

Een verstekverbinding koppelt twee balken met identieke dwarsdoorsnede zodanig dat de ribben van de balken netjes over de verbinding heen doorlopen. Als er meer dan twee balken samenkomen in een punt, spreken we over een vertakte verstekverbinding. **Tom Verhoeff** en **Koos Verhoeff** gaan in op deze verbindingen. Tom gaf onlangs een voordracht over dit onderwerp op de Bridgesconferentie (Pécs, Hongarije); op NWD 2010 sprak hij over de tweewegverbindingen.

Vertakte verstekverbindingen: principes en wiskunst

Inleiding

De verstekverbinding is een bekende manier om twee balken met dezelfde dwarsdoorsnede onder een hoek met elkaar te verbinden. Bij een reguliere verstekverbinding worden beide balken afgekant onder de halve hoek van de verbindingshoek. In een reguliere verstekverbinding ligt het zaagvlak in het bissectricevlak van de verbindingshoek, in tegenstelling tot dwarsverstek [1]. In een correct uitgevoerde verstekverbinding lopen de ribben keurig door over de verbinding. Wat de rotatiehoek van de eerste balk over zijn hartlijn ook is, en wat de beoogde verstekhoek ook is: het is altijd mogelijk om de lengterotatie van een tweede balk zo te kiezen dat er een correcte verstekverbinding ontstaat. Er zijn dus twee onafhankelijke, continue vrijheidsgraden. Zie figuur 1, en op website [2] kunt u er zelf mee experimenteren. De vorm van het zaagvlak varieert dus ook.

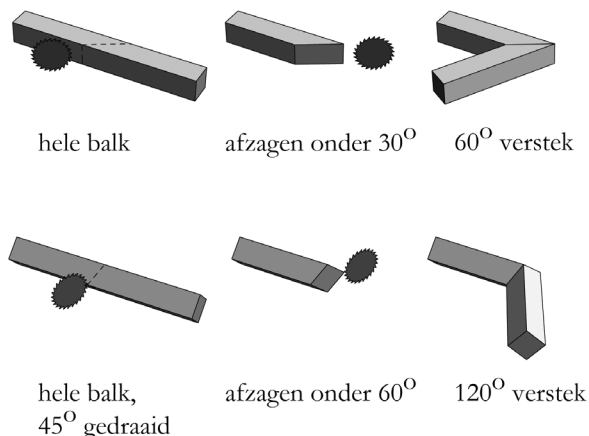


fig. 1 Reguliere verstekverbindingen, met de twee vrijheidsgraden: verbindings- en rotatiehoek.

Verstekverbindingen kunnen worden gebruikt om 'draadfiguren' te maken met balken. Het kan een ware uitdaging zijn om zo'n figuur gesloten te krijgen: het is niet vanzelfsprekend dat de ribben in de laatste verbinding netjes doorlopen [1]. In dit artikel komt een andere uitdaging aan bod: meer dan twee balken

samen laten komen in één verbinding. Het doel is wederom om de ribben van de balken netjes te laten doorlopen over de verbinding. We noemen ze *vertakte verstekverbindingen*. Met behulp van deze verbindingen kunnen complexe objecten gemaakt worden, zoals veelvlakken en bomen. In de volgende paragraaf wordt ingegaan op de algemene principes van reguliere vertakte verstekverbindingen, in het bijzonder verbindingen met drie identieke dwarsdoorsnedes. Dan gaan we in op de onmogelijke kubus, die acht drievoudige verstekverbindingen bevat. Vervolgens een object met vijf verbindingen waarin vier balken samenkomen en tenslotte enkele conclusies.

