

Auteurs van wiskundemethoden schrijven zelden over hun manier van werken. In dit artikel krijgen we echter een kijkje in de keuken van een aantal ontwerpers van *Moderne Wiskunde*, die hun methode aanvullen met activiteiten met Geogebra in de digitale wiskundeomgeving DWO. Opvallend is dat ze juist ontwerpen voor wiskunde A en niet voor B, zoals misschien vanwege Geogebra te verwachten zou zijn.

Wiskunde A doe je in de DWO met GeoGebra

Inleiding

Dit artikel is geschreven door een auteursgroep van *Moderne Wiskunde* die afgelopen schooljaar voor de bovenbouw HAVO/VWO tientallen modules en activiteiten ontwikkeld heeft in de DWO, de digitale wiskundeomgeving van het Freudenthal Instituut. GeoGebra is daarbij ingezet om contextrijke opdrachten te creëren waarin leerlingen zowel het eindantwoord kunnen laten zien als de stappen hoe ze tot dat antwoord gekomen zijn.

Moderne Wiskunde vindt ICT belangrijk omdat het een belangrijk hulpmiddel is om inzicht te vergroten. Daarnaast maakt ICT het mogelijk om aan te sluiten bij verschillende leerstijlen van leerlingen en extra oefenmateriaal aan te bieden.

Allereerst staan we stil bij wat de DWO en GeoGebra zijn en waarom *Moderne Wiskunde* voor deze combinatie kiest. Vervolgens motiveren we onze keuze voor GeoGebra bij wiskunde A. Daarna geven we enkele voorbeelden van het ontwikkelde lesmateriaal. We sluiten af met onze ervaringen en hopen dat dit artikel docenten aanmoedigt om zelf opdrachten te ontwerpen.

Dwo en GeoGebra

De DWO biedt scholen een platform om leerlingen digitale wiskundeactiviteiten aan te bieden en hun resultaten te monitoren. Wie de DWO wil zien, surft naar www.fi.uu.nl/dwo; wie over de DWO wil lezen, pakt vorige afleveringen van dit blad of surft naar www.wisweb.nl.

GeoGebra is gratis software voor geometrie en algebra waarmee leerlingen en docenten zelf aan de slag kunnen. GeoGebra wint al jaren aan populariteit. Veel docenten hebben voor wiskunde B-materiaal ontwikkeld en ook de uitgeverijen hebben geïnvesteerd in lesmateriaal met GeoGebra. Op internet is veel mate-

riaal te vinden in alle talen van de wereld, bijvoorbeeld via www.geogebra.org.

De DWO is zowel een leeromgeving voor leerlingen en studenten als een auteursomgeving. Creatieve docenten, professionele ontwikkelaars en auteursteams voor uitgeverijen werken daarin aan nieuwe ICT. Het Freudenthal Instituut heeft een overeenkomst afgesloten met Noordhoff voor het gebruik van de DWO-software. Binnen deze overeenkomst maken de ICT-auteurs van *Moderne Wiskunde* gebruik van de DWO-auteursomgeving en exporteren hun leereenheden naar de leeromgeving van Noordhoff. In het auteursteam hebben we onze krachten gebundeld om voor ieder boek en ieder hoofdstuk leereenheden (applets) te ontwikkelen. In dit artikel sporen we creatieve docenten aan om in de DWO zelf applets te maken waarin GeoGebra geïntegreerd is.

Moderne Wiskunde kiest voor de DWO omdat het een van de meest geavanceerde wiskundeomgevingen is waarin haar auteurs zelf wiskundeopdrachten kunnen maken. Belangrijk is dat leerlingen opdrachten op dezelfde manier als in hun schrift kunnen maken en bijvoorbeeld een vergelijking in stapjes kunnen oplossen. De keuze viel op GeoGebra vanwege de functionaliteit en de verwachting dat GeoGebra lang genoeg meegaat om investeringen rendabel te maken.

GeoGebra voor wiskunde A

GeoGebra is bij veel bovenbouwdocenten bekend als constructietool voor meetkunde. Wij hebben GeoGebra juist ingezet bij wiskunde A. Met GeoGebra hebben wij kansbomen, wegendiagrammen, toenamedia-grammen, grafieken, logaritmisch papier, trendlijnen, boxplots, staafdiagrammen en grafieken van normale verdelingen gemaakt. Dit zijn typische wiskunde A-onderwerpen. Voor wiskunde B hebben we ruimtefiguren gemaakt en ook enkele meetkundeconstructies. Voor zowel A als B geven we voorbeelden, maar eerst enkele opmerkingen over ontwerpprincipes.

