(1)}, \overrightarrow{S(2)}, \dots$ aan en teken ook de werkelijke routes in de linkerfiguur.

Als je op schip T staat en er wordt met vaste koers en snelheid gevaren op gladde zee, lijkt het alsof jij stil staat. Je ziet dan alles vanuit je eigen vaste punt T. Het rechterdeel van figuur 6 beeldt dat uit. T is daar als vast punt getekend, er is geen snelheidspijl bij die T. De lange pijl geeft aan in welke richting en hoe ver schip S is op moment $t = 0$. Deze pijl geeft de relatieve positie van S ten opzichte van T aan.

b. Teken in de linkerfiguur ook de pijlen van schip T naar schip S voor de momenten $t = 1, 2, 3, 4$ en verplaats de pijlen ook naar het vaste punt T in de rechterfiguur om de opvolgende relatieve posities van S ten opzichte van T te vinden.

c. De relatieve posities in de rechterfiguur liggen, zoals je ziet wanneer je nauwkeurig gewerkt hebt, op een rechte lijn. Teken die lijn volledig en zet ook de schijnbare posities voor $t = 5, 6, 7$ erop. Dat kan ook door het patroon van de eerdere momenten door te zetten. Trek ook de *relatieve route* als lijn.

d. Rechts kun je nu aangeven wat de positie is van S op het moment dat S het dichtst bij T is. Teken voor dat moment het pijltje van T naar S.

Het tamelijk kleine pijltje van vraag d geeft aan: het was een narrow escape! In de werkelijke figuur (links) kun je dat pijltje ook eerst provisorisch vanaf $P = T(0)$ tekenen en daarna met de pijlstaart langs de T-route verschuiven. Je vindt een positie met de pijlkop op de baan van S en de staart op de baan van T.

e. Doe dat nauwkeurig in de linkerfiguur. Je hebt de plekken bepaald waarop de schepen de minimale onderlinge afstand van elkaar hebben!

Tot zover dit voorbeeld vol verschilvectoren en relatieve snelheid. Een historisch voorbeeld is de beroemde achtervolging van het Duitse pantserschip Bismarck in 1941 door HMS Suffolk, wiskundig verslagen in *Differentiëren I* (Kindt, 1980). Met een andere methode om de minimumafstand tussen twee rechtlijnig met vaste snelheid bewegende schepen te vinden!

Snelheid als afgeleide

Bij bekende snelheid in een eenvoudig geval de bewegingssituatie vinden, dat gebeurde in het schepenvoorbeeld. Het heeft iets van integreren: de posities worden bepaald door sommeren van kleine stapje, wat in het lineaire geval niet moeilijk is als we rechte lijn en liniaal benutten.

Nu keren we terug tot een beweging over een kromme, waarbij we juist de snelheid willen weten als de positie op elk tijdstip gegeven is. Dat lijkt meer op differentiëren; het verband met differentiëren onderbouwen we nu stevig via het begrip lineaire benadering.

De lineaire benadering hier ís de eenparige beweging die in het gegeven punt dezelfde snelheid heeft als het bewegend punt zelf.

In de analyse op school zijn we gewend de afgeleide te beschrijven als limiet van een differentiequotiënt. Als we hier die beste benaderende eenparige beweging hebben gevonden, is die dan ook zoiets als een limiet van een differentiequotiënt van de positie, al dan niet als vector?

Ja, dat is de kern!

Om greep op de zaak te krijgen, moeten we denken aan een vloeiende lijn die doorlopen wordt door een punt P; $P(t)$ is de positie op moment t. Voor de redenering die nu volgt, hebben we de coördinaatsfuncties van $P(t)$ nog steeds niet in formulevorm nodig. $P(t)$ mag ook gegeven zijn door een beschrijving, zoals bijvoorbeeld bij de cycloïde is gebeurd of $P(t)$ is het punt dat langs een gegeven ellips loopt en afstand t langs die ellips aflegt vanaf een gegeven punt. Prima beschrijving, maar er is geen formule voorhanden.

