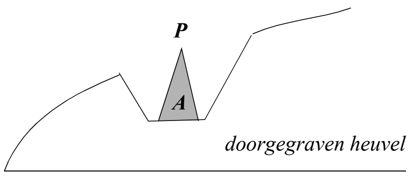
Wat te bewijzen is (52)

Rubriek

Ik begin deze rubriek met het doorvertellen van een waargebeurd verhaal dat ik lang geleden heb mogen vernemen van J.Ph. Steller, in leven docent natuurkundedidactiek. Hij beschreef (in de ik-vorm) een ervaring uit zijn Japanse krijgsgevangenschap.

> De spoorlijn waar wij aan moesten werken was reeds door de Engelsen in kaart gebracht en in het terrein uitgezet. Om de 50 m stond een paaltje in het hart van het tracé. Op dat paaltje stond hoe diep de heuvel moest worden uitgegraven. Die paaltjes moesten daar dus blijven staan tot de spoorbaan op diepte was uitgegraven. Een dwarsdoorsnede van de spoorbaan zag er als volgt uit:

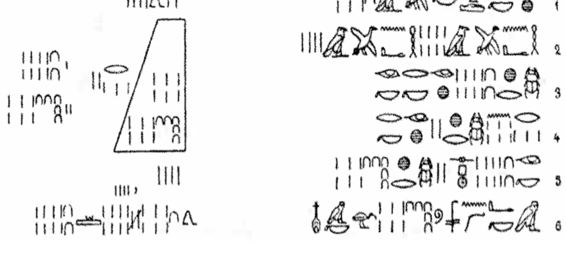


> P is een van de bewuste paaltjes, A is de aarden kegel die was blijven staan voor de ondersteuning van P.
> Onze groep van vijftig man moest toen op zekere dag een aantal van die kegels verwijderen en ik kreeg de delicate opdracht met de Jap te onderhandelen over het aantal kegels, anders gezegd over de inhoud van zo'n kegel. De Jap begon op een papiertje te rekenen en ik keek over z'n schouder mee en zag toen dat deze geniesoldaat de formule voor de inhoud van een cilinder wèl, maar die voor de inhoud van een kegel niet kende....

Het verhaal eindigt ermee dat Steller met behulp van het plaatje van een zijaanzicht de Japanner ervan overtuigde dat de inhoud van de kegel de helft van de cilinder zou zijn, hetgeen een taakverlichting voor hem en zijn medegevangen van 33% tot gevolg had!

De Egyptenaren wisten wel beter

De oeroude Egyptische wiskunde is tot ons gekomen via papyrusrollen. De bekendste daarvan is de papyrus Rhind, maar ook de Moskouse papyrus bevat interessante wiskunde van zo'n vierduizend jaar geleden. Daarin wordt de inhoud berekend van een afgeknotte piramide met een hoogte van 6 'el', een basisvierkant van 4 bij 4 'el' en een bovenvierkant van 2 bij 2 'el'. De hiërogliefen in onderstaande transcriptie vertellen hoe dat werd aangepakt:

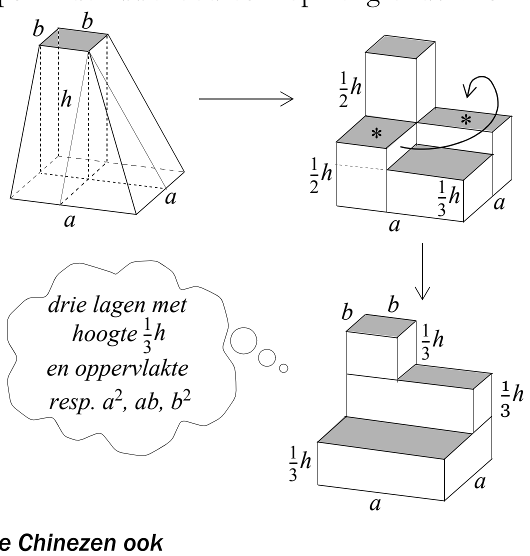


Vrij vertaald komt dit neer op:
* bereken het kwadraat van 4, uitkomst 16
* vermenigvuldig 2 en 4, uitkomst 8
* bereken het kwadraat van 2, uitkomst 4
* tel 16, 8 en 4 op, uitkomst 28
* bereken één derde van 6, uitkomst 2
* bereken 2 maal 28, uitkomst 56, dit is de inhoud.