Ontwerpprincipes

Variabel

Twee ontwerpprincipes brachten ons tot DWO en GeoGebra. Allereerst willen we dat leerlingen samenwerken op het niveau van aanpak en strategie, maar niet de antwoorden van elkaar overschrijven. Daarom willen we geïndividualiseerde opdrachten aanbieden. Iedere leerling krijgt dezelfde opdracht maar met andere getallen. Tweede principe is dat we de leerling de kans willen geven om de opdrachten opnieuw te maken: zelfde contexten, maar andere getallen.

De DWO ondersteunt dit met parametrisatie: iedere DWO-gebruiker krijgt andere getallen. Bovendien biedt de DWO de mogelijkheid om nieuwe opdrachten te genereren. Technische consequentie is dat ook de bijbehorende ruimtefiguren, diagrammen en grafieken parametriserbaar moeten zijn opdat de illustratie aansluit bij de opdrachtformulering. Dankzij de interface tussen de DWO en GeoGebra is dit mogelijk.

Dynamisch

Derde ontwerpprincipe is dat constructies dynamisch zijn. We willen dat leerlingen zelf hun eigen constructies uitvoeren. Hieronder staan voorbeelden van opdrachten waarin leerlingen een deellijn construeren voor wiskunde B, of een boomdiagram of trendlijn bij wiskunde A. GeoGebra biedt die constructiemogelijkheden. Daarom hebben wij gekozen voor GeoGebra als ontwikkeltool binnen de DWO.

Hoofdvensters en rekenvensters

We willen dat een activiteit van tien opdrachten een oplopende moeilijkheidsgraad heeft. Op het eerste scherm verschijnt een makkelijke opdracht en staat GeoGebra prominent in beeld. Bij lastige onderwerpen bieden we zelfs dropdownmenu's, sleep- of selectieobjecten aan. Het goede antwoord staat dan al klaar en kan de leerling onmogelijk ontgaan. Ook bieden we popup-rekenvensters aan waarin de leerling stap voor stap naar het eindantwoord kan toewerken.

Ook willen we een afnemend niveau van ondersteuning. Bij de derde of vierde opdracht staat GeoGebra niet langer op het hoofdscherm maar in het rekenvenster. De laatste opdrachten moet de leerling helemaal zelf doen zonder ondersteuning van GeoGebra of rekenvensters. Uiteraard zijn de tussenstappen in de rekenvensters niet verplicht en leveren ze geen punten op. De leerling verdient alleen punten op de opdrachten van de hoofdschermen. De leerling die het onderwerp beheerst, pakt dus op het hoofdscherm alle punten en is vlug klaar, terwijl de leerling die moeite heeft met de lesstof de gelegenheid krijgt om alle pop-ups door te werken.

Voorbeelden

Aan de hand van drie voorbeelden laten we zien hoe onze keuze voor GeoGebra uitpakt:

- Constructie van de deellijn;
- Systematisch tellen;
- Grafiek met trendlijn.

GeoGebra is een open constructietool waar je oneindig veel kanten mee op kunt. Voor leerlingen is het programma GeoGebra daardoor net iets te veelzijdig. Ze zien een uitgebreide knoppenbalk en een uitgebreid menu. Gelukkig zijn er mogelijkheden om GeoGebra in te perken. Daardoor kunnen we leerlingen een zinvolle constructieomgeving aanbieden zonder constructievensters, eigenschappenvensters en algebravensters. Die hebben we uitgezet, want die leiden alleen maar af.

In het eerste voorbeeld zijn we dicht bij de standaardmogelijkheden van GeoGebra gebleven. Wel maken we hier gebruik van de nakijkoptie van de DWO. In het tweede en derde voorbeeld werken leerlingen met bekende wiskunde A-objecten als boom- en wegendiagrammen en creëren daarmee hun eigen constructies.

Voorbeeld 1: constructie van de deellijn

We beginnen met een meetkundevoorbeeld om de toegevoegde waarde van de combinatie DWO en GeoGebra te demonstreren. We willen dat een leerling direct feedback krijgt op zijn meetkundige constructie. GeoGebra kan die feedback (nog) niet geven, maar de DWO wel. Vanuit de DWO kunnen we een GeoGebra opdracht aanbieden, direct laten nakijken en opslaan.

