Ongeveer honderd jaar geleden publiceerde Alicia Boole Stott haar destijds originele ideeën over de constructie van Archimedische lichamen. **Piet Lemmens** vond het de moeite waard om daar nog eens aandacht aan te besteden.

Alicia Boole Stott en Archimedische veelvlakken

Inleiding

Alicia Boole Stott werd geboren in Cork (Ierland) op 8 juni 1860 als derde van de vijf dochters van de bekende logicus George Boole (1815–1864) en Mary Everest (1832–1916). Ze overleed op 17 december 1940 in Highgate, Middlesex. Zij had een fabelachtig ruimtelijk inzicht, en werkte ongeveer twintig jaar samen met P.H. Schoute (die hoogleraar was aan de Rijksuniversiteit Groningen tot zijn overlijden in 1913), deed niets aan wiskunde tussen 1913 en 1930, waarna ze ging samenwerken met H.S.M. Coxeter.

Haar bekendste publicaties zijn verschenen in de *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen* (Boole Stott, 1900; 1910). Het is dus ongeveer honderd jaar geleden dat Alicia Boole Stott haar tweede artikel in de *Verhandelingen* publiceerde. Het leek me de moeite waard om daar nog eens aandacht aan te besteden. Opmerkelijk is dat Alicia Boole Stott niet voorkomt in het tamelijk recente boek van Cromwell (1997).

Andere publicaties over Alicia en haar werk

(voor zover mij bekend)

- Onder supervisie van Marius van der Put, Jaap Top en Jan van Maanen promoveerde Irene Polo-Blanco op 4 mei 2007 met de verdediging van haar proefschrift *Theory and History of Geometric Models* (2007). Hoofdstuk 5 is getiteld *A. Boole Stott and 4-D polytopes*.
- Polo-Blanco heeft daarna uitbreidingen daarvan gepubliceerd (2008a, 2008b, 2010).
- Tony Phillips van Stony Brook University heeft een feature column, gewijd aan een uitvoerige bespreking van Alicia's eerste artikel (2006).
- In *Women of Mathematics* (1987) staat een biografie van Alicia, geschreven door H.S.M. (Donald) Coxeter. Al eerder besteedde hij veel aandacht aan Alicia in *Mathematical Recreations and Essays* (1987, p. 139-140), in *Regular polytopes* (1973a, p. 163-164 en p. 258-269), en in *Regular Complex Polytopes* (1973b) op veel plaatsen. Van dit laatste, in groot formaat uitgevoerde, boek bezit de bibliotheek van het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht het exemplaar dat Coxeter geschonken heeft aan Hans en Suus Freudenthal.

Ter gelegenheid van het 300-jarig bestaan van de universiteit ontving Alicia op 1 juli 1914 een eredoctoraat van de Rijksuniversiteit Groningen. Polo-Blanco vermeldt hierover in haar proefschrift (2007):

- Het eigenlijke diploma van het eredoctoraat is zoekgeraakt, volgens mededelingen van Alicia's neven Geoffrey en James Hinton.
- In het archief van de Universiteit van Cambridge is nog wel de brief van rector en senaat van de RUG aan Alicia aanwezig, waarin de toekenning van het eredoctoraat wordt meegedeeld.
- Een 'draft list' over de huisvesting van de eredoctors vermeldt bij Alicia dat zij niet komt voor de uitreiking (Provinciaal archief Groningen).
- Uit een 'postcard' van J.C. Schoute (zoon van P.H.) aan Barrau blijkt dat Alicia bij de weduwe van P.H. Schoute zou kunnen logeren.

Jan van Maanen schreef mij dat er een groepsfoto is van de eredoctors, waarop Alicia niet voorkomt. Er is dus gerede twijfel of zij inderdaad bij de uitreiking aanwezig is geweest, alhoewel Coxeter op p. 259 van *Regular polytopes* (1973a) schrijft:

> . . . she attended the tercentenary celebrations . . . and exhibited her models.

Coxeter schrijft er ook wat over in *Regular Complex Polytopes* (1973b) en *Women of Mathematics* (1987). Ik vind het wel moeilijk te accepteren dat Coxeter het mis zou hebben gehad, want hij had een encyclopedisch geheugen. Ik kende hem al sinds 1975 (hij is op 30 maart 2003 op 96-jarige leeftijd overleden), en heb ook met hem samengewerkt.

