Rencontre-getallen geven aan op hoeveel manieren je een serie voorwerpen kunt laten wisselen van positie bij vooraf gekozen aantallen ‘zwervers’ en ‘plakkers’. Met een ‘soort’ driehoek van Pascal zijn deze getallen te berekenen. **Henk van Wijk** legt uit hoe dat in z’n werk gaat. Als statisticus werkte hij voor de Universiteiten Wageningen en Utrecht.

De boom staat niet ver van de appel

Over een eenvoudige recurrente betrekking tussen de rijen van de rencontre-driehoek

Inleiding

Voor kinderen is de driehoek van Pascal een spel. Met overgave tellen ze telkens twee bovenburen bij elkaar op en zo vormt zich stap voor stap een nieuwe rij van de driehoek.

1	1
1 1	1 1
1 2 1	1 2 1
1 3 3 1	1 3 3 1
1 4 6 4 1	1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1	1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1	1 6 15 20 15 6 1

Zonder het te weten, maken ze gebruik van een recurrente betrekking tussen opeenvolgende rijen in driehoeksmatrix[1] A. Deze betrekking luidt in formulevorm:

$$
\begin{aligned}
A(i,j) &= A(i-1,j) && \text{voor } j=1 \\
A(i,j) &= A(i-1,j-1) + A(i-1,j) && \text{voor } j>1
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Het doel van dit artikel is (nog eens?) te laten zien dat er tussen de rijen van een minder bekende driehoeksmatrix, die van de rencontre-getallen, een soortgelijke betrekking bestaat. De betrekking zelf is eenvoudig, haar afleiding iets minder. Ze komen in dit artikel pas in het tweede deel aan bod. Eerst volgt namelijk een korte uitweiding over wat rencontre-getallen zijn en hoe ze met behulp van een door Euler (1) afgeleide, eveneens recurrente, betrekking kunnen worden berekend. Ook enkele toepassingen worden getoond.

Rencontres, derangementen en hun getallen

Wanneer je de zes letters van het rijtje a-b-c-d-e-f op een willekeurige manier herschikt tot een tweede rijtje (permutatie), dan kan het gebeuren dat een bepaalde letter in beide rijtjes dezelfde plaats bezet. Op zo’n plaats ontmoeten beide rijtjes elkaar in zekere zin en daarom kreeg zo’n gebeurtenis in het jargon van de achttiende-eeuwse kansrekenaars de naam ‘rencontre’.

Een herschikking zonder rencontres noemde men een ‘derangement’: de totale verstoring van de oorspronkelijke volgorde.

Rencontre-getallen zijn de aantallen mogelijke permutaties bij een rijtje van n letters a-b-c-... onder de restrictie dat r letters terugkomen op hun oorspronkelijke plaats. Voor het geval $n = 6$ gaat het om de verdeling van $6! = 720$ permutaties over zeven categorieën. Immers, elk van die 720 rijtjes heeft minimaal $r = 0$ en maximaal $r = 6$ rencontres. Laten we (voor later) de categorieën aanduiden met $\mathrm{Cat}(n, r)$ en de daarin voorkomende aantallen permutaties, de rencontre-getallen, met $D(n, r)$.

De rencontre-getallen bij kleine n zijn eenvoudig te vinden door de mogelijke permutaties uit te schrijven en te groeperen naar rencontre-categorie.
Voor $n = 1, 2$ en 3 geeft dat:

	$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$
$n = 1$	-	a		
$n = 2$	ba	-	ab	
$n = 3$	bca cab	acb cba bac	-	abc

Dit overzicht levert negen rencontre-getallen op, oftewel drie rijen uit de rencontre-driehoeksmatrix D:

$D(1, 0) = 0 \quad D(1, 1) = 1$

$D(2, 0) = 1 \quad D(2, 1) = 0 \quad D(2, 2) = 1$

$D(3, 0) = 2 \quad D(3, 1) = 3 \quad D(3, 2) = 0 \quad D(3, 3) = 1$

Voor de berekening van de rijen van D bij $n = 4$ en groter nemen we voorlopig onze toevlucht tot de door Euler afgeleide relatie (2), die in het tweede deel regelrecht zal blijken voort te vloeien uit de daar te ontwikkelen betrekking (5). De formule van Euler luidt:

$$D(n+1, 0) = n*[(D(n, 0) + D(n-(1, 0))] \qquad (2)$$

In combinatie met de waarden $D(1, 0)=0$ en $D(2, 0)=1$ leidt dit tot de zogenaamde derangement-getallen:

$0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854\ldots$ oftewel de elementen van de eerste kolom (kolom 0) van D. Hieronder staan rij 0 tot en met 6 van D weergegeven.

n, r	0	1	2	3	4	5	6
0	*						
1	0	1					
2	1	0	1				
3	2	3	0	1			
4	9	8	6	0	1		
5	44	45	20	10	0	1	
6	265	264	135	40	15	0	1

Dankzij de evidente[2] relatie

$$D(n, r) = {}_nC_r * D(n-r, 0) \qquad (3)$$

zijn nu alle overige elementen van D te berekenen. Bijvoorbeeld: $D(6, 2) = {}_6C_2 * D(4, 0) = 15 * 9 = 135$. In het tweede deel van dit artikel wordt getoond hoe $D(6, 2) = 135$ ook te voorschijn komt uit een slimme combinatie van zijn bovenburen $D(5, 1)$, $D(5, 2)$ en $D(5, 3)$. Om van de matrix D een echte driehoek te maken, zullen we het element $D(0, 0)$ moeten definiëren. De waarde $D(0, 0) = 1$ ligt voor de hand. Dan immers ontstaat een diagonaal van enkel enen, en dan immers werkt de formule van Euler voor de berekening van $D(2, 0) = 1$. En de volgende redenering leidt eveneens tot een 1 aan de top: kijk, naar analogie van de lege verzameling, eens naar 'het lege rijtje'. Daar is er ook maar een van, spreken we af, en in dat ene exemplaar staat geen enkele letter op zijn plaats. Vandaar de keuze voor $D(0, 0) = 1$.

Een schoolvoorbeeld van een discrete kansvariabele ligt hier voor het oprapen: Denk aan de kansvariabele r die staat voor het aantal rencontres tussen een gegeven rijtje van n letters en een nieuw rijtje dat ontstaat door willekeurige herschikking van de letters. Onder de aanname dat alle mogelijke permutaties gelijke kans $1/n!$ hebben, geldt dat de kans op $r = 0$ gelijk is aan $D(n, 0) * 1/n!$ en, meer algemeen, dat de kans op $r = x$ gelijk is aan $D(n, x) * 1/n!$. Door alle elementen van D, rij voor rij, te delen door $n!$ ontstaat een nieuwe driehoek waarin elke rij de kansverdeling voorstelt van de kansvariabele r met aantal-letters-parameter n.

n, r	0	1	2	3	4	5	6
0	1,0000						
1	0,0000	1,0000					
2	0,5000	0,0000	0,5000				
3	0,3333	0,5000	0,0000	0,1667			
4	0,3750	0,3333	0,2500	0,0000	0,0417		
5	0,3667	0,3750	0,1667	0,0833	0,0000	0,0083	
6	0,3681	0,3667	0,1875	0,0556	0,0208	0,0000	0,0014

Zo lezen we in bovenstaande driehoek dat een willekeurige permutatie van vijf letters van een gegeven rijtje met kans $0,1667$ twee rencontres te zien geeft. Kennis van de kansverdeling van r is de sleutel tot de oplossing van een serie raadsels die hieronder aan bod komen.

Veel serieuze toepassingsgebieden van voorgaande theorie zijn niet te noemen. Velen rekenen dit gecijfer tot het gebied van de *recreational mathematics*. Drijfveer voor de vroegste puzzelaars, Pierre Raymond de Montmort (1678-1719), Nicolas Bernoulli (1687-1759) en Leonhard Euler (1707-1783) was het kaartspel 'Le jeu de rencontre'. Het spel gaat uit van twee kaartspelen van 52 kaarten elk, waarvan tenminste één spel deugdelijk is geschud. Twee spelers wedden om de vraag wat er gaat gebeuren als van beide stapels gelijktijdig de bovenste kaart wordt omgedraaid en vervolgens de kaart die dan bovenop ligt en zo maar door. Komt het moment dat beide stapels eenzelfde kaart te zien geven? Zo ja, dan sprak men van een rencontre. Het spel was dan uit en de winnaar was degene die op die uitslag had ingezet. Euler berekende dat een goktent een bedrag van $2,71828\ldots$ keer de inzet kan uitbetalen aan spelers die met succes hebben gewed op het uitblijven van een rencontre. Dat benadert het naar hem genoemde getal e. Wordt het spel met stapeltjes van slechts zes kaarten gespeeld, dan is de kans op geen rencontres en dus de winstkans gelijk aan $\frac{265}{6!} = 0,3681$. De vergelijking:

$$\text{Inzet} = \text{Prijs} * \text{Winstkans} \qquad (4)$$

heeft dan als oplossing
$\text{Prijs} = \text{Inzet} * 1/\text{Winstkans} = \text{Inzet} * 2,7170$.
Het is verbazingwekkend hoe snel de breuk
$n!/D(n, 0)$ zijn limiet e nadert.