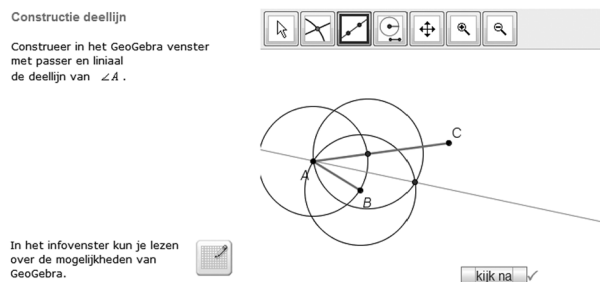


fig. 1

In de schermafbeeld hierboven is de opdracht om een deellijn te construeren. Het scherm opent met drie punten A , B en C en de lijnstukken AB en AC . De schermafbeeld laat zien dat de leerling de juiste cirkels getekend heeft en de juiste punten heeft gezet, op de knop 'kijk na' heeft gedrukt, en een groene vink kreeg. Deze leerling heeft het goed gedaan. De DWO slaat de opdracht met de gemaakte constructie op. Als een leerling of docent op een later tijdstip naar het werk terugkeert, krijgt hij precies te zien wat de leerling gedaan heeft. De feedback gaat net iets verder dan alleen de groene vink: ook wordt de deellijn groen

gekleurd en foute objecten worden rood gekleurd. Dit vinden wij de toegevoegde waarde van de combinatie DWO en GeoGebra.

De ervaren GeoGebra-gebruiker zal het zeker opvallen dat het menu en de invoerregel ontbreken en dat de knoppenbalk ingeperkt is. Zo ontbreekt de knop 'deellijn' en ook het commando Deellijn[] kan niet ingetypt worden. De leerling kan alleen maar cirkels en lijnen tekenen en snijpunten benoemen, precies zoals het hem in het boek geleerd is.

Bovenstaand voorbeeld is de eerste interactieve GeoGebra-applet die onze leerlingen te zien krijgen. Daarom hebben we extra informatievensters met uitleg over GeoGebra en de aanpak toegevoegd.

Voorbeeld 2: systematisch tellen

Nu gaan we verder met wiskunde A-onderwerpen. Systematisch tellen is voor veel 4 HAVO- en 4 VWO-leerlingen een lastig onderwerp. Daarom willen we opdrachten geven die verder gaan dan vragen naar een eindantwoord. We zochten naar een vorm van ondersteuning die een leerling de ruimte geeft om zijn eigen voortgang te volgen.

Competitie

Een voetbalteam heeft het competitiejaar bijna achter de rug. Bij voetbal kan elke wedstrijd worden gewonnen (w), verloren (v), of er kan worden gelijkgespeeld (g). Het team moet nog 4 wedstrijden spelen.

Het aantal verschillende mogelijkheden is in totaal .

Als de eerste wedstrijd gelijkgespeeld wordt dan is het aantal verschillende mogelijkheden in totaal .

De eerste wedstrijd wordt niet gelijkgespeeld en de tweede wedstrijd wordt gewonnen.

Het aantal verschillende mogelijkheden is nu .

Je kunt een telmodel gebruiken. 

fig. 2

We verlangen dat de leerling het praktisch nut van dobbelsteendiagram, rooster, boomdiagram, wegendiagram en faculteitsboom inziet. We geven daarom de leerling de vrije keuze: hij mag zelf een telmodel kiezen. Vervolgens moet hij het gekozen diagram correct construeren. Pas als het diagram juist ingesteld is, krijgt hij als beloning de getallen en bijschriften die horen bij de opdracht. Met een statisch plaatje lukt dit niet, maar een GeoGebra-applet kan zo gemaakt worden dat bepaalde teksten pas dan zichtbaar zijn als aan zekere voorwaarden is voldaan. Ook kan met kleuren feedback gegeven worden.

In figuur 2 staat een opdracht voor 4 HAVO-wiskunde A. In figuur 3 is het wegendiagram nog niet volledig ingevuld, maar in figuur 4 heeft de leerling het wegendiagram goed en zijn dus als beloning de bijschriften zichtbaar.