Over de *Verhandelingen der KAW* te Amsterdam

Het bleek enige moeite te kosten om het artikel van 1910 in te zien via de bibliotheek van de Utrechtse Universiteit. Achteraf was dat wel verklaarbaar. Het eerste probleem was dat er ook 'verslagen' zijn, waarmee men mijn aanvraag verwarde. Vervolgens bleek het artikel in een boek uit 1913 te staan. De verhandelingen van deel XI van de eerste sectie (wiskunde - natuurkunde - scheikunde - kristallenleer - sterrenkunde - weerkunde en ingenieurswetenschappen) beslaan zes nummers, die elk beginnen met pagina 1, en uitgegeven zijn van 1910 (nr. 1) tot en met 1913 (nr. 6). Ze zijn in 1913 gebundeld in een boek, en op de rug daarvan staat: *verhandelingen der akademie van wetenschappen - natuurkunde n.reeks - 1e sectie 11*. De inhoudsopgave vermeldt: 1. Miss A. Boole Stott... , maar de titelpagina van nr.1 is correct: Mrs. A. Boole Stott.

Expansie en contractie

Alicia introduceert in *Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes and space fillings* (1910) twee krachtige operaties: expansie en contractie. Het idee is dat van een Platonisch of Archimedisch veelvlak met centrum O een geschikt gekozen collectie van elementen (ribben, of zijvlakken van dezelfde soort) over dezelfde afstand wordt getransleerd in de richting van de vector van O naar het middelpunt van het betreffende element (expansie) of juist in de tegengestelde richting (contractie). 'Geschikt gekozen' impliceert:

- de collectie is invariant onder de isometriegroep,
- expansie kan mogelijk zinvol zijn als er hoekpunten (en eventueel ribben) zijn die verschillende elementen gemeenschappelijk hebben,
- contractie kan mogelijk zinvol zijn als de elementen geen hoekpunten of ribben gemeenschappelijk hebben.

Om eventuele misverstanden te voorkomen, merken we nog expliciet op dat na de keuze van de collectie de hele rest van het betreffende veelvlak wordt genegeerd. Bij expansie worden gemeenschappelijk hoekpunten en ribben gesplitst, en wanneer de afstand tussen gesplitste hoekpunten gelijk is aan de lengte van de ribben, kan de ontstane ruimte tussen de verschoven elementen misschien worden opgevuld met nieuwe regelmatige veelhoeken. Na contractie vallen sommige hoekpunten en eventueel ook ribben samen.

Voor zover het de constructie van de driedimensionale Archimedische veelvlakken uitgaand van de Platonische betreft, behandelt Alicia in *Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes and space fillings* (1910) alleen de veelvlakken die dezelfde isometriegroep (inclusief spiegelingen) hebben als het Platonische veelvlak waaruit ze ontstaan (Coxeter noemt ze de 'reflexible figures'). Datzelfde doet P.H. Schoute in zijn artikelen waarin hij onder andere Alicia's constructies analytisch afleidt. De snub cube en de snub dodecahedron vallen niet onder hun methoden.

Ik kan de effecten van expansie en contractie niet beter beschrijven dan Coxeter doet in *Mathematical Recreations and Essays* (1987, pagina 139-140). Na een beschrijving van de Archimedische lichamen op min of meer de manier zoals Kepler dat reeds deed, schrijft hij:

> MRS. STOTT'S CONSTRUCTION
> . . . A far more elegant construction for the reflexible figures has been devised by Alicia Boole Stott. Her method is free from any employment of distortion, and the final edge-length is the same as that of the regular solid from which we start. In the process called expansion, certain sets of elements (viz., edges or faces) are moved directly away from the centre, retaining their size and orientation, until the consequent interstices can be filled with new regular faces. The reverse process is called contraction. By expanding any regular solid according to its edges, we derive the 'truncated' variety. By expanding the cube (or the octahedron) according to its faces, we derive the rhombicuboctahedron. By expanding this according to its 12 squares which correspond to the edges of the cube, or by expanding the truncated cube according to its octagons, we derive the truncated cuboctahedron. By contracting the truncated cube according to its triangles, we derive the cuboctahedron. And so on.