Deze rekenmethode laat zich vertalen in algebrataal:

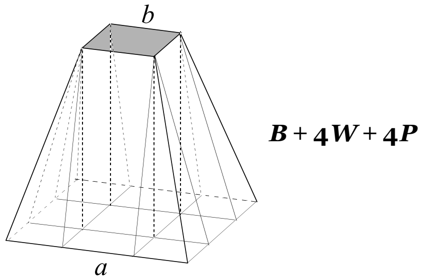
$$V = \tfrac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$$

Hierbij is V het volume van een afgeknotte piramide met hoogte h en vierkante basis en bovenvlak, respectievelijk met zijde a en b. Een mooie formule die twee bijzondere gevallen herbergt, namelijk $b = 0$ en $a = b$. Het eerste geval geeft de formule voor de inhoud van een piramide en het kan niet anders of de Egyptenaren wisten reeds dat de inhoud van een piramide (of kegel) één derde – en niét de helft – is van het omhullende blok (cilinder). Van de hele piramide naar het afgeknotte exemplaar is nog een flinke stap. Van der Waerden speculeert in zijn prachtige boek *Ontwakende Wetenschap* over een mogelijke aanpak. Daarbij gaat hij uit van een afgeknotte piramide waarvan één opstaande ribbe loodrecht op het grondvlak staat.

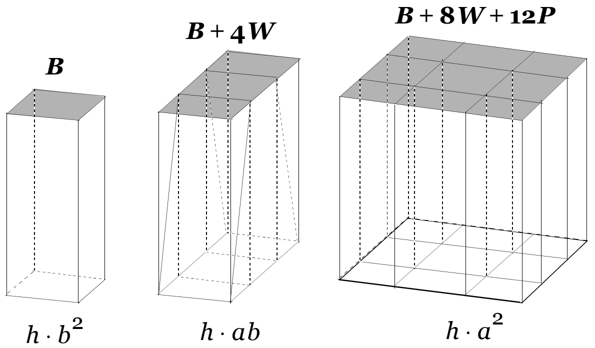


De Chinezen ook

De Egyptische regel komt ook voor in de Chinese *Negen hoofdstukken over de wiskunde*, een compilatie ontstaan in de Han-periode (tussen 206 voor en 221 na Chr.). Liu Hui die in de derde eeuw leefde, gaf in een commentaar op dit werk een mooie demonstratie van de formule. Hij ging uit van een regelmatige afgeknotte vierzijdige piramide die hij verdeelde in negen stukken: één blok omringd door vier wiggen (prisma's) en vier piramiden. Voor het gemak noem ik de inhoud van die stukken respectievelijk B, W en P.



Liu Hui's redenering verloopt nu als volgt. Hij beschouwt drie blokken, met hoogte h en bodemoppervlakte respectievelijk b^2, ab en a^2. Met wat puzzelwerk is te zien dat de inhouden ervan gelijk zijn aan B, $B + 4W$ en $B + 8W + 12P$. Bij het derde blok moest Liu Hui wel weten dat een hoekblokje qua volume drie keer zo groot is als een piramide ('yangma') op het hoekje van de afgeknotte piramide.



Optellen van de drie inhouden levert dan op:

$$3B + 12W + 12P = h \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

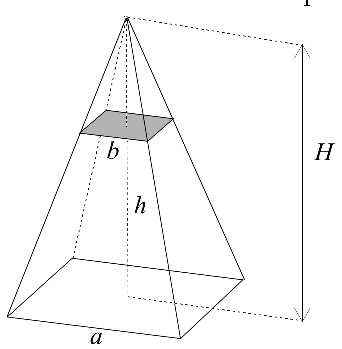
waaruit de beoogde formule voortvloeit.

Deze redenering kan, net als de voorgaande die door Van der Waerden werd gesuggereerd, zonder algebra worden uitgevoerd. Met algebra zou je, uitgaande van de figuur van Liu Hui, kunnen komen tot:

$$B = h \cdot b^2$$
$$4W = h \cdot (a - b)b$$
$$4P = \tfrac{1}{3}h \cdot (a - b)^2$$

om na uitwerken en optellen zijn formule te krijgen.

Een andere 'moderne' aanpak is om de afgeknotte piramide te zien als het 'verschil' van twee piramides.



