Complexe getallen worden gebruikt in de elektrotechniek: de impedantie, de weerstand bij wisselstromen, van schakelingen met spoelen en condensatoren kan er mee berekend worden. Maar wat is er dan zo imaginair aan wisselstromen? **Aad Goddijn** en **Ton van der Valk** lieten dat zien aan de leerlingen van het Junior College te Utrecht en laten ons meekijken middels onderstaand relaas.

Wisselstromen met en zonder imaginaire machten

Elektrische schakelingen als inspiratie voor complexe getallen

Ho, ho, dat gaat zo maar niet!

Alsof ik op heterdaad betrapt staande werd gehouden door politie of erger: "Maar dat kunt u toch zo niet doen met e . Tot de tweede, oké, en de wortel kan ook. Maar e tot de i -de? Hoe wou u dat dan dóen?" Mijn standpunt was dat we twee rekenregels voor de gewone e-machtfuncties (e^{ct}) hebben,

$$\mathrm{e}^{ca} \cdot \mathrm{e}^{cb} = \mathrm{e}^{c(a+b)} \text{ en } \frac{d}{dt}\mathrm{e}^{ct} = c \cdot \mathrm{e}^{ct},$$

en dat we zien dat de uitdrukking voor een draaiend punt op de eenheidscirkel in het complexe vlak

$$P(t) = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

zich ook volgens zulke regels gedraagt. Kijk maar, de eerste rekenregel is nu

$$\begin{aligned}&(\cos(\omega a) + i\sin(\omega a)) \cdot (\cos(\omega b) + i\sin(\omega b))\\ &\quad = \cos(\omega(a+b)) + i\sin(\omega(a+b))\end{aligned}$$

en volgt direct uit de definitie van complex vermenigvuldigen (in dit artikel kom ik er nog op terug hoe dat aangepakt is) en de tweede loopt hier als volgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P(t) &= \frac{d}{dt}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))\\ &= -\omega\sin(\omega t) + i\omega\cos(\omega t)\\ &= i\omega(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))\\ &= i\omega P(t)\end{aligned}$$

Dit rekenwerk is voorbereid en onderbouwd, ook dat met die afgeleide van het bewegend punt. Dit loopt goed in deze 6 VWO-klas; de raspaardjes van de klas (Olympiadegangers) kijken niet op van hun werk, zelfs niet verveeld.

Bij de regel over differentiëren van $P(t)$ lijkt het op e - machten, waarbij we met met $c = i\omega$ werken. Ik stel de klas dus voor dat we ter afkorting dit opschrijven:

$$\cos(\omega t) + i\sin(\omega t) = \mathrm{e}^{i\omega t}$$

Nou, nee, dát kon echt niet. Ik zou dan twee verschillende e 's gebruiken, een voor de gewone e^{x} , een voor deze nieuwe $\mathrm{e}^{i\omega t}$ in deze situatie. Zo'n felle leerling zet mij ook in vuur en vlam en het gesprek werd te veel een-een; er wordt afgehaakt door andere leerlingen. "Ze heeft wel een punt hoor, respecteer dat, er valt van te leren". Dat hielp niet...

Intussen besefte ik dat de natuurkundecollega waarmee ik de lessencyclus samen uitvoer, volgende week verder moet; hij gebruikt dan imaginaire machten bij elektrische schakelingen met condensatoren, spoelen en wisselspanningen. De leerling in kwestie zegt het na de les glashelder: "Wij denken bij e aan een getal. Zoiets als 2,7182. U denkt bij die dingen veel meer aan een functie, waar u meer mee wilt dan wij nu snappen."

Ik beschouwde het hier beschreven voorval achteraf als een goed teken. De noodzakelijk wiskundige technieken voor het gebruiken van complexe getallen bij elektrische schakelingen hebben we bereikt en er ligt een kritische vraag over de fundering van een onderdeel van het geheel. Wat wil je als docent/auteur nog meer? Dat onderdeel blijkt straks trouwens goed omzeilbaar.

Waar was dat? Wat moet de lezer weten?

De discussie speelde zich af in een klas van het Junior College in Utrecht, waar pittig exact gemotiveerde leerlingen uit de omgeving Utrecht samen hun bètavakken doen. De module heet *Complexe Stromen*, waarin natuurkunde en wiskunde samen opgaan. We bouwen de theorie van beide vakken wederzijds ondersteunend op voor wiskunde D en NLT.

Dat eist wat natuurkundige voorkennis, ook van de *Nieuwe Wiskrant*-lezer. Ik verwacht dat die bij 'de wet van Ohm' direct aan weerstand R, spanning U en stroom I denkt, met $U = I \cdot R$ en deze schakeling herkent als een vorm van een spanningsdeler[1] waarin de uit- en ingangsspanning zo samenhangen:

$$G = \frac{U_{uit}}{U_{in}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

G is de versterkingsfactor, die hier kleiner dan 1 is. Verdere natuurkundekennis pikt u al lezend wel op!

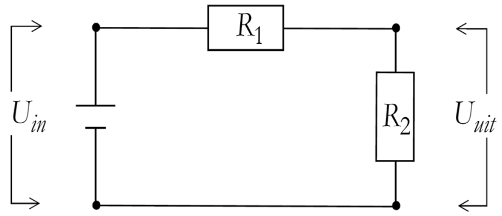


fig. 1 Spanningsdeler.