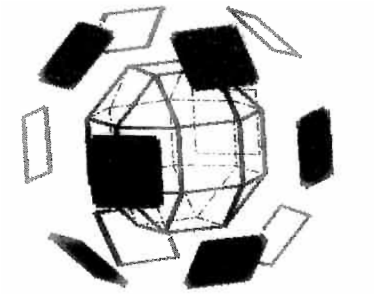

fig. 1

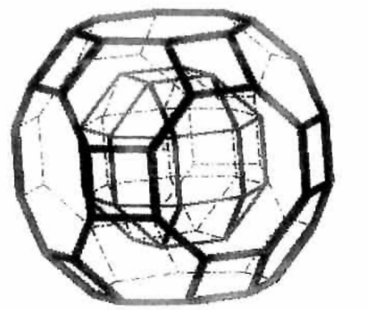

fig. 2

Coxeter gebruikt hier Keplers benaming 'truncated cuboctahedron' voor de great rhomb-cub-octahedron (ik gebruik de notatie van Cromwell in *Polyhedra*). Het is dus wezenlijk dat na een expansie of contractie een daarop volgende expansie of contractie betrekking heeft op door invulling ontstane nieuwe 'elementen'.

In figuur 1 zien we de rhomb-cub-octahedron met expansie van de 'ribbenvierkanten' en in figuur 2 zijn de zeshoeken en achthoeken ingevuld, waardoor de great rhomb-cub-octahedron ontstaat.

Met 'distortion' doelt Coxeter op het feit dat elf van de dertien Archimedische veelvlakken verkregen worden uit Platonische veelvlakken door afknotten van hoekpunten, soms tot halverwege, eventueel gevolgd door nog eens af te knotten. Maar bij de tweede afknotting klopt het niet helemaal omdat er dan in een hoekpunt verschillende soorten vlakjes samenkomen, en zijn correcties nodig om alle vlakjes regelmatig te maken.

Als voorbeeld nemen we de cub-octahedron die ontstaat door halverwege afknotting van de kubus of van de octahedron.

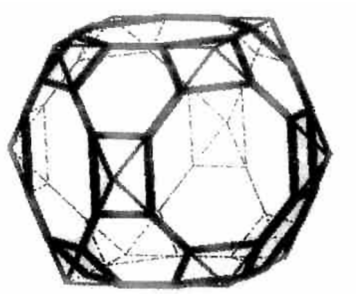

fig. 3

Figuur 3 laat zien wat er gebeurt als we de cub-octahedron afknotten: er ontstaan rechthoeken (in plaats van de hoekpunten), zeshoeken (in plaats van de driehoeken) en achthoeken (in plaats van de vierkanten). Men kan de afknotting zo nemen dat de zeshoeken regelmatig zijn, of zo dat de achthoeken regelmatig zijn, maar dat kan niet tegelijk. In alle gevallen zijn de rechthoeken geen vierkanten.

Het is een aardige bezigheid om te kijken welke Archimedische veelvlakken ontstaan of bijna ontstaan door afknotting, en welke ontstaan door expansie of door contractie. In feite gebruikt Coxeter andere constructies voor het halverwege afknotten, maar daarbij zijn soms ook correcties nodig.

De snub cube en de snub dodecahedron

Het verbaast mij dat Alicia haar inzichten niet heeft toegepast op de twee overblijvende Archimedische veelvlakken, de snub cube (stompe kubus) en de snub dodecahedron (stomp twaalfvlak). In *Regular Complex polytopes* vertelt Coxeter (1973b) op pagina 18 iets over ideeën die zij daar toch wel over had. Op pagina 138–139 van *Mathematical Recreations and Essays* (1987) staat:

> All the Archimedian solids so far discussed are reflexible (by reflection in the plane that perpendicularly bisects any edge). The remaining two, however, are not reflexible: the snub cube, and the snub dodecahedron. Let us draw one diagonal in each of the 30 squares of the rhombicosidodecahedron, choosing between the two possible diagonals in such a way that just one of these new lines shall pass through each of the 60 vertices. (The choice in the first square determines that in all the rest.) Each square has now been divided into two right-angled isosceles triangles; by distorting these into equilateral triangles we obtain the snub dodecahedron. The snub cube is similarly derivable from the rhombicuboctahedron, provided we remember to operate only on the 12 squares that correspond to the edges of the cube (and not on the 6 squares that correspond to its faces).