Noem ik de hoogte van de grote piramide H, dan volgt uit de gelijkvormigheid van beide piramides:

$$\frac{H - h}{H} = \frac{b}{a}$$

zodat

$$H = \frac{ha}{a - b} \qquad (*)$$

Het volume van de afgeknotte piramide is dan:

$$\tfrac{1}{3} \cdot H \cdot a^2 - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{bH}{a} \cdot b^2 = \frac{H}{3a}(a^3 - b^3)$$

en via (*) krijg ik

$$\tfrac{1}{3} \cdot \frac{h}{a - b} \cdot (a^3 - b^3)$$

Om bij de Egyptisch-Chinese formule uit te komen zal moeten gelden:

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$$

Deze identiteit heb ik in mijn jeugd als 'merkwaardig quotiënt' uit het hoofd moeten leren en is het niet grappig dat die nu optreedt bij het op twee manieren bepalen van de inhoud van een afgeknotte piramide?

Analogie kan misleidend zijn

Het tweedimensionale analogon van de afgeknotte piramide is het trapezium. Daarvan wordt de oppervlakte gevonden door de hoogte te vermenigvuldigen met het (rekenkundig) gemiddelde van de evenwijdige zijden. Het is daarom niet vreemd dat Babyloniërs zich lieten misleiden door het idee dat het volume van de afgeknotte piramide met vierkante bodem gelijk zou zijn aan

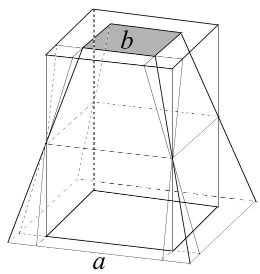
$$\tfrac{1}{2}h(a^2 + b^2)$$

Neem $b = 0$ en we weten dat deze formule zo fout is als de Japanse kampbewaker uit het verhaal van Steller. De 'Babylonische formule' geeft voor $a \neq b$ een te grote inhoud. Een aardige algebrasom is om aan te tonen dat het verschil met het werkelijke volume $\tfrac{1}{6}h(a - b)^2$ is.

Een andere door analogie ingegeven formule is

$$h(\tfrac{1}{2}(a + b))^2$$

Dat dit te kleine uitkomsten geeft (tenzij $a = b$), kan met algebra worden aangetoond, maar is ook meetkundig goed te zien.



Vergelijk de afgeknotte piramide met het blok met h als hoogte en vierkante bodem met zijde $\tfrac{1}{2}(a + b)$.

Wat er onder het middenvlak toegevoegd moet worden, is duidelijk meer dan wat er aan de bovenkant afgaat. Noem nu het volume van het blok B en de inhoud van de aan de onderhelft aangeplakte wiggen en piramides respectievelijk W en P.
Dan is de inhoud van de afgeknotte piramide gelijk aan

$$\left(\tfrac{1}{2}B+4W+4P\right)+\left(\tfrac{1}{2}B-4W+4P\right) = B+8P$$

Uit

$$P = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}h\cdot\left[\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{4}(a+b)\right]^2$$

volgt na herleiding en vermenigvuldiging met 8 dat het defect in de tweede foute formule gelijk moet zijn aan

$$\tfrac{1}{3}h\left[\tfrac{1}{2}(a-b)\right]^2$$

Nu is op een Babylonisch kleitablet ook een uitdrukking gevonden die in algemene vorm neerkomt op

$$h\cdot\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\ldots\right]$$

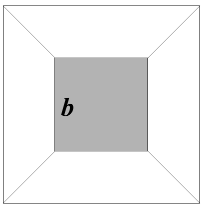
waarbij op de plaatsen van de stippen een moeilijk te ontcijferen vorm staat. Misschien is daar bedoeld:

$$\tfrac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

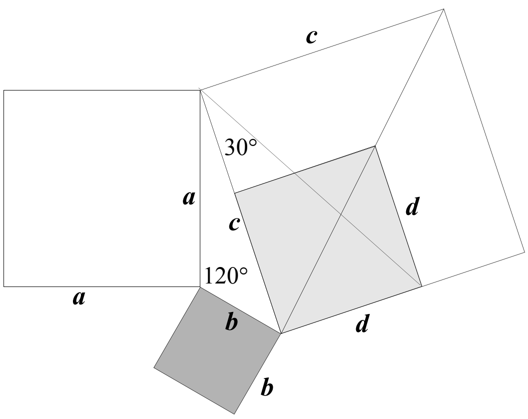
Dat zou dan betekenen dat op ten minste één plaats in de Babylonische wiskunde de correcte formule voorkomt.