Een tweede toepassing betreft, als voorbeeld, een dame die beweert dat zij door haar bijzonder ontwikkelde smaak en kennis van theesoorten in staat is om bij ieder kopje thee dat men haar aanbiedt de soort te noemen waarmee het is gezet. Rencontre-getallen bieden de mogelijkheid om dit soort pretenties te testen. We bieden haar zes genummerde kopjes thee aan die gezet zijn met zes verschillende theesoorten. Ook krijgt zij de lijst met namen van de zes soorten thee en de opdracht om aan te geven welk kopje met welke soort is gezet. Stel nu dat zij vier van de zes kopjes juist weet te klasseren. Dan weten wij dankzij de rencontre-driehoek dat een dergelijk resultaat bij volkomen willekeurige toewijzing slechts met kans $(15 + 0 + 1)/720 = 0,0222$ wordt geëvenaard of overtroffen. De hypothese dat deze dame niet beter presteert dan een pure gokker wordt verworpen. Als proever van soorten thee verdient zij zeker ons respect.

Kennis van de kansverdeling van de kansvariabele r voor $n = 1, 2, 3\ldots$ zoals eerder besproken, levert de oplossing van een reeks, deels oubollige, raadseltjes die overvloedig circuleert in de literatuur (Feller) en op het internet. Wat is de kans dat het lootjes trekken voor pakjesavond bij de eerste trekking al een bruikbaar resultaat geeft? Of dat van zes heren er precies drie hun eigen hoed niet terugkrijgen van een geblinddoekte garderobehouder? Of dat geen enkele van tien brieven zijn bestemming bereikt nadat ze door een verstrooide secretaresse lukraak in voorgeadresseerde enveloppen zijn gestopt. Toch is dit allemaal geen reden om het onderwerp als nutteloos weg te zetten. Wie goed zoekt op het internet, komt ook toepassingen tegen op het gebied van de akoestiek.

Hoe permutaties nieuwe permutaties voortbrengen

Er bestaat een operatie die, uitgevoerd op een willekeurige permutatie van n letters, $n+1$ permutaties van $n+1$ letters oplevert. In onderstaand voorbeeld voeren we de operatie uit op de permutatie abc met d als toe te voegen letter.

					d	
abc	==>	abc.	==>	abc.	==>	abcd
				.bca		dbca
				a.cb		adbc
				ab.c		abdc

Nieuwe permutaties komen tot stand doordat achter de bestaande permutatie een nieuwe positie wordt gecreëerd. Deze biedt plaats aan de nieuwe letter of aan een reeds aanwezige letter. In het laatste geval komt door de verplaatsing een positie vrij die wordt gevuld door de nieuwe letter.

Een ware stamboom van permutaties ontstaat wanneer we de voortgebrachte permutaties onderwerpen aan dezelfde operatie en de daarbij voortgebrachte permutaties weer opnieuw en opnieuw... Het onderstaande boomdiagram toont alle nakomelingen van de 'permutatie' a tot in de vierde generatie. Met deze operatie blijken we een instrument in handen te hebben waarmee we bij elk gewenst aantal letters de complete lijst van mogelijke permutaties kunnen produceren.

		/	cab ==>	dabc	cdba	cadb	cabd
	ba	-	bca ==>	dcab	bdac	bcda	bcad
/		\	bac ==>	dacb	bdca	badc	bacd
a							
\		/	cba ==>	dbac	cdab	cbda	cbad
	ab	-	acb ==>	dcba	adbc	acdb	acbd
		\	abc ==>	dbca	adcb	abdc	abcd

Dit te bewijzen is een leerzame oefening voor de lezer. Graag willen we nu zicht krijgen op de vraag hoe, binnen opeenvolgende generaties, de permutaties verdeeld zijn over de categorieën:

– permutaties met 0 rencontres
– permutaties met 1 rencontre
– permutaties met 2 rencontres
– etc.

Ter herinnering I

Een rencontre is de gebeurtenis dat een letter in een permutatie op zijn 'eigen' plaats staat. Zo heeft acdb drie 'verdwaalde' letters en één rencontre.