Coxeters bovenstaande tekst is eigenlijk te weinig specificerend: hij zegt niet hoe de distortion gebeurt. Ik neem aan dat hij bedoeld heeft dat de vijfhoeken en andere driehoeken onveranderd van vorm en grootte blijven, en dat alleen de aangebrachte diagonalen korter gemaakt worden tot ze even lang zijn als alle ribben van de rhomb-icosi-dodecahedron (respectievelijk de rhomb-cub-octahedron).

Bij het continu verkorten van de diagonalen, draaien de vijfhoeken (respectievelijk vierkanten). Daarbij blijven ze loodrecht op de voerstralen vanuit het centrum naar hun middelpunten. Die voerstralen veranderen niet van richting, maar worden wel korter. Dat zou naar mijn idee toch echt een kolfje naar de hand van Alicia zijn geweest: expansie en draaiing van de vijfhoeken van de dodecahedron en van de vierkanten van de kubus! Dit opent een grote variatie van mogelijkheden. Vanuit de dodecahedron kunnen we zo komen tot:

– de rhomb-icosi-dodecahedron (expansie, geen draaiing)
– de snub dodecahedron (expansie, kleine draaiing)
– de icosi-dodecahedron (expansie, draaiing over 36 graden)
– de truncated icosahedron (grotere expansie, draaiing over 36 graden)

en vanuit de kubus komen we tot

– de rhomb-cub-octahedron (expansie, geen draaiing)
– de snub cube (expansie, kleine draaiing)
– de cub-octahedron (expansie, draaiing over 45 graden)
– de truncated octahedron (grotere expansie, draaiing over 45 graden)

In dit kader verwijs ik naar *Zelf veelvlakken maken* (2003), waar op pagina 46-47 bewegende modellen van Thijs Notenboom worden besproken.

Verkleining of vergroting in plaats van expansie of contractie

Het is nog interessant om op te merken dat na expansie of contractie een centrale vermenigvuldiging vanuit O met een vaste factor resulteert in een verkleining (bij expansie) of vergroting (bij contractie) van de elementen uit de collectie, waarbij hun eigen middelpunten behouden blijven en eventuele draaihoeken niet veranderen. Dit verkleinen of vergroten kan net zo goed als uitgangspunt worden genomen, waardoor het ook mogelijk is om op deze manier uit reguliere betegelingen van het vlak Archimedische betegelingen te maken. Daarop ga ik nu niet verder in.

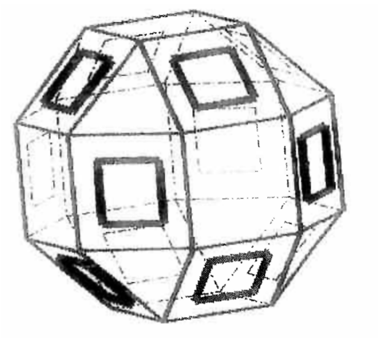

fig. 4

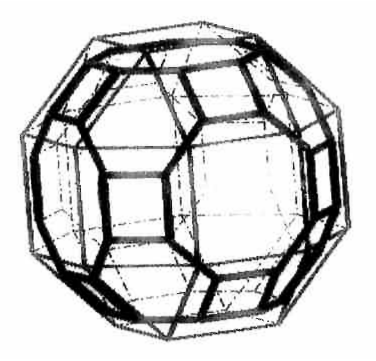

fig. 5

In figuur 4 zien we de rhomb-cub-octahedron met verkleinde ‘ribbenvierkanten’ en in figuur 5 zijn de zeshoeken en achthoeken ingevuld.

Berekeningen aan snub cube en snub dodecahedron

Dat de snubs verkregen kunnen worden door expansie en draaiing, kan met continuïteitsargumenten aangetoond worden, maar daarmee krijgen we geen concrete coördinaten voor de hoekpunten. Daarvoor moeten we berekeningen uitvoeren.

Rechtstreekse berekening met expansie en draaiing van de vierkanten van de kubus en van de vijfhoeken van de dodecahedron vond ik (vooral bij de dodecahedron) nogal bewerkelijk. Op de website mathworld.wolfram.com[1] staan formules voor de respectievelijke expansie en draaihoek in beide gevallen. Die formules zien er nogal ingewikkeld uit. Daarom heb ik niet geprobeerd om die formules af te leiden, maar heb ik gezocht naar alternatieven. Die vond ik (blikwisseling!) in het verkleinen en draaien van de *ribben* van de kubus en de dodecahedron, verkleining met behoud van het midden en draaiing rond dat midden in het loodvlak op de voerstraal vanuit het centrum van het veelvlak.