De grote lijn in het geheel

Het startpunt van de module *Complexe Stromen* is de observatie dat schakelingen waarin condensatoren en/of spoelen zijn opgenomen, fundamenteel ander gedrag vertonen dan die met alleen weerstanden.

Zo kun je bij de spanningsdeler van zoëven de spanningen over beide weerstanden meten en vaststellen dat ze samen gelijk zijn aan de ingangsspanning. Vervang nu eens de weerstand R_2 door een condensator (C in de onderstaande figuur, met het symbool —||—); een condensator is ook een ding met twee draadjes aan de einden, zo dadelijk meer hierover. Als we ons tot een gelijkspanningsbron beperken, loopt er geen stroom door de schakeling, op een sneluitdovend inschakelverschijnsel na. Maar zetten we een (sinusvormige) wisselspanning op de ingang van de schakeling, dan loopt er wél een stroom.

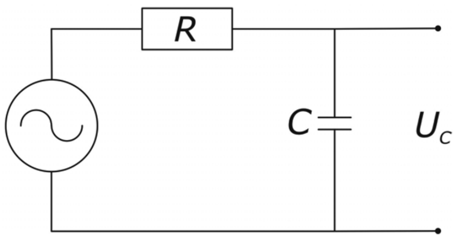


fig. 2 RC-circuit met wisselspanningsingang.

Meten we de spanningen met een gewone multimeter, dan tellen de deelspanningen over R en C *niet* op tot de ingangsspanning. Zo'n meter meet in feite de RMS van het signaal; *Root Mean Square*: de wortel uit het gemiddelde van het kwadraat van de spanning. Met verfijnder apparatuur kunnen we ook de spanningen als verlopend in de tijd laten zien.

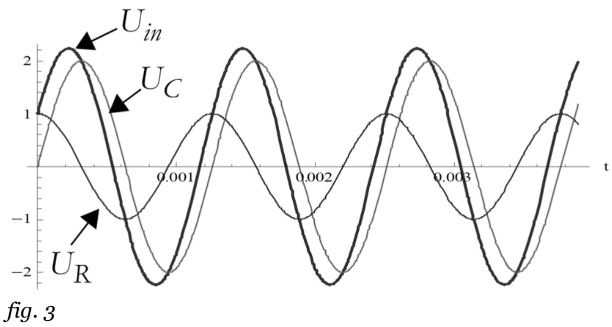


fig. 3

Het grootste signaal (in amplitude) is hier wél de som van de twee andere signalen[2]. In de nulpunten van U_C en U_R is dat goed te zien; kijk maar hoe de snijpunten van U_{in} met de ene van U_C en U_R precies liggen bij de nulpunten van de andere van U_C en U_R. U_C en U_R zelf liggen (op de amplitude na) als cosinus en sinus ten opzichte van elkaar, we zeggen: ze lopen een kwartperiode uit fase. De kleinste twee amplituden van de drie spanningen zijn niet samen gelijk aan de grootste, maar er is wel een ander verband: de kwadraten van die twee amplitudes zijn samen gelijk aan het kwadraat van de derde amplitude. Een Pythagoras-achtig verband!

De kern van de aanpak in de module is dat we het faseverschil als een meetkundige hoek gaan interpreteren, en dat de gevonden relatie van het Pythagorasverband tussen de spanningen dan samenhangt met – inderdaad – die rechte hoek. Daartoe gaan we een sinusvormig signaal consequent opvatten als zijaanzicht van een eenparige cirkelbeweging, als van een draaiende molenwiek. Hierin is de hoogte van de wiekpunt een metafoor voor de spanning. Hoeken tussen verschillende wieken zijn dan de faseverschillen tussen de diverse signalen. We verrijken – in gedachten – het signaal als het ware met een extra dimensie die ruimte geeft voor meer *richtingen* dan alleen hoog en laag. De bijhorende verrijking van onze gewone (reële) getallen spoort daarmee: we maken getallen die alle *richtingen* in het platte vlak kunnen hebben, dus niet alleen de negatieve en de positieve *richting* op de reële rechte lijn. De introductie van de complexe getallen die dat oplevert, is als het ware geïnspireerd door de natuurkundige instap. De opbouw heeft een duidelijk meetkundig accent, dat zal blijken, maar leidt naar precies dezelfde complexe getallen als een meer algebraïsche opzet doet.

In dit artikel wordt deze aanpak op een aantal punten nader geconcretiseerd; we beginnen met een stukje theorie over de werking van de condensator, want de schakeling van figuur 2 is het (concrete) uitgangspunt vanwaar we binnenkort bij de (abstracte) complexe getallen gaan aankomen. Een vollediger uitwerking staat in het lesmateriaal van de module zelf.

De condensator in een notendop

fig. 4 Condensator en ladingverdeling.

Een condensator bestaat in principe uit twee platen, waar de spanningsbron een lading op zet. Dat geldt ook voor condensatoren die kleiner zijn dan het in figuur 4 afgebeelde museumexemplaar.