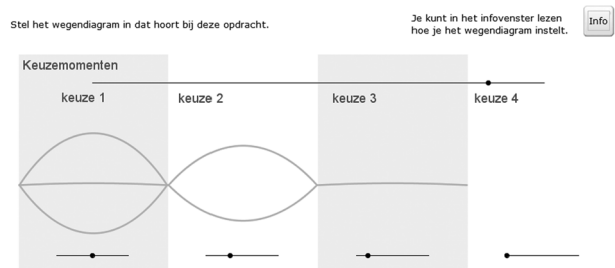


fig. 3

De leerling die de stof beheerst, typt direct de juiste antwoorden in en krijgt de volle punten. De leerling die extra ondersteuning wil, klikt op de button en kiest dat telmodel dat volgens hem bruikbaar is.

De leerling kan zelf de GeoGebra instellen door de schuifbalken in de juiste positie te zetten. Die schuifbalken stellen hoge eisen aan het ontwerp. De ontwerper moet een leerlingbestendige (*monkey-proof*) GeoGebra maken die altijd blijft werken ongeacht de instellingen van de schuifbalken. Bovendien leest bijna geen leerling de instructies, dus moet de GeoGebra voor zichzelf spreken.

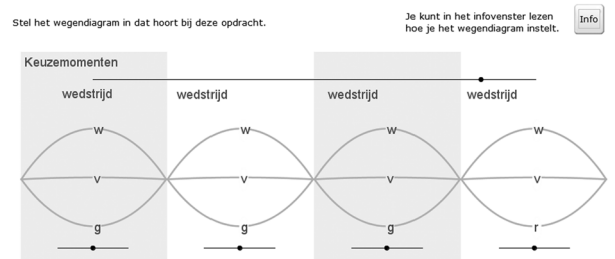


fig. 4

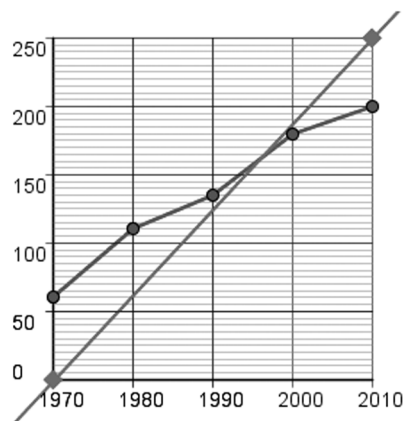
In figuur 4 heeft de leerling het wegendiagram correct ingesteld en krijgt als feedback de bevestiging dat iedere wedstrijd een keuzemoment is met drie mogelijkheden: w = winnen, v = verliezen of g = gelijk spelen. Nu mag de leerling zelf de berekening afmaken op het hoofdscherm.

Voorbeeld 3: grafieken

Voor de onderwerpen interpoleren, extrapoleren en trend hebben we een GeoGebra-applet gebouwd die bij iedere context de bijbehorende grafiek toont. Een leerling moet weten wat het begrip 'trend' is, maar leert niet om eraan te rekenen. We leren ze om een lijn te tekenen die ongeveer goed is en vervolgens punten af te lezen op die lijn. Een voorbeeld van een opdracht staat in figuur 5. De leerling kan daar zelf de trendlijn in de goede positie brengen en krijgt dan als feedback de coördinaten van twee punten op die trendlijn. In figuur 5 moet de trendlijn nog goed ingesteld worden en in figuur 6 staat de trendlijn goed.

Trends in Moord en Doodslag

Hiernaast staat een grafiek met aantal slachtoffers van moord tussen 1970 en 2010.



Bij het punt op de trendlijn voor 2010 hoort de waarde .

Als de trend zich voortzet is in 2017 het aantal slachtoffers van moord opgelopen tot .

Je kunt het rekenvenster gebruiken om te extrapoleren.



fig. 5

De serie opdrachten bij dit hoofdstuk is gevarieerd opgebouwd met een toenemende moeilijkheidsgraad. In de eerste opdrachten zijn de coördinaten van de punten eenvoudig af te lezen, daarna komen makkelijke interpolaties met makkelijke coördinaten, maar aan het eind komen extrapolaties met minder makkelijke coördinaten. Daarom worden daar de af te lezen getallen als feedback teruggegeven opdat een leerling met de juiste getallen verder rekt.