Die gedraaide en verkleinde ribben worden dan de diagonalen waar Coxeter (1987) het in *Mathematical Recreations and Essays* over heeft. De eindpunten daarvan vormen samen alle hoekpunten van de snub cube en van de snub dodecahedron. De berekeningen voor de kubus en de dodecahedron gaan volgens analoge schema’s, maar voor de kubus zijn veel details eenvoudiger. Daarom zal ik hier voor de liefhebbers de berekeningen expliciet uitvoeren voor de dodecahedron.

Opmerking vooraf: Neem het centrum O van de dodecahedron als oorsprong van een orthogonaal assenstelsel, en laat alle vectoren aangrijpen in O, zodat een punt correspondeert met de vector van O naar dat punt. Voor twee punten A en B noteer ik met AB het lijnstuk van A naar B, en met $B-A$ de vector van A naar B.

Laten I, J, K opvolgende hoekpunten zijn van een zijvlak (vijfhoek) van de dodecahedron, in de draairichting van een rechtshandige kurkentrekker die van buitenaf door het zijvlak naar O beweegt.
We willen de ribbe IJ laten draaien over een hoek ϕ om zijn midden M in een vlak loodrecht op M, en het analoge willen we doen met de ribbe JK om zijn midden N, over dezelfde hoek. Noem

$F_M = J - M$, $F_N = K - N$, dan is $J - N = -F_N$.

Om de draaiingen te beschrijven, hebben we twee extra vectoren nodig, G_M en G_N van dezelfde lengte als F_M en F_N (die hebben gelijke lengte), G_M loodrecht op M en F_M, en G_N loodrecht op N en F_N. Daarvoor kunnen we het uitproduct gebruiken:

$$G_M = m[F_M, M] \text{ en } G_N = n[F_N, N]$$

waarin m en n de inversen zijn van de lengten van M en N (dus $m = n$). Stel

$c = \cos(\phi)$, $s = \sin(\phi)$, $P = cF_M + sG_M$, $Q = cF_N + sG_N$

Onder de draaiing van IJ gaat J over in $M+P$, en onder de draaiing van JK gaat J over in $N-Q$ en K in $N+Q$. De laatste stap is het vermenigvuldigen van P en Q met r en proberen ϕ en r zo te bepalen dat de onderlinge afstanden gelijk zijn tussen

$$U = M + rP,\ V = N - rQ,\ W = N + rQ.$$

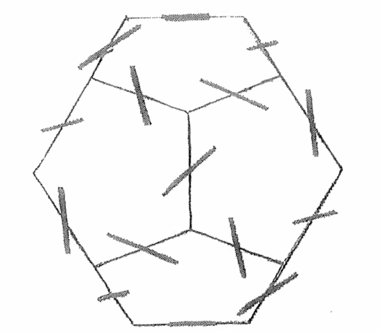

fig. 6

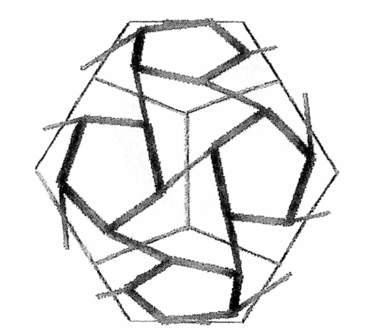

fig. 7

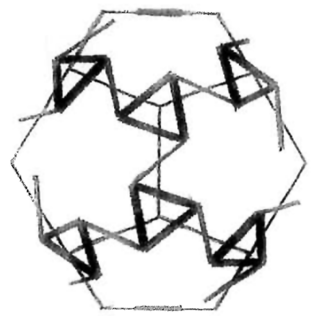

fig. 8

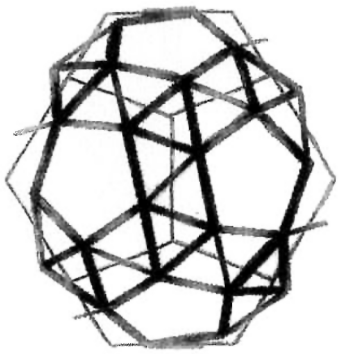

fig. 9

Immers, van buiten af zien de gedraaide en verkleinde ribben er uit als in figuur 6. Wegens symmetrie zijn de vijf eindpunten die boven een 'oude' vijfhoek liggen de hoekpunten van een nieuwe regelmatige vijfhoek zoals te zien in figuur 7, en zijn de drie eindpunten rond een 'oud' hoekpunt de hoekpunten van een nieuwe regelmatige driehoek, zoals te zien in figuur 8.