Algemene principes voor drievoudige verstekverbindingen

Laten we eerst de reguliere drievoudige verstekverbindingen bekijken, waarin drie balken met identieke dwarsdoorsnede samenkomen. Drie gegeven lijnsegmenten A , B en C ontmoeten elkaar in een punt onder een vaste hoek. We gaan de richting van de lijnen beschrijven met hun lengte- en breedtegraad. In de eerste voorbeelden kiezen we voor segment A : 0° lengte en 0° breedte, op de evenaar dus, voor segment B : 90° westerlengte en 0° breedte en voor segment C : 45° westerlengte en 61° noorderbreedte. Als gevolg hebben we $\angle AB = 90^\circ$, $\angle AC = \angle BC \approx 70^\circ$. Deze lijnsegmenten vormen de hartlijnen van drie balken met vierkante dwarsdoorsnede die samen komen in een vertakte verstekverbinding. Om de ribben naadloos in elkaar over te laten lopen, moet ieder tweetal balken een correcte verstekverbinding hebben, als de derde balk even buiten beschouwing gelaten wordt. Er zijn dus drie zulke paren. We beginnen met een vierkante balk die lijnsegment A als hartlijn heeft. Deze balk kan nog steeds vrij geroteerd worden, maar iedere rotatie van balk A dwingt ook een rotatie van de balk rond lijnsegment B af, en ook van de balk rond C . Maar de rotatie van balk B veroorzaakt weer een andere rotatie op balk C . Er kunnen zo dus twee strij-

dige eisen op balk *C* ontstaan, hetgeen te zien is in figuur 2.

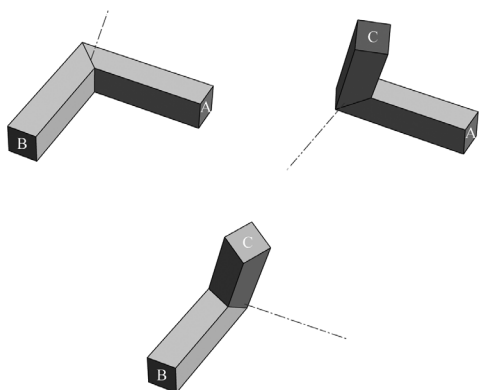


fig. 2 Tweevoudige verstekverbindingen afgeleid uit een drievoudige verbinding: *A* beïnvloedt *B*, *A* beïnvloedt *C*, *B* beïnvloedt *C*.

Deze tegenstrijdigheid is zelfs duidelijker te zien wanneer we de twee rotaties van balk *C*, afgedwongen door de rotaties van balk *A* en balk *B* over elkaar leggen. Zie figuur 3.

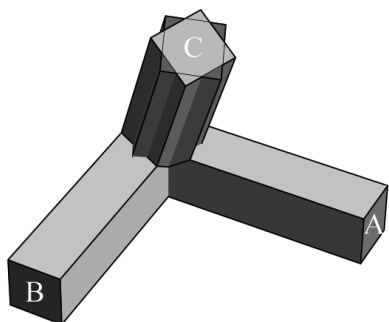


fig. 3 De rotaties van balk *C* onder invloed van de beide tweevoudige verstekverbindingen. Het past niet...

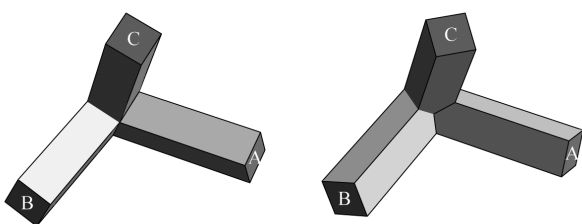


fig. 4 De twee manieren waarop de verstekverbinding klopt.

Als we nu balk *A* met de klok mee roteren, dan veroorzaakt dit een rotatie van balk *B* en balk *C* tegen de klok in. Maar de rotatie van balk *B* zelf veroorzaakt juist weer een rotatie met de klok mee op balk *C*. Dus door balk *A* op een geschikte manier te roteren moet het mogelijk zijn het verschil op te heffen: de effecten van het roteren van *A* en *B* op *C* zijn tegengesteld en kunnen elkaar dus opheffen. Het blijkt dat er twee wezenlijk verschillende manieren zijn waarop deze

verstekverbinding klopt. In figuur 4 zien we links de mogelijkheid waarbij drie ribben van de balken samenkomen in één punt (er is nog zo'n punt, maar dat is niet zichtbaar). In de rechter afbeelding heb je zo'n punt niet: de ribben van de balken komen paarsgewijs samen. Er is een punt (twee zelfs) waar drie randen samenkomen, maar dat zijn de randen van de zaagvlakken.