Op de ene plaat van de condensator zitten dan meer of minder elektronen dan op de andere; zie de rechterfiguur. Het verschil levert het elektrisch equivalent van een drukverschil, de elektrische spanning. Grotere lading, grotere spanning; ze zijn evenredig met elkaar. Als de lading grootte Q heeft (in coulomb) en de spanning sterkte U (in volt) geldt voor een condensator met *capaciteit* C (die alleen van de condensator afhangt) de gelijkheid:

$$Q = C \cdot U.$$

Stroom I (in ampère) is verandering (verplaatsing) van lading per tijdseenheid. Bij een condensator is er alleen stroom als de lading verandert, stroom 'door' de condensator ís die verandering:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Daaruit volgt de basisformule voor het verband tussen stroom en spanning bij een condensator:

$$I = C \cdot \frac{dU}{dt}$$

Is nu de spanning een sinusvormige wisselspanning, met amplitude U_0 en frequentie f, dan kan de spanning zo beschreven worden:[3]

$$U(t) = U_0 \sin(2\pi f t).$$

Hier is f het aantal perioden per seconde. $2\pi f$ staat voor aantal *radialen* per seconde; daarbij maken we eigenlijk al de overgang naar hoeken, dat wordt zodadelijk nog veel explicieter gedaan. Het ligt voor de hand $2\pi f$ de *hoekfrequentie* te noemen en een aparte letter aan te reiken: ω. Zodoende:

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

De basisformule over de condensator vertelt ons dan hoe de stroom in de tijd verandert:

$$I(t) = \omega C U_0 \cos(\omega t) = \omega C U_0 \sin(\omega t + \pi/2)$$

De formule laat zien dat de condensator graag signalen met een hoge frequente 'doorlaat' en dat de *stroom* door de condensator een kwartperiode vóór ligt op de *spanning* over de condensator. De amplitude I_0 van de stroom voldoet aan

$$I_0 = \omega C U_{0,C}.$$

Dit is allemaal even wennen voor de leerlingen als ze het nog niet gezien hebben, vooral dat de geïsoleerde platen van de condensator tóch stroom lijken door te laten, maar grote problemen zijn er eigenlijk niet. Ook niet met het feit dat een kwart periode vóór liggen hetzelfde is als driekwart periode achter lopen. Het is wel van belang daar even expliciet aandacht aan te besteden, het is immers een terugkerend fenomeen, ook in de wereld van de complexe getallen.

Het begrijpen van een spoel is in natuurkundig opzicht lastiger; omdat dit de *Nieuwe* Wis*krant* is, gaan we hier niet op in en beperken we ons hoofdzakelijk tot het aangeven van de wiskundige lijn.

Optellen van sinusoïden in het RC-circuit

Aan de hand van een analyse van de RC-schakeling in figuur 2 blijkt nu hóe de natuurkunde tot een specifieke introductie van complexe getallen inspireert. In het circuit loopt in de weerstand en de condensator *dezelfde* stroom I, maar er zijn *verschillende* spanningen U_R en U_C die samen op elk moment U_{in} zijn. Die zijn allemaal tijdafhankelijk als er wisselspanning op de ingang staat, hebben dezelfde hoekfrequentie ω, maar er zijn wel faseverschillen.[4] De amplituden geven we aan met I_0, $U_{0,R}$, $U_{0,C}$ en $U_{0,in}$. Het probleem: vind de juiste verhoudingen van de amplituden en de faseverschillen. I loopt een kwart periode vóór op U_C en omdat I en U_R wel met elkaar in de pas zijn, ligt U_R een kwart periode op U_C voor. De verhouding tussen de amplituden $U_{0,R}$ en $U_{0,C}$ laat zich ook redelijk makkelijk bepalen vanuit de wet van Ohm in de weerstand, dus $U_{0,R} = I_0 R$, en de formule voor amplitude van de stroom door de condensator,

$$I_0 = \omega C U_{0,C}.$$

Samengenomen:

$$\frac{U_{0,C}}{U_{0,R}} = \frac{1}{\omega R C}$$

Mooi resultaat, maar we zoeken eigenlijk de verhouding van de amplituden van de ingansspanning en de spanning over de condensator, versterkingsfactor

$$G(\omega) = \frac{U_{0,C}}{U_{0,in}}$$

en ook nog het faseverschil tussen U_C en U_{in}. Op zulke momenten vraagt de natuurkundecollega: "Hoe tel je dat op tot een nieuwe sinusvormige spanning, die uit fase lopende sinusvormige spanningen?"

In de module sluiten we hier in een meer wiskundig deel aan bij bekende beelden, het reuzenrad of de windmolen, voor het verband tussen cirkelbeweging en sinusoïden. Waar het nu om gaat is, dat beeld te gebruiken bij het optellen van twee signalen met dezelfde hoekfrequentie, maar met verschillende amplitude en fase. De algemene stelling is, dát twee van zulke signalen samen een derde van dezelfde soort vormen, en de aan het bewijs ten grondslag liggende constructie levert de verhouding van de amplituden en het faseverschil, via een meetkundig diagram. Het bewijs loopt als volgt.