In figuur 7 zien we de baan van P, met de verwachte lineaire eenparige benaderingsbeweging rond het moment $t = 0$. Die geef ik met $Q(t)$ aan.

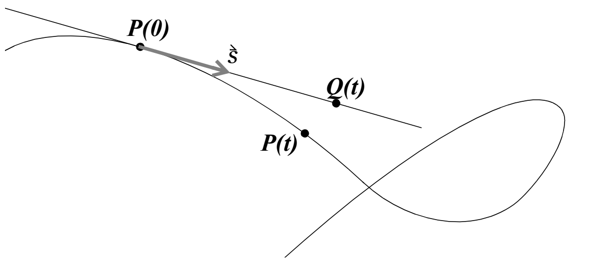


fig. 7 Bewegend punt over krommem, met lineaire benaderaar.

De verplaatsing van een punt A naar een punt B noteer ik nu voor dit meer theoretische onderdeel wel, Coxeter volgend, met de vectornotatie $\overrightarrow{AB}$. Waren B en A getallen, dan stond daar gewoon $B - A$*;* het denken aan verschillen geeft vast wel steun bij de afleiding, maar ik ga nu geen punten van elkaar aftrekken. Vector $\vec{s}$ is de te vinden snelheidsvector. Het is eigenlijk een smet op de figuur, want de grootteverhouding van $\vec{s}$ met positieverschillen is op zijn minst onduidelijk. (Een mogelijkheid is nog bij dit kaartje van de beweging van P zowel een afstandsschaal als een snelheidsschaal aan te geven.) De vector $\vec{s}$ past wel goed in de formule voor de eenparige beweging van Q,

$$\overrightarrow{P(O)Q(t)} = t\vec{s}$$

maar het oog gun ik toch ook wel wat suggestie in de figuur.

Dat $Q(t)$ echt de best mogelijke eenparig lineaire benadering is van $P(t)$ betekent dat de afstand van P tot Q oneindig klein is in verhouding met t, als t nabij 0 is, en dat we $\dfrac{\overrightarrow{P(t)Q(t)}}{t}$ in vergelijking met andere grootheden kunnen verwaarlozen als t 'oneindig klein' is.

We willen weten hoe $\vec{s}$ door de beweging van $P(t)$ bepaald is; daarom gaan we het verband $\overrightarrow{P(O)Q(t)} = t\vec{s}$ zó ombouwen dat de *koorde* $P(0)P(t)$ de hoofdrol krijgt.

$$\vec{s} = \frac{\overrightarrow{P(O)Q(t)}}{t} = \frac{\overrightarrow{P(O)P(t)} + \overrightarrow{P(t)Q(t)}}{t} =$$
$$= \frac{\overrightarrow{P(O)P(t)}}{t} + \frac{\overrightarrow{P(t)Q(t)}}{t}$$

Van het laatste stukje weten we dat het in grootte niet meetelt als t oneindig klein is.
Daarom geldt:

$$\frac{\overrightarrow{P(O)P(t)}}{t} \to \vec{s} \quad \text{als} \quad t \to O$$

Dat is inderdaad wat we wilden: een differentiequotiënt in de vorm van een verplaatsingsvector gedeeld door een tijdsverschil dat tot nul nadert.

Hoe verhoudt dit zich nu met de raaklijn aan een parabool zoals we die in het vorige artikel via een inklembewijs vonden?

Door een meetkundige beschouwing lukte het daar aan te tonen: als we punt Q op de parabool laten naderen naar P, dan heeft *koordelijn* PQ een *limietstand.* Of Q nu langzaam naar P beweegt of snel, dat doet er niet toe als het om de richting alleen gaat.