Samengevat, wanneer drie balken samenkomen in een punt onder een bepaalde hoek, dan lukt dat alleen maar bij een bepaald aantal rotaties. Het is niet mogelijk om onafhankelijk van elkaar de verstekhoek en de rotatiehoek te kiezen: de een legt restricties op aan de ander. Of, als we beginnen met een tweevoudige verstekverbinding van balken *A* en *B*, dan is er maar een beperkt aantal mogelijkheden voor de richting van een derde balk *C* om met *A* en *B* een drievoudige verstekverbinding te vormen.

In figuur 5 zijn de balken *A* en *B* in het horizontale vlak onder 90° in verstek verbonden. Er zijn nu vijf mogelijkheden om met een derde balk *C* een verstekverbinding te maken, als we ons tenminste beperken tot de bovenste helft van het binnenbissectricevlak van *A* en *B*.

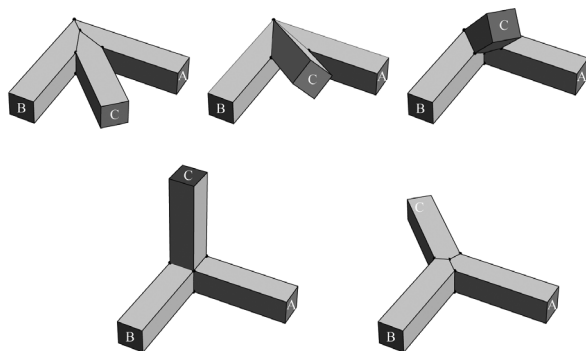


fig. 5 De vijf mogelijke manieren waarop balk *C* met een loodrechte verstekverbinding van *A* en *B* een verstekverbinding kan vormen.

In figuur 6 is te zien in welke richtingen balk *C* op het paar *A* en *B* geplaatst kan worden zodat er een correcte drievoudige verstekverbinding ontstaat, zonder de restrictie dat *C* in het bissectrice vlak ligt. De eindpunten van balk *C* liggen op een bol. De dikke lijnen geven de richtingen aan waar het rotatieverschil (het verschil in rotaties van de doorsnede van balk *C* die door *A* en *B* opgelegd worden) een veelvoud van 90° is. Op de evenaar bedraagt dit verschil in rotaties 0° . Er ontstaat een singulariteit wanneer de richting van *C* dezelfde is als die van *A* of *B*. Uit deze figuur blijkt dat de kromme gevormd door de eindpunten van *C*, die een correcte vertakte verstekverbinding mogelijk

maken, in vier afzonderlijke vlakken liggen (een daarvan is het horizontale vlak dat twee ‘vertakkingen’ bevat). Al deze vlakken bevatten ook de eindpunten van de balken *A* en *B*. We hebben dit nog niet bewezen en poneren het hier als een vermoeden. [Het vermoeden is onlangs door de auteur bewezen. (red.)]

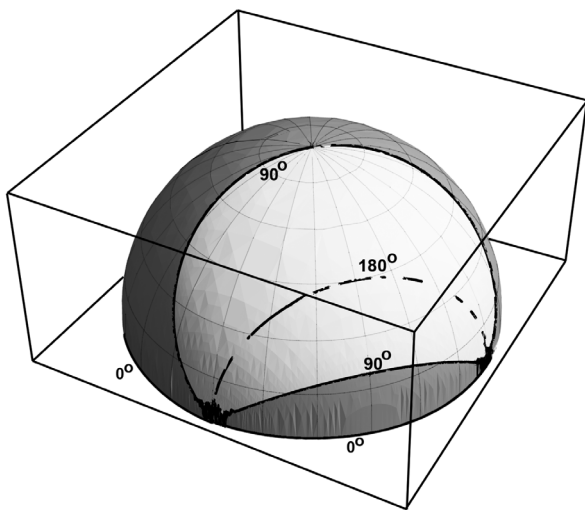


fig. 6 Grafiek van de rotatieverschillen.