We 'verrijken' de signalen, opgevat in de y-richting

$$A_1 \cdot \sin(\omega t + \phi_1) \text{ en } A_2 \cdot \sin(\omega t + \phi_2)$$

met een tweede component, opgevat in de x-richting

$$A_1 \cdot \cos(\omega t + \phi_1) \text{ en } A_2 \cdot \cos(\omega t + \phi_2).$$

Zo ontstaan de draaiende punten

$$Q_1(t) \text{ en } Q_2(t).$$

Componentsgewijs optellen verschijnt in figuur 5 als vectoroptelling. We moeten de figuur wel zien als een momentopname in een doorgaande draaibeweging met hoek*snelheid* ω om 0! De hoek tussen de pijlen Q_1 en Q_2 is vast, die is $\phi_2 - \phi_1$. Ze draaien samen in deze stand rond, en de sompijl Q_3 draait mee met de anderen.

Dat betekent dat de beweging van punt Q_3 óók met een sinus- en een cosinuscomponent beschreven kan worden en dat er dus getallen A_3 en ϕ_3 bestaan, zó dat:

$$\begin{aligned} A_1 \cdot \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \phi_2) \\ = A_3 \cdot \sin(\omega t + \phi_3) \end{aligned}$$

Bonus: de analoge bewering voor de cosinus.

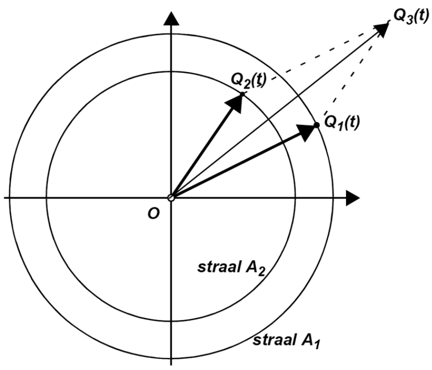


fig. 5 Draaiende vectoren en hun som.

Als we eenmaal weten dat zo'n voorstelling van het somsignaal bestaat, kunnen A_3 en ϕ_3 in voorkomende gevallen berekend worden; dat wordt in de module ook geoefend. Het algemene geval kan gekraakt worden met de cosinusregel. Echt nodig is dat niet, omdat we in de introductiefase in de module (met het RC-voorbeeld) het loodrechte geval gebruiken en later het algemenere resultaat via de complexe getallen kunnen berekenen.

In het geval van de RC-schakeling maakt een Geogebra-applet dit beeld dynamisch. De pijlen op de y-as zijn de werkelijke op-en-neer gaande spanningen, de andere pijlen wijzen naar de over cirkels draaiende bijhorende punten en hebben als lengte de bijbehorende amplituden $U_{0,R}$, $U_{0,C}$ en $U_{0,in}$.

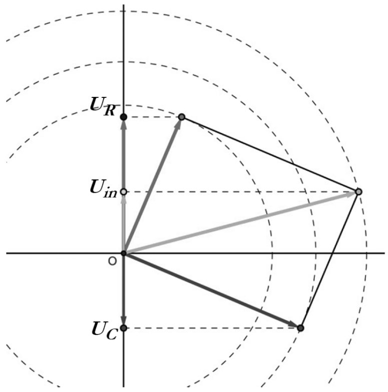


fig. 6 Samendraaiende spanningen in de RC-schakeling.

Het draaiende parallellogram is hier een draaiende rechthoek omdat het faseverschil tussen U_R en U_C een kwart periode is. We kennen al verbanden tussen de amplituden I_0, $U_{0,R}$ en $U_{0,C}$, namelijk $I_0 = U_{0,R}/R$ en $I_0 = \omega C U_{0,C}$. Daarom kunnen we de versterking en het faseverschil ϕ tussen U_C en U_{in} nu exact bepalen. Uiteindelijk volgt met – daar is hij dan – de stelling van Pythagoras

$$U_{0,in}^{\ \ 2} = U_{0,R}^{\ \ 2} + U_{0,iC}^{\ \ 2}$$

en een nadere analyse van de figuur leidt tot resultaat

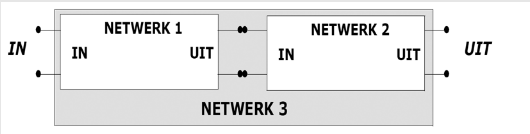
$$G(\omega) = \frac{U_{0,C}}{U_{0,in}} = \frac{1/(\omega C)}{\sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

$$\tan\phi = -\frac{U_{0,C}}{U_{0,in}} = -\omega RC$$

(Zo'n samenwerking als in deze module van natuurkunde en wiskunde biedt ruim gelegenheid voor het gebruiken en beoefenen van algebra in een nieuwe setting.)

Van versterking met fase naar complex getal

Bij wisselspanningschakelingen met weerstanden, condensator en spoelen (ze worden vaak ook netwerken genoemd), wordt het verband tussen in- en uitgangsspanning volledig beschreven door de versterkingsfactor en de fasedraai samen. Dat duo noemen we de overdracht H van de schakeling. H is een koppel van twee getallen, G en ϕ. Noteer maar als (G, ϕ). Met zulke koppels kunnen we rekenachtige dingen doen, gebaseerd op redeneren aan schakelingen. In principe kan bijvoorbeeld de uitgang van een netwerk de ingang van een nieuw netwerk zijn. Daarover gaat de volgende opgave uit het boek, die we klassikaal bespreken, want dit is core-business.

> Hier is de uitgangsspanning van netwerk 1 de ingangsspanning van netwerk 2.
>
> 
>
>
> Netwerk 1 heeft overdracht (G_1, ϕ_1) en netwerk 2 heeft overdracht (G_2, ϕ_2).
> De gezamenlijke schakeling is netwerk 3.
>
> a. Wat is de versterking van netwerk 3? En het faseverschil tussen in- en uitgang?
> b. Wat is de overdracht van netwerk 3?