In figuur 9 zijn de nieuwe driehoeken en nieuwe vijfhoeken beide getekend, waardoor we de snub dodecahedron zien ontstaan. U en W zijn twee opvolgenden van zo'n vijftal, en U en V zijn twee opvolgenden van zo'n drietal, terwijl V en W de eindpunten zijn van een ribbe waarmee we begonnen zijn.

Gelijke afstanden tussen U, V en W is dus voldoende voor gelijke lengte van alle ribben.

Omdat U, V, W op eenzelfde boloppervlak om O liggen, betekent dit dat de onderlinge inproducten gelijk zijn:

$$(U, V) = (U, W) = (V, W).$$

Eerst kijken we naar $(U, V) = (U, W)$. Dit is equivalent met

(1) $(M + rP, Q) = 0$, oftewel $r = -\dfrac{(M, Q)}{(P, Q)}$.

Met deze kennis is $(U, W) = (V, W)$ om te vormen tot

(2) $(N, N) - (M, N) - r(P, N) - r^2(Q, Q) = 0$.

Substitueren we in (2) de in (1) gevonden uitdrukking voor r door alles met $(P, Q)^2$ te vermenigvuldigen, dan komt er

(3) $(P', Q')^2((N, N) - (M, N)) + (P, Q)(M, Q)(N, P)$
$-(M, Q)^2(Q', Q') = 0$

Schrijven we hierin weer $P = cF_M + sG_M$, en $Q = cF_N + sG_N$ en delen we de uitdrukking door c^4, dan ontstaat uit het linkerlid een vierdegraads polynoom in $t = s/c = \tan(f)$.
Immers, delen door c^4 betekent dat P en Q in (3) vervangen worden door respectievelijk

$$P' = F_M + tG_M \text{ en } Q' = F_N + tG_N$$

zodat formule (3) overgaat in

(4) $(P', Q')^2((N, N) - (M, N)) + (P', Q')(M, Q')(N, P')$
$-(M, Q')^2(Q', Q') = 0$

Echter, na het invullen van coördinaten blijkt de kopcoëfficiënt gelijk aan 0 te zijn, zodat we in feite te maken hebben met een derdegraads polynoom! Dit blijkt ook voor de kubus te gelden.

Het invullen van coördinaten

Voor de dodecahedron zijn er verschillende mogelijkheden om de hoekpunten op een redelijk plezierige manier te plaatsen in R^3.

Ik kies hier voor de Griekse constructie, door middel van het plaatsen van dakjes op de zijvlakken van de kubus met hoekpunten $(\pm1, \pm1, \pm1)$. Voor de twee extra punten van het dakje op het zijvlak met hoek-

punten $(1, \pm 1, \pm 1)$ kies ik
$I = (w, 0, 1-w)$ en $J = (w, 0, w-1)$
waarin $w = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Dan is $K = (1, 1, 1)$.

Voor w geldt de nuttige formule $w^2 = w+1$. Daarmee krijgen we

$M = (w, 0, 0)$ $\quad N = \left(\frac{w+1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{w}{2}\right)$

$F_M = (0, 0, w-1)$ $\quad F_N = \left(\frac{1-w}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2-w}{2}\right)$

$G_M = (0, w-1, 0)$ $\quad G_N = \left(\frac{2-w}{2}, \frac{w-1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

De verschillende onderdelen van formule (4) worden dan

$(P', Q') = (F_M + tG_M, F_N + tG_N) = \frac{1}{2}(2w - 3 + t^2(2-w))$,

$(N, N) - (M, N) = \frac{1}{2}$,

$(M, Q') = (M, F_N) + t(M, G_N) = \frac{1}{2}(-1 + t(w-1))$

$(N, P') = (N, F_M) + t(N, G_M) = \frac{1}{2}(1 + t(w-1))$

$(Q', Q') = (P', P') = 2 - w + t^2(2-w)$

Hiermee gaat formule (4) over in
$t(8w-12) + t^2(24w-40) + t^3(8w-12) - (8w-12) = 0$.

Nu kunnen we hierin nog alles delen door $(8w-12)$ en krijgen de verrassend eenvoudige vergelijking

$t^3 + (1-\sqrt{5})t^2 + t - 1 = 0$ (dodecahedron).