In het algemeen klopt de drievoudige verstekverbinding wanneer het rotatieverschil een symmetrie is van de dwarsdoorsnede van de balk. Bij een vierkante balk komt dat overeen met veelvouden van 90° . Voor balken met een gelijkzijdige driehoek als dwarsdoorsnede moet het rotatieverschil veelvoud van 120° bedragen. Als de dwarsdoorsnede van de balk geen spiegelsymmetrieën heeft, dan is het niet mogelijk om een correcte drievoudige verstekverbinding te realiseren: de balken *A* en *B* dwingen doorsneden van balk *C* af die elkaars spiegelbeeld zijn, zie figuur 7

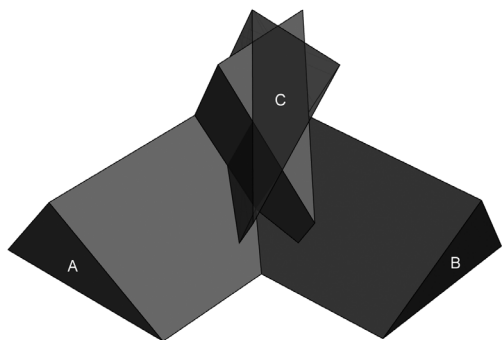


fig. 7 Een drievoudige verstekverbinding kan niet als de dwarsdoorsnede van de balk niet spiegelsymmetrisch is.

Een alternatief om dit allemaal te begrijpen is de voorstelling van een gesloten lineaire structuur die het pad *C, O, A, O, B, O, C* volgt, waarin *O* het centrale ontmoetingspunt is, en *A, B* en *C* de eindpunten van de balken *A, B* en *C*. In *A, B* en *C* stellen we ons gewone vouwverbindingen voor (Zie [1]) onder een hoek van 180° ; in

O bevinden zich de drie reguliere (tweevoudige) verstekverbindingen. Deze gesloten structuur met zes balken is zelf doorsnijdend, sterker nog, zowel op *OA* als op *OB* vallen twee balken samen. De twee balken op *OC* vallen niet noodzakelijkerwijs samen: dat hangt af van het verschil in rotatie van hun doorsnede. In [1] is dit de totale torsie langs het pad genoemd. Merk op dat het aantal vouwverbindingen drie is, een oneven aantal. Volgens het *Odd Fold Matching Theorem* [1] betekent dat dat er twee rotaties mogelijk zijn die een passende verbinding bij *C* opleveren. Deze twee verbindingen komen overeen met de eerder genoemde mogelijke drievoudige verstekverbindingen.

De onmogelijke kuboïde

In de lithografie van Eschers *Belvedere* zit naast de trappen een man die een onmogelijke kuboïde vasthoudt terwijl hij naar een tekening van een Neckerkubus kijkt.



fig. 8 Fragment van Escher's *Belvedere*.

Dit inspireerde Dick Baas Becking een ontwerp te maken van een object dat er, gezien vanuit het juiste gezichtspunt, uitziet als zo'n kuboïde, zonder toevoelucht te hoeven nemen tot een open structuur. De stichting *Ars en Mathesis* gaf Popke Bakker, een kunstenaar die bekend staat om zijn gebruik van verstekverbindingen, de opdracht om het ontwerp van Dick uit te voeren.