Er is geen aarzeling in de klas:

$$(G_3, \phi_3) = (G_1 \cdot G_2, \phi_1 + \phi_2)$$

Want verhoudingsfactoren vermenigvuldig je en draaihoeken tel je op.

Deze relatie geeft een verband tussen drie overdrachten. Overdrachten zijn dimensieloze grootheden: de versterkingsfactor en de fasehoek zijn pure getallen. Deze ‘overdrachten’ laten zich op een natuurlijke manier in het platte vlak plaatsen: het zijn de poolcoordinaten van punten in het vlak. Overdrachten zonder fasedraai (of: met fasedraai gelijk 0) zijn in het vlak de punten van de positieve x-as, die met fase π juist die van de negatieve x-as.

Als we nu de wereld van de schakelingen vergeten, dan houden we een vlak over waarin een extra ‘samenstellingsregel’ voor punten is gebouwd, geïnspireerd op het na elkaar toepassen van overdrachten.

Het is verstandig (en heel eenvoudig) om even na te gaan dat op de bekende x-as de bijzondere combinatie precies de vermenigvuldiging op die x-as is, inclusief de tekenregels. Deze samenstelling van twee complexe getallen, die ontleend is aan het achter elkaar plaatsen van schakelingen heet voortaan uiteraard ‘vermenigvuldiging’ van complexe getallen.

In de klas loopt deze abstractie van schakeling met overdrachten naar complex getal in het complexe vlak heel makkelijk. Vooral omdat we hier natuurlijk eerst even oefenen in het lokaliseren in het vlak, waarbij we voor een complex getal (een niet-negatief getal A met richting ϕ) een (tijdelijke) notatie kiezen: $(A, \phi)_p$. Het kleine p-tje waarschuwt dat het poolnotatie is.

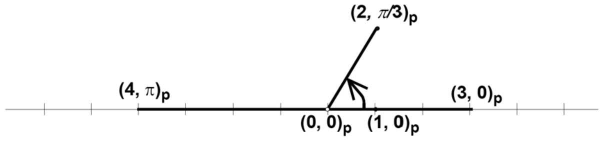


fig. 7 Een stukje complex vlak met complexe getallen in poolnotatie.

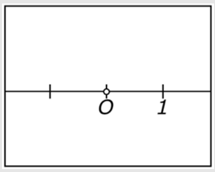
Gewone getallen kunnen we ook in poolnotatie noteren, maar het is wel makkelijk de gewone simpele notatie te behouden. Zo hebben we $1 = (1, 0)_p$ en $-1 = (1, \pi)_p$.

Uiteraard wordt geprobeerd of dit mag: $-1 = (-1, 0)_p$. Nou nee, dat mag niet, want het kan niet. Het eerste getal in het paar is de afstand tot 0 en moet dus positief zijn. Bij het oefenen schuwen we deling en het werken met (natuurlijke) machten niet. Een paar van de oefeningen in het boek bij de module:

> a. $(2, \pi/2)_p \times (3, \pi/4)_p =$
> b. $(1, \pi)_p \times (1, \pi)_p =$
> c. $2, 4\pi/5)_p \times (2, 4\pi/5)_p \times (2, 4\pi/5)_p$
> $\times (2, 4\pi/5)_p \times (2, 4\pi/5)_p =$
> d. In een van de vorige voorbeelden van de vorige opgave staat eigenlijk $(-1) \times (-1) = 1$. Bouw zelf een complex getal dat, met zichzelf vermenigvuldigd, -1 ofwel $(1, \pi)_p$ oplevert.

In deze opgaven zitten belangrijke details opgesloten. Zo lokt opgave c van hierboven de vraag uit of 4π hetzelfde is als 0. Het antwoord is “Ja, als je met 4π een fasehoek bedoelt, anders natuurlijk niet.” Bij opgave d bouwen we een wortel uit -1. Die is er nu dus vanzelf!

Bij de eerste try-out van de module was de volgende opgave in de klas zo’n beetje de eerste na de basale startoefeningen:

> Vind een of meer complexe getallen S die voldoen aan de vergelijking $S^5 = (1, \pi)_p = -1$.
>
> Teken ze hiernaast.
>
> 
>

Het liep gelukkig goed af, maar het had zijn tijd nodig om alle vijf oplossingen te vinden en te ordenen. Er komen dan ook wel veel vragen tegelijk, zoals de vraag over de veelvouden van 2π, en of dat mag met die macht.

Daar is i. Nu verder

De abstractie van overdracht in de schakelingenwereld naar complex getal is gemaakt! De hoofdkenmerken van deze toegangspoort naar de complexe getallen zijn: de vermenigvuldiging staat voorop en eerst wordt in poolnotatie gewerkt.