Voor de kubus met hoekpunten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ nemen we
$I = (1, -1, 1)$, $J = (1, 1, 1)$, $K = (1, 1, -1)$.
Daarmee krijgen we

$M = (1, 0, 1)$ $\quad N = (1, 1, 0)$

$F_M = (0, 1, 0)$ $\quad F_N = (0, 0, -1)$

$G_M = (v, 0, -v)$ $\quad G_N = (v, -v, 0)$

met $v = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, dus $v^2 = \frac{1}{2}$.

Hieruit ontstaat voor formule (4) de vergelijking
$(\sqrt{2})t^3 - 2t^2 + (\sqrt{2})t - 1 = 0$ (kubus),

en voor formule (1) hebben we nog nodig
$(P', Q') = \frac{1}{2}t^2$ en $(M, Q') = tv - 1$.

In beide gevallen kunnen we vaststellen dat er slechts één reële oplossing is van formule (4), want de linkerleden zijn monotoon stijgende functies van t omdat hun afgeleiden kwadratisch zijn met negatieve discriminant. Met de grafische mogelijkheden van de GR kunnen we die oplossingen heel nauwkeurig bepalen. Afgerond op vier decimalen vinden we
$t = 1.1327$ voor de dodecahedron en
$t = 1.0916$ voor de kubus.

De draaihoek is $\phi = \mathrm{arctg}(t)$, dus we krijgen
$\phi = 48.560$ graden met $s = 0.750$, $c = 0.662$ voor de dodecahedron en
$\phi = 47.508$ graden met $s = 0.737$, $c = 0.6755$ voor de kubus.
Daaruit kunnen we de vermenigvuldigingsfactor r bepalen met formule (1):

$$r = -\frac{(M, Q)}{(P, Q)} = -\frac{(M, Q')}{(P', Q')c}$$

Dus (weer afgerond)
$r = 0.624$ voor de dodecahedron en
$r = 0.567$ voor de kubus.

Tenslotte kunnen we nog controleren of U, V en W onderling gelijke afstanden hebben. De volgende stap is (indien gewenst) het omrekenen van onze resultaten naar expansie en draaiing van de vijfhoeken of de vierkanten. Hierbij blijven de lengten van de ribben onveranderd. We moeten 'onze' snubs dus centraal vermenigvuldigen met $1/r$. Dit laten we over aan de geïnteresseerde lezer.

Piet Lemmens,
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Literatuur

Boole Stott, A. (1900). On certain series of sections of the regular four-dimensional hypersolids. *Verhandelingen der KAW te Amsterdam, 7*(3).

Boole Stott, A. (1910). Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes and space fillings. *Verhandelingen der KAW te Amsterdam, 11*(1).

Coxeter, H.S.M. (1973a). *Regular polytopes.* Dover Publications.

Coxeter, H.S.M. (1973b). *Regular Complex Polytopes.* Cambridge University Press.

Cromwell, P.R. (1997). *Polyhedra.* Cambridge University Press.

Grinstein, L., & Campbell, P.J. (Eds.) (1987). *Women of Mathematics.* Westport CT.

Notenboom, T. (2003). Zelf veelvlakken maken. *Pythagoras, 42*(3/4), 44-47.

Phillips, T. (2006). *The Princess of Polytopia: Alicia Boole Stott and the 120-cell.* ams.org/samplings/feature-column/fcarc-boole.

Polo-Blanco, I. (2007). *Theory and History of Geometric*

Models. Dissertatie. Rijksuniversiteit Groningen.

Polo-Blanco, I. (2008a). Alicia Boole Stott, a geometer in higher dimension. *Historia Mathematica, 35*(2), 123-139.

Polo-Blanco, I. (2008b). A classical approach to the study of Archimedean four-dimensional polytopes. *Math.Semesterberichte, 55*, 107–111.

Polo-Blanco, I., & Gonzalez-Sanchez, J. (2010). Four-dimensional polytopes: Alicia Boole Stott's algorithm. *Math.Intelligencer, 32*(3).

Rouse Ball, W.W., & Coxeter, H.S.M. (1987). *Mathematical Recreations and Essays*. Dover Publications.

Noot

[1] mathworld.wolfram.com/SnubDodecahedron.html en mathworld.wolfram.com/SnubCube.html