Het ontwerp bevat acht drievoudige verstekverbindingen. Het bleek verre van vanzelfsprekend te zijn hoe de details uit Dicks oorspronkelijke idee af te stemmen waren zodat alle verstekverbindingen netjes pasten. De tweede auteur, Koos Verhoeff, werd om hulp gevraagd om de klus te klaren. Hij begon met twee in elkaar grijpende vierkanten die met vier dwarsbalken verbonden werden. Maar dit leverde nog veel mogelijkheden op. Voor iedere configuratie kan de totale hoeveelheid afwijkingen berekend worden. Vervolgens schreef hij een computerprogramma dat naar een geschikte configuratie zoekt, door stap voor stap alle parameters zo aan te passen dat de totale afwijking minimaal werd. Na enig experimenteren leverde het

algorithmische, tot grote verrassing, een uitvoerbare oplossing, zie figuur 9..

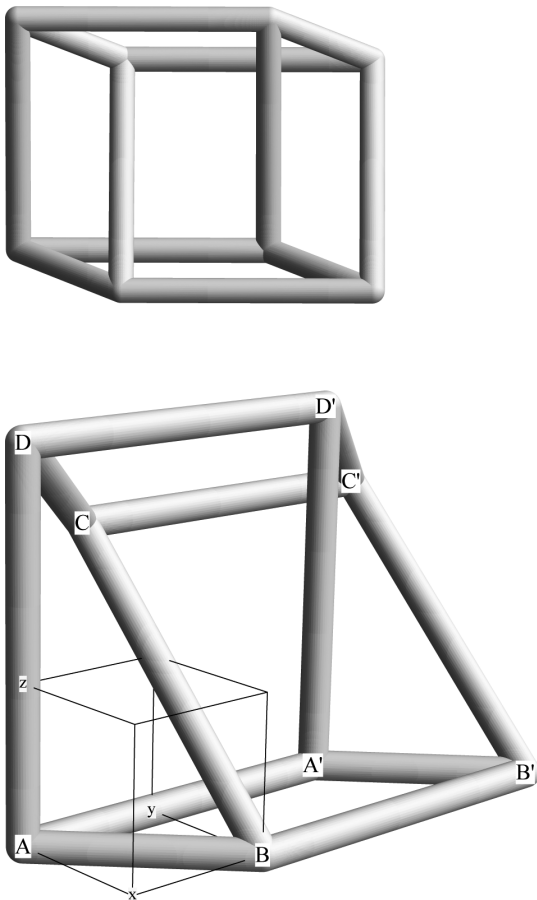


fig. 9 Buizenconstructie van de onmogelijke kuboïde.

Het definitieve ontwerp, zie figuur 10, bestaat uit twaalf vierkante balken verbonden door acht reguliere drievoudige verstekverbindingen. Zes van die verbindingen zijn van het type zoals links te zien is in figuur 4, de andere twee zijn van het rechtertype. (Deze twee zijn duidelijk herkenbaar op de foto van figuur 10.) Het ontwerp is als volgt helder te karakteriseren, zie de onderste tekening in figuur 9. De zes ‘ribben’ van de ‘kuboïde’ worden gevormd door twee congruente vierkanten ($AA'D'D$ en $BB'C'C$, met hoeken van 90°), twee congruente parallelogrammen ($AA'B'B$ en $CC'D'D$ met $\angle BAA' = \angle A'B'B = 45^\circ$ en $\angle AA'B' = \angle B'BA = 135^\circ$) en twee congruente niet-vlakke vierhoeken ($ABCD$ en $A'B'C'D'$ met $\angle ABC = \angle CDA = 60^\circ$ en $\angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$). Voor de verhouding tussen de verschillende lengtes geldt: $AB:BC = 1:1+1/\sqrt{2} \approx 7:12$. De balken zijn gerooteerd over $\arctan(\sqrt{2}-1) = 22,5^\circ$. Aanvankelijk waren we verbaasd dat dit ontwerp uit zulke ‘mooie’ hoeken bestaat. Achteraf gezien kan wel begrepen worden waarom dit ontwerp werkt, ook zonder toevlucht te nemen tot computeralgorithmen. Sterker nog, er is zelfs nog een andere oplossing, namelijk