Het getal i verschijnt daarbij bijna vanzelf, samen met alle complexe getallen tegelijk; in de gedaante van ‘overdrachten’ waren ze er al. Er is geen (geforceerde eenzijdige) afspraak dat i een nieuw getal is waarvan het kwadraat -1 is. Omdat we zo duidelijk een nieuw samenhangend geheel bouwen (het vlak met die uitgebreidere vermenigvuldiging) is de clash met het negatieve kwadraten-taboe niet heftig. Misschien heb ik daarmee de leerling teleurgesteld, die haar keuze voor de module Complexe Stromen motiveerde met: *Ik ben erg benieuwd hoe zoiets vreemds als het getal* i *kan helpen bij het beschrijven van een realistisch natuurkundige situatie.*

De rest van de introductie in de complexe getallen biedt weinig conceptuele problemen, maar bevat wel een hoop details die voor de latere natuurkundige toepassing en ander gebruik van de complexe getallen van belang zijn.

Er is natuurlijk ook een optelling van complexe getallen. Na de vectoren in de introductie met de draaiende spanningen is de vectoroptelling hier de voor de hand liggende. Omdat we 1 en i kennen, kennen we nu ook $1+\mathrm{i}$. De getallen 0, 1 en i, met als afsluiting $1+\mathrm{i}$ vormen een vierkant, en daarom geldt $1+\mathrm{i} = (\sqrt{2}, \pi/2)$. Ook $a+b\mathrm{i}$ heeft een duidelijke betekenis voor reële a en b.

De samenhangen tussen de poolrepresentatie $(A, \phi)_p$ en de cartesische representatie $a+b\mathrm{i}$ komen aan de orde, en uiteraard absolute waarde, argument, geconjugeerden, reëel en imaginair deel, oplossen van enkele typen vergelijkingen. Op al die details ga ik in dit artikel niet in; wie de complexe getallen al kent, weet er alles van. Ik ga nog wel even in op het sterk meetkundige van de gekozen benadering, die vormt namelijk een goede terugkeer naar de schakelingen!

i is een kwartdraai

In figuur 8 zijn de driehoeken $0-1-Z_1$ en $Z_1-Z_2-Z_3$ gelijkvormig.

Het is niet zo moeilijk aan te tonen dat, als we dit als figuur in het complexe vlak zien, geldt:

$$Z_1 \times Z_2 = Z_3$$

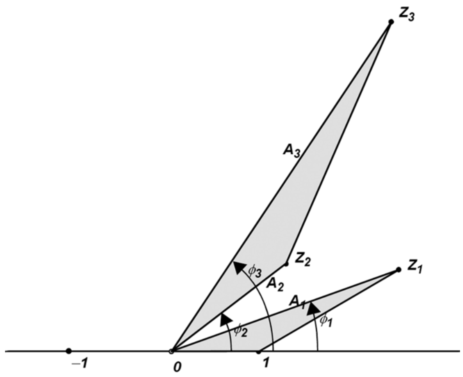
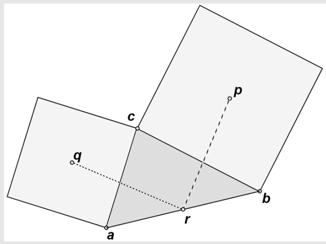


fig. 8 Vermenigvuldigen en gelijkvormigheid.

Dit verband tussen vermenigvuldigen en gelijkvormigheid is van vitaal belang. Op een paar toepassingen ervan gaan we nu even in.

Vermenigvuldigen met een complex getal is meetkundig vermenigvuldigen vanuit 0 met de absolute waarde (de lengte van de pijl) en vervolgens draaien om 0 over het argument. Vermenigvuldigen met i is daarom draaien om 0 over 90 graden. De volgende opgave is pittig, maar zeker instructief:

Stelling van de twee vierkanten



In deze figuur is abc een driehoek, waarbij op de zijden ac en bc naar buiten een vierkant is geplaatst. p en q zijn de middens van de vierkanten en r is het midden van ab. Bewijs dat pr en qr in lengte gelijk zijn en loodrecht op elkaar staan.

Tip voor de lezer: de vector van a naar c is het complexe getal $(c-a)$. De vector van c naar het punt op het linkervierkant tegenover a is dan $\mathrm{i} \times (c-a)$. Dat punt zelf is $c + \mathrm{i} \times (c-a)$. En zo verder, daar komt de lezer wel uit. Echt analytische meetkunde dit. Vertalen van meetkunde naar algebra, even nauwkeurig rekenen, en het resultaat terugvertalen naar meetkunde. Mooi toch?

Nou nee, de raspaardjes wilden het met *echte* (synthetische) meetkunde doen. Ze mochten, en het lukte ze. Schaam je niet lezer, als je daar *niet* uit komt.

De Moivre geldt per definitie

Kiezen we in figuur 8 de punten Z_1 en Z_2 op de eenheidscirkel, dan ligt Z_3 ook op de eenheidscirkel. Als de bijhorende argumenten (dat wil zeggen de hoeken in de poolvoorstelling) α_1, α_2, en $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ zijn, dan is $Z_1 = \cos(\alpha_1) + \mathrm{i}\sin(\alpha_1)$, enzovoort, en volgt direct:

$$(\cos(\alpha_1) + \mathrm{i}\ \sin(\alpha_1)) \times (\cos(\alpha_2) + \mathrm{i}\ \sin(\alpha_2))$$

$$= \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \mathrm{i}\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$$

Uitwerken van de linkerkant via het uit het hoofd te kennen schema $(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = (ab - ac) + (ad + bc)\,\mathrm{i}$ levert dan de bekende somformules voor de cosinus en de sinus.