Drie constructies

Terug naar de formule voor de afgeknotte piramide met hoogte h en dit bovenaanzicht:

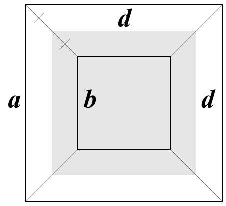


Het volume is gelijk aan dat van een recht blok met een vierkante bodem met oppervlakte $\tfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$ en met hoogte h. Dit nieuwe vierkant laat zich aldus vanuit de gegeven vierkanten met zijden a en b construeren.

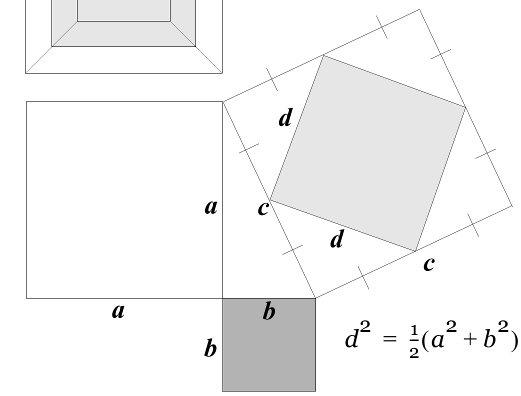


$$\left.\begin{aligned} c^2 &= a^2+ab+b^2 \text{ (cosinusregel)}\\ d &= c\cdot\tan 30^\circ = \tfrac{1}{3}c\sqrt{3}\end{aligned}\right\} \Rightarrow d^2 = \tfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$$

Ook de 'tussenvierkanten' die corrresponderen met de niet-correcte formules zijn eenvoudig te construeren.



$$d = \tfrac{1}{2}(a+b)$$



$$d^2 = \tfrac{1}{2}(a^2+b^2)$$

De onderlinge verschillen tussen de afmetingen van de drie tussenvierkanten zijn hier amper waarneembaar; zo gek waren die Babyloniërs natuurlijk ook weer niet.

Verschillende gemiddelden

Noem ik de oppervlakte van grond- en bovenvlak van de afgeknotte piramide nu A en B, dan zijn de oppervlakten van de drie tussenvierkanten respectievelijk gelijk aan

$$\tfrac{1}{3}(A+\sqrt{AB}+B),\quad \tfrac{1}{4}(A+2\sqrt{AB}+B),\quad \tfrac{1}{2}(A+B)$$

De eerste twee vormen, zeg $f(A,B)$ en $g(A,B)$, kunnen worden herschreven met behulp van het rekenkundig en het meetkundig gemiddelde van A en B, te weten:

$$r(A,B) = \tfrac{1}{2}(A+B) \quad\text{en}\quad m(A,B) = \sqrt{AB}$$

Er komt dan:

$$f(A,B) = \tfrac{2}{3}r(A,B)+\tfrac{1}{3}m(A,B)$$

$$g(A,B) = \tfrac{1}{2}r(A,B)+\tfrac{1}{2}m(A,B)$$

Nu weten we dat $r(A,B)\geq m(A,B)$.
De algebraïsche verklaring is:

$$A+B\geq 2\sqrt{AB} \quad\text{want}\quad (\sqrt{A}-\sqrt{B})^2\geq 0$$

Hieruit volgt dan opnieuw de ongelijkheid:

$$g(A,B)\leq f(A,B)\leq r(A,B)$$

Tenslotte merk ik nog op dat de correcte inhoudsformule voor de regelmatige vierzijdige afgeknotte piramide in een meer algemene vorm kan worden gegegoten:

$$V = \tfrac{1}{3}h(A+\sqrt{AB}+B)$$

Dat deze formule ook op een arbitraire n-zijdige (eventueel scheve) afgeknotte piramide van toepassing is (en ook op een afgeknotte kegel), kan worden aangetoond via het verschil van twee piramides (kegels) op een manier die geheel analoog is aan het bewijs zoals dat hier eerder is beschreven voor het vierzijdige geval.

Martin Kindt, m.kindt@uu.nl