wanneer de balken over 45° gerooteerd worden. Alle drievoudige verstekverbindingen veranderen dan van type. Popke Bakker heeft het oorspronkelijke ontwerp in verschillende materialen en afmetingen uitgevoerd. Een grote roestvrijstalen versie is te zien op de Kunst-route van de Erasmus Universiteit te Rotterdam.[3]



fig. 10 De onmogelijke kuboïde (Dick Baas Becking, Popke Bakker, Koos Verhoeff, 1988, Erasmus Universiteit Rotterdam).

Verstekverbindingen met meer dan drie takken

Als er vier balken met gelijke dwarsdoorsnede in een punt samenkomen, dan wordt het nog ingewikkelder. In dit geval moeten er maar liefst zes paren van tweevoudige verbindingen beschouwd worden. Als alternatief kan ook geprobeerd worden om aan een bestaande drievoudige verstekverbinding een vierde tak toe te voegen. Deze vierde balk moet dan een passende verstekverbinding maken met de overige drie balken. In het algemeen lukt dit niet door de balken op geschikte manier te roteren, zoals dat wel bij de drievoudige verbindingen ging. De keuze van de dwarsdoorsnede en de verbindingshoeken komt nogal ‘nauw’.

In [4] staat een afbeelding van een visvormig toestandsdiagram, zie figuur 11. Deze graaf beschrijft de mogelijke gedragingen van een vertragingsongevoelig systeem met twee ingangspoorten a en b en twee uitgangspoorten d en e. Het systeem begint in de centrale toestand met label 0 en iedere pijl komt overeen met een gebeurtenis op de bijbehorende poort. De twee knopen met label 1 stellen dezelfde toestand voor.

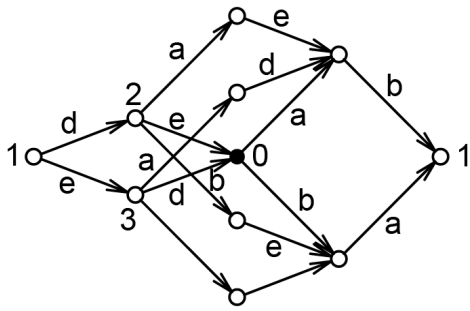


fig. 11 'Vis' toestandsgraaf.