Ook een condensator vermenigvuldigt met i

De terugkeer naar de schakelingenwereld ligt voor de hand. We vertalen de draaiende pijlen, waarvan de echte spanningen slechts verticaal bewegende schaduwen zijn (figuur 6) naar bewegende pijlen vanuit 0 in het complexe vlak. De draaiende spanning over de condensator in figuur 2 beschrijven we nu met een over een cirkel bewegend complex getal:

$$U(t) = U_0 \cdot (\cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t))$$

Voor de echte spanning kun je het reële deel nemen. Of het imaginaire deel, dat doet er niet veel toe, als je straks bij de stroom maar consequent hetzelfde deel neemt. We kennen de amplitude van de stroom ook, $U_0\omega C$ en we weten dat de stroom een rechte hoek in fase voor ligt. Nu kunnen we zo nodig de formule met een faseverschuiving gaan uitwerken en goniometrisch gaan priegelen. Maar waarom zouden we, we hebben nu i voor de linksdraai over 90 graden:

$$I(t) = \mathrm{i}\omega C \cdot U(t)$$

Ja het staat er nu echt: een complexe stroom. Nemen we aan beide kanten de reële delen, dan hebben we precies de beschrijving van eerder met de verhouding van de amplituden èn de faseverschuiving die vertelt dat de stroom een kwart periode voor ligt. In de complexe 'verrijking' van de situatie is de stroom wél evenredig met de spanning; de evenredigheidsconstante is echter een complex getal, $\mathrm{i}\omega C$. Willen we de analogie met de wet van Ohm voor weerstanden benadrukken, dan schrijven we een evenredigheidsconstante aan de I-kant:

$$U(t) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega C} I(t)$$

Met de complex gemaakte stroom en spanning heeft de condensator nu zijn eigen wet van Ohm gekregen, waarin de rol van de weerstand R vervult. We noemen deze grootheid de *complexe impedantie*[5].

Het berekenen van de overdracht bij de schakeling van figuur 2 is nu net zo eenvoudig als bij de spanningsdeler van figuur 1. Het resultaat

$$H(\omega) = \frac{U_C(t)}{U_{in}(t)} = \frac{1/(\mathrm{i}\omega C)}{R + 1/(\mathrm{i}\omega C)}$$

is algebraïsch net zo opgebouwd als

$$G = \frac{U_{uit}}{U_{in}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

In deze uitdrukking voor H zit de verhouding tussen de amplituden van in- en uitgang als absolute waarde van H en de fasedraaiing als argument van H. De rekenregels van de complexe getallen zetten we in om die twee te vinden. Dat gebeurt dus op het moment dat we de constructie van H achter de rug hebben. Bij die afsluitende rekenfase in dit voorbeeld willen we graag 'i uit de noemer verdrijven', want dan hebben we een complex getal van de vorm $Z = A + B\mathrm{i}$ te pakken, en daarvan weten we de absolute waarde (de afstand tot 0), die is $|z| = \sqrt{A^2 + B^2}$. Voor het argument ϕ geldt – het geval $A = 0$ even uitgezonderd – $\tan\phi = \frac{B}{A}$. Het herschrijven van een breuk zonder een i in de noemer gaat bijvoorbeeld zoals in een van de oefeningen in het boek, via teller en noemer vermenigvuldigen met de geconjugeerde van de noemer. Een leerling demonstreert het hier:

$$\frac{6 + 3i}{2 - i} = \frac{(6 + 3i)(2 + i)}{(2 - i)\cdot(2 + i)}$$

$$\frac{12 + 6i + 6i - 3}{4 - i2 + 2i + 1} = \frac{9 + 12i}{5}$$

$$\frac{9}{5} + \frac{12i}{5} = 1{,}8 + 2{,}4i$$

Voor de volledigheid hier afleiding en resultaat van versterkingsfactor en fasedraaiing:

$$H(\omega) = \frac{1/(\mathrm{i}\omega C)}{R + 1/(\mathrm{i}\omega C)} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega RC + 1}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{i}\omega RC + 1} \cdot \frac{1 - \mathrm{i}\omega RC}{1 - \mathrm{i}\omega RC} = \frac{1 - \mathrm{i}\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \qquad \tan\phi = -\omega RC$$

Een model met een dimensie teveel

Is het nu echt simpeler geworden? Nou nee, niet voor iedereen. Bij een van de try-outs kwam ongeveer ter hoogte van dit type berekeningen een vraag: *Ik heb altijd gedacht dat daar (bij het stopcontact) de elektronen in een soort treintje heen en weer gaan. Hoe zit dat dan met die cirkelbeweging?*

De vraag werd heel plastisch ondersteund met handgebaren. Heen-en-weer, een molentje. De vraag zou eigenlijk ter hoogte van onze figuur 6 gesteld moeten zijn, waar de draaiende spanningen verschijnen, maar dat is niet gebeurd. Het is wel blijven knagen en nu, onder druk van een golf algebra komt de bekentenis naar buiten. Deze leerling verwacht blijkbaar dat een wiskundig model een soort foto van de werkelijkheid is. Vaak is dat ook zo. Je kunt bijvoorbeeld de beweging van een geworpen steen met een kwadratische formule modelleren, en de wiskundige baan (of grafiek) heeft zo'n zelfde boog als de weg die de steen aflegt. Dat klopt, daar staan wiskunde en werkelijkheid schouder aan schouder.