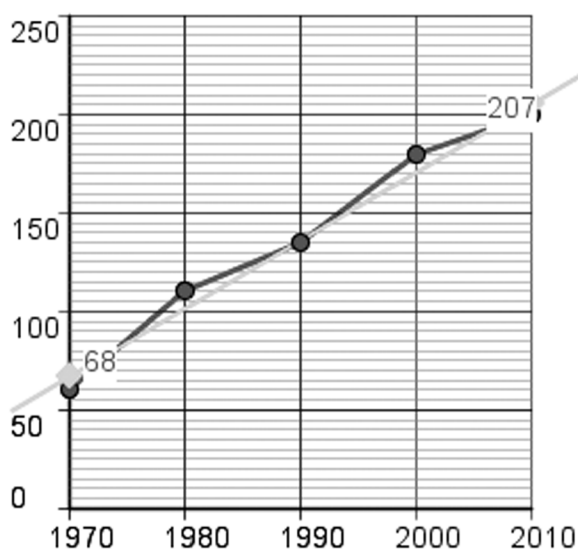


fig. 6

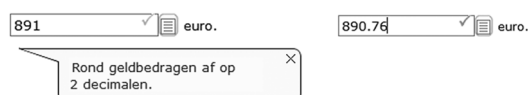
Nog even een technisch detail om duidelijk te maken waar een ontwerper tegenaan loopt. GeoGebra staat een zekere marge in de nauwkeurigheid van positioneren toe. Enerzijds vonden we 'ongeveer goed' goed genoeg en anderzijds kan GeoGebra niet exact werken omdat de muispositionering pixelgebonden is. Probeer maar eens met een muis een punt tussen twee pixels aan te wijzen!

Ervaringen van auteurs

Tot slot delen we graag enkele van onze ervaringen. Van de lessen die wij geleerd hebben tijdens ons ontwikkelwerk, kunnen ook anderen profijt hebben. De eerste gaat over puntenaftrek (niet doen), de tweede over feedback (wel doen) en de derde over testen (een ongeluk zit in een klein hoekje).

Leerlingen die uit eigen beweging (al dan niet na enige aandrang) vaardigheden oefenen, willen zichzelf, hun ouders en hun docent laten zien dat ze uiteindelijk de opdrachten met succes gemaakt hebben. Onze ervaring met vaardigheidstraining is dat puntenaftrek voor iedere gemaakte fout zeer demotiverend is. Bovendien ziet de docent niet het verschil tussen een leerling die nul punten heeft omdat hij niets gedaan heeft en een leerling die nul punten heeft omdat hij eerst alles fout deed, maar later alles goed. Tip is om bij het oefenen van vaardigheden geen puntenaftrek te doen.

Tweede tip is om antwoordmodellen te voorzien van specifieke feedback. Leerlingen stellen het zeer op prijs als ze een hint krijgen waarom hun antwoord fout is (of nog niet goed genoeg). Denk aan opdrachten waar afgerond moet worden op een bepaald aantal decimalen. Wij hebben ervoor gekozen om niet-afgeronde uitkomsten niet goed, maar ook nooit fout te rekenen.



Hierboven staat een voorbeeld uit een opdracht voor 4 HAVO A. Opdracht is om uit te rekenen hoeveel een fiets zonder BTW kost als de prijs inclusief BTW € 1060,00 is. De berekening $1060/1,19$ vinden wij niet fout, maar ook niet goed. Daarom een gele vink. Wie

afrondt op € 891 krijgt als feedback dat geldbedragen afgerond moeten worden op twee decimalen. Ook hier zetten we geen rood kruis, maar een geel. Alleen het juiste antwoord € 890,76 verdient een groene vink.

Derde tip is om applets uitvoerig te laten testen door collega's en leerlingen. Parametrisatie kan leiden tot onvoorziene situaties. Zo kregen leerlingen in een applet vol goniometrische vergelijkingen per abuis de opdracht om $f(x) = 0$ te differentiëren met de kettingregel. De tussenstappen van het antwoordmodel waren daar niet tegen bestand. Het advies is om applets door tientallen leerlingen te laten testen. Voor een ontwerper mag de tekst eenduidig zijn, maar voor leerlingen toch ambigu. Leerlingen van de eenentwintigste eeuw hebben meer te

lezen dan ooit. Instructieschermen worden overgeslagen en voorbeelden ook. Test daarom uit of de GeoGebra's vanzelfsprekend en monkey-proof zijn. Wij hebben ervoor gekozen om leerlingen te betalen om ons hun mening te geven en om voor ons testverslagen te schrijven.

*Henk Hietbrink
Marc de Hoog
Sjeng Greefkens
Evelien Vuijk
Guido van der Waals*

N.B.

Enkele van de genoemde GeoGebra-applets zijn beschikbaar via www.fi.uu.nl/wiskrant.