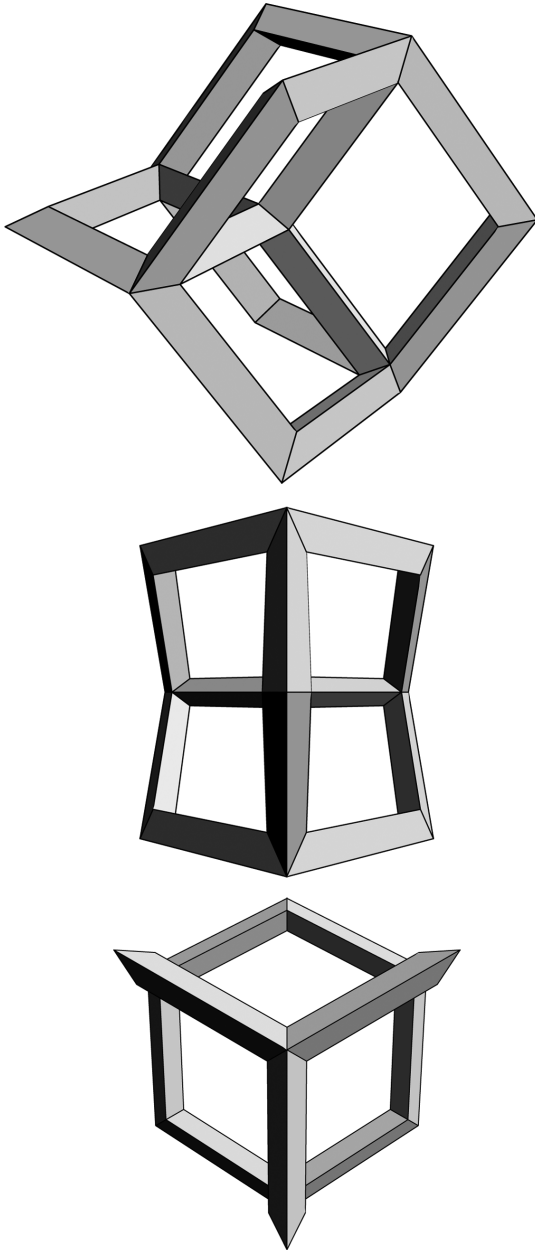


fig. 12 Object met viervoudige verstekverbindingen.

De tweede auteur heeft van deze graaf een 3D-voorstelling gemaakt zodat de pijlen elkaar niet snijden. In figuur 12 is dit ontwerp te zien vanuit verschillende

kijkhoeken en figuur 13 toont een tweetal houten uitvoeringen. Al deze sculpturen bestaan uit zestien balken met een gelijkzijdige driehoek als dwarsdoorsnede. Ze bezitten de symmetriën van de symmetriegroep S_4 , hetgeen ook de symmetriegroep van het tetraëder is. Op zes plaatsen komen twee balken samen en er zijn vijf reguliere viervoudige verstekverbindingen. Dit ontwerp kan niet met vierkante balken gemaakt worden.

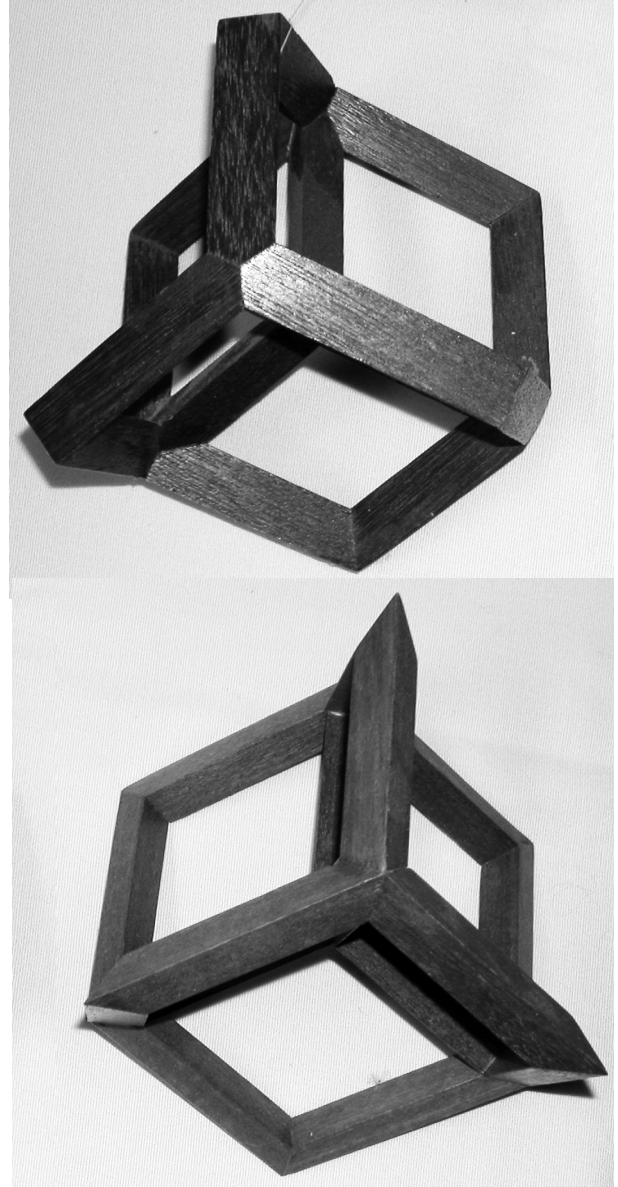


fig. 13 Vissculpturen (Koos Verhoeff 1994).