Bij onze draaiende spanningen is dat anders. We hebben een dimensie aan het fenomeen wisselende spanning toegevoegd, waardoor het wiskundig model geen gewoon plaatje van de werkelijkheid meer is. Het model heeft nu een dimensie die in de werkelijkheid niet aanwezig is, of – beter gezegd – niet te zien is. In een tryout met een klein groepje is de allegorie van de grot in Plato's *De Staat* als voorbeeld gebruikt. Alle zes leerlingen (VWO 5 en 6) kenden dat verhaal, deels uit het vak levensbeschouwing, deels uit KCV! Een groep mensen is in een grot opgesloten en ziet alleen schaduwen op een muur. De 'echte' dingen zien ze pas buiten de grot, maar dan willen ze die voorlopig niet echt zien[6].

Het kan wel zonder e, maar...

Terug naar het begin van ons verhaal, de afwijzing van de imaginaire machten van e. Raakte de opmerking over de electronentreintjes de modelleerkant van de aanpak, de kritiek op het gebruik van het symbool e lijkt een aanval op de wiskunde zelf. Toch is dat laatste niet zo. De notatie was geïntroduceerd om de formule

$$\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$$

af te korten tot de inktvlekjes

$$e^{i\alpha}.$$

Zo formuleerde een goedwillende leerling het. Deze e-machtnotatie is kort en suggereert precies de eigenschappen die we nodig hebben. In feite vervangt de notatie de tijdelijke poolnotatie. Maar een conceptuele onderbouwing, in de zin van een echt raakvlak met de e van Euler ontbrak, en daar greep de betreffende leerling op in.

Het gebruik van e^z als functie, nu dus niet als macht, wordt pas echt krachtig als we deze functie volledig opbouwen, dus betekenis geven voor alle complexe getallen z. Dat zou een mooi vervolg en startpunt voor nieuwe wiskunde zijn. Mooi, maar voor later!

In dit artikel is de e-notatie niet echt gebruikt; in het groepje dat Plato's grot kende, is dat precies zo gedaan. De natuurkundedocent liet zich daar inspireren door de voorbeelden waar vermenigvuldigen met i draaien over 90 graden betekende. Dat bleek heel goed uit te pakken. Maar mogelijk proberen we het volgende keer toch weer met $e^{i\alpha}$, mèt de rechte hoek van i èn de grot van Plato.

De feiten over de module Complexe Stromen

De module is bij het Junior College Utrecht ontwikkeld door Aad Goddijn, Joost van Hoof en Ton van der Valk. De module dekt wat de wiskunde betreft het onderdeel complexe getallen van wiskunde D. Wat de natuurkundestof betreft gaat de module veel verder dan het standaard natuurkundeprogramma. De spoel met zelfinductie en resonantie in schakelingen zijn de belangrijkste uitbreidingen.

In de besproken situaties in dit artikel zijn acht middagen van twee en een half klokuur contacttijd aan de module besteed. Binnen de luxe van het ontwikkeltraject zijn steeds wis- en natuurkundedocent bij alle lessen aanwezig geweest. Er is ook met de module gewerkt in een goed afgesproken afwisseling van reguliere natuurkunde- en wiskundelessen en een moedige wiskundedocent heeft de klus alleen geklaard. De module is NLT-gecertificeerd in juni 2010.

Via het Bètasteunpunt Utrecht bereikt u het materiaal direct: http://www.betasteunpunt-utrecht.nl. Kies docenten > vakken > NLT of Wiskunde D. Daar staan leerlingenboek, uitwerkingen van opgaven, docentenhandleiding, practicumhandleiding, ondersteunende powerpointpresentaties en enkele Geogebra-applets. Voor het docentenmateriaal moet toegang gevraagd worden; dat wijst zich op de site vanzelf.

Aad Goddijn,
Freudenthal Instituut for science and mathematics education
Ton van der Valk,
Junior College Utrecht

Noten

[1] Deze spanningsdeler deelt de spanning in naar verhouding van de twee weerstanden. Vaak gaat het bij 'spanningsdeler' om een potentiometer. Daarbij is er één weerstand waarbij de spanning wordt afgenomen tussen een eindpunt en een variabel tus-

senpunt op de weerstand.

[2] Waar wij (wiskundigen) 'functie van t' zeggen, gebruikt de natuurkundige vaak de term 'signaal'.

[3] Hier worden de notaties U en $U(t)$ naast elkaar gebruikt. Bij natuurkundigen is dat heel gewoon.

[4] Inderdaad, we gaan ervan uit dat al de spanningen in de schakeling sinusvormig zijn als de ingangsspanning dat is. In het boek bij de module wordt dit gemeld en in een appendix wordt het aangetoond.

[5] Het gewone begrip impedantie heeft betrekking op de evenredigheid van de amplituden. De evenredigheid in dit geval gaat over de tijdafhankelijke spanning en wisselstroom. Blijkbaar is de complexe impedantie afhankelijk van de frequentie, van ω. Veel toepassingen, zoals hoge- of lagetonenfilters zijn daarop gebaseerd. In de module is daar uitgebreid aandacht voor.

[6] Plato: De Staat, boek VII. Er zijn diverse Nederlandse vertalingen.