Nu we vectoren gebruiken, kunnen we een stap verder gaan en ook kijken naar de grootte van de vector die door het plaatsverschil van P naar Q wordt gegeven. De grootte van de vector hangt af van de manier van bewegen van P over de parabool (of een andere kromme) in de tijd. De snelheidsvector is de afgeleide van de positie.

Vooruitblik

In een volgend voorbeeld gaan we echte afgeleiden via de snelheidsroute bepalen.

In dat voorbeeld – het eerste in een aansluitend artikel in de volgende *Nieuwe Wiskrant* – gebruik ik dan wél coördinaten voor het via (parameter)functies beschreven punt $P(t)$.

Tot nu toe onderzochten we achtergronden van de analytische meetkunde op wat tegendraadse wijze. Wel vectoren en veel snelheden, zelfs een parametrisering, maar (nog steeds) nauwelijks coördinaten of kentallen. Daarbij kwamen al aan bod: de *samenstelling* van bewegingen via superpositie bij de cycloïde, het *verschil* tussen twee bewegingen bij twee schepen, de *projectie* van een beweging op een lijn bij de voorbeelden van versleepte driehoeken en bewegende schollen in het eerste artikel. Met de vectoren is de analytische methode zo al volop op gang. In het volgende artikel doen we dat ook zo met coördinaten en volgt de inlossing van de belofte over een keihard bewijs bij de op intuïtie gebouwde stelling van de vliegende staaf. Met het inproduct in een onverwachte glansrol in ‘Afgeleide, coördinaten, inproduct’!

Aad Goddijn,
Freudenthal Instituut

Literatuur

Doorman, L.M. (2005). *Modelling motion: from trace graphs to instantaneous change.* Dissertatie. Utrecht: CDβ press.

Kindt, M. (1980). *Differentiëren (Een manier om veranderingen bij te houden).* IOWO. Digitaal beschikbaar: http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00544/.

Van der Kooij, H. (2006). Algebra in natuur en techniek. In P. Drijvers (red.), *Wat a is, dat kun je niet weten.* Utrecht: Freudenthal Instituut.

MEDEDELING

Doe mee en win een bus wetenschappers!

Wetenschappers op school

Wetenschap in de klas, verzorgd door topwetenschappers: dat is *De Jonge Akademie on Wheels*. Dit project, geïnitieerd door De Jonge Akademie, brengt een groep van vijfentwintig jonge, vooraanstaande wetenschappers een hele dag naar school. In het voorjaar van 2012 rijdt de bus van De Jonge Akademie on Wheels acht keer uit naar middelbare scholen in Nederland.

Enerverend dagprogramma

Wetenschappers uit alle vakgebieden dagen leerlingen van VMBO, HAVO en VWO uit om na te denken, vragen te stellen, te onderzoeken, samen te werken, te experimenteren en uit te leggen. Teams van leerlingen nemen het tegen elkaar op in workshops, quizzen en een plenair programma rondom het thema voeding. Het programma wordt gepresenteerd door BN’er Victoria Koblenko. Er kunnen zo’n honderd leerlingen uit de eerste en tweede klassen deelnemen.

Prijsvraag

Klassen kunnen aan de wedstrijd meedoen door een nieuwe onderzoeksvraag te bedenken voor Expeditie Moendoes. Dit spel van een lesuur over de essentie van wetenschap is gratis te bestellen op de website www.dejongeakademieonwheels.nl. Van januari tot en met april 2012 kan de onderzoeksvraag ge-upload worden via diezelfde website. Iedere maand worden uit de inzendingen twee winnaars gekozen. Doe mee, win een bus!

www.dejongeakademieonwheels.nl

De Jonge Akademie, zelfstandig platform binnen de KNAW (Koninklijke Akademie van Wetenschappen), bestaat uit 50 jonge toponderzoekers uit alle wetenschappelijke disciplines. De leden hebben zich in het verleden onderscheiden door het doen van origineel en vaak grensverleggend onderzoek.