Conclusies

We hebben de voorwaarden gekarakteriseerd waaronder vertakte verstekverbindingen met meerdere balken die dezelfde dwarsdoorsnede hebben, gerealiseerd kunnen worden. In tegenstelling tot de tweevoudige verstekverbindingen leggen de vertakte verbindingen beperkingen op aan de combinaties van rotaties over de hartlijn van de balken en aan de ver-

stekhoek. Deze vertakte verstekverbindingen kunnen in kunstwerken toegepast worden, zoals is geïllustreerd. Tot slot, de fractaalbomen, ontworpen door Koos Verhoeff (zoals te zien op de expositie op de NWD), bevatten *niet* de drievoudige verstekverbindingen zoals die in dit artikel beschreven zijn. In deze fractaalbomen bevatten de zaagvlakken niet het punt waar de hartlijnen van de takken samenkomen. Het is meer zo dat de dikke tak op te vatten is als een aantal dunnere parallelle balken, die ieder verbonden zijn met een dunnere tak door een tweevoudige, al dan niet scheve, verstekverbinding. Dit wordt in een volgend artikel beschreven.

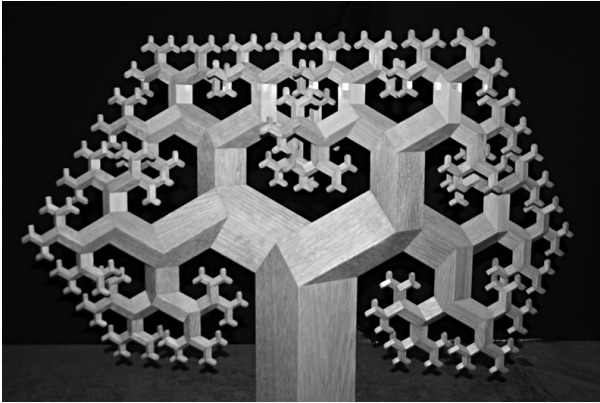


fig. 14 fractaalboom (ontwerp Koos Verhoeff, uitvoering Hans de Koning) zoals die op de NWD te zien was.

Tom Verhoeff, *Faculteit Wiskunde en Informatica,
Technische Universiteit Eindhoven*
Koos Verhoeff, *Valkenswaard*

Noten

- [1] Verhoeff, T., & Verhoeff, K. (2008). The Mathematics of Mitering and Its Artful Application, *Bridges Leenwarden: Mathematical Connections in Art, Music and Science, Proceedings of the Eleventh Annual Bridges Conference, in The Netherlands*, pp. 225-234, July 2008
(Te downloaden van <http://www.win.tue.nl/~wstomv/publications/mathmitering-final.pdf>)
- [2] Verhoeff, T. *Miter Joint and Fold Joint*. Zie *The wolfram Demonstration Project*, <http://demonstrations.wolfram.com/MiterJointAndFoldJoint/> (laatst bezocht: 7 september 2010)
- [3] Erasmus Universiteit Rotterdam. *Kunstroute* <http://www.eur.nl/kunstzaken/kunstroute/> (laatst bezocht: 9 september 2010)
- [4] Verhoeff, T. (1994). *A Theory of Delay-Insensitive Systems*. Dissertatie, Technische Universiteit Eindhoven, Faculteit wiskunde en informatica. ISBN 90-386-0353-3

Dit artikel is een vertaling en bewerking van *Branching Miter Joints: Principles and Artwork* dat verscheen in de proceedings van *Bridges 2010: Mathematics, Music, Art, Architecture and Culture*. July 2010, Pécs, Hongarije.

Vertaling: Tom Goris en Tom Verhoeff

Foto's: Koos Verhoeff

Illustraties: Tom Verhoeff