Ter herinnering II

Het aantal mogelijke permutaties van n letters is $n(n-1)(n-2)\ldots*1 = n!$ Deze $n!$ permutaties zijn verdeeld over de $n+1$ rencontre-categorieën. De aantallen permutaties in deze categorieën heten rencontre-getallen.

Notatie-afspraak

$\mathrm{Cat}(n,r)$ de categorie permutaties van n letters met r rencontres

$\mathrm{D}(n,r)$ aantal permutaties in $\mathrm{Cat}(n,r)$
rencontre-getal bij n letters en r rencontres
element (n,r) van de rencontrematrix D

De appel valt niet ver van de boom

Bij uitvoering van de eerder gedefinieerde operatie verandert, per nakomeling, maximaal één letter van plaats. Het aantal rencontres in een nakomeling kan daarom zeker niet sterk afwijken van het aantal rencontres in de ouder. Er kunnen zich drie situaties voordoen:

a. de nieuwe letter komt waar zich een rencontre bevond
b. de nieuwe letter vervangt een verdwaalde letter
c. de nieuwe letter sluit achter aan.

Afhankelijk van de situatie (a, b of c) zal de nakomeling, met betrekking tot het aantal rencontres, een stap maken van -1, 0 of +1.

Eigenschap I:

Als een permutatie van n letters r rencontres bevat en $n-r$ verdwaalde letters, dan bevinden zich na de operatie onder de $n+1$ nakomelingen:

– r permutaties met $r-1$ rencontres (mits $r > 0$)
– $n-r$ permutaties met r rencontres
– 1 permutatie met $r+1$ rencontres.

Voorbeeld :

	f		afbced	
adbce	==>	fdbcea	adfceb	
		adbcfe	adbfec	adbcef
		(-1)	(+0)	(+1)

De boom staat niet ver van de appel

Omdat een nakomeling hooguit één rencontre meer of minder heeft dan zijn ouder, staat bij voorbaat vast dat:

Eigenschap II

Permutaties van $n+1$ letters met r rencontres zijn afkomstig van maximaal drie categorieën ouders: $\mathrm{Cat}(n, r-1)$, $\mathrm{Cat}(n, r)$ of $\mathrm{Cat}(n, r+1)$.

Dankzij de hierboven genoemde eigenschappen is het mogelijk om aan te geven welke aantallen permutaties $\mathrm{Cat}(n, r-1)$ tot en met $\mathrm{Cat}(n, r+1)$ toeleveren aan $\mathrm{Cat}(n+1, r)$:

- $\mathrm{Cat}(n, r-1)$ levert $\mathrm{D}(n, r-1) * 1$ permutaties aan $\mathrm{Cat}(n+1, r)$, mits $r > 0$
- $\mathrm{Cat}(n, r)$ levert $\mathrm{D}(n, r) * (n-r)$ permutaties aan $\mathrm{Cat}(n+1, r)$
- $\mathrm{Cat}(n, r+1)$ levert $\mathrm{D}(n, r+1) * (r+1)$permutaties aan $\mathrm{Cat}(n+1, r)$

Hieruit volgt de recurrente betrekking (5):

$\mathrm{D}(n+1, r) = \mathrm{D}(n, r)*(n-r)+\mathrm{D}(n, r+1)*(r+1)$ voor $r = 0$

$\mathrm{D}(n+1, r) = \mathrm{D}(n, r-1)+\mathrm{D}(n, r)*(n-r)+\mathrm{D}(n, r+1)*(r+1)$ voor $r > 0$

De uitzonderingspositie voor $r = 0$ komt voort uit het feit dat $\mathrm{Cat}(n+1, 0)$ zoals hierboven aangegeven slechts permutaties krijgt toegeleverd uit $\mathrm{Cat}(n, 0)$ en $\mathrm{Cat}(n, 1)$. Van deze betrekking naar de formule van Euler is twee stappen:

$\mathrm{D}(n+1,0)$	$= \mathrm{D}(n,0) * n + \mathrm{D}(n,1)$	toepassing van(5)
	$= \mathrm{D}(n,0) * n + n\mathrm{C}1 * \mathrm{D}(n-1,0)$	toepassing van(3)
	$= n * [\mathrm{D}(n,0) + \mathrm{D}(n-1,0)]$	formule van Euler

Toepassing van de gevonden recurrente betrekking op de reeds bekende D(2,0) tot en met D(2,2) en D(3,0) tot en met D(3,3) geeft:

D(3,0)=		D(2,0)*(2-0)	+ D(2,1)*1	=	1*2 + 0*1	=2
D(3,1)=	D(2,0)+	D(2,1)*(2-1)	+ D(2,2)*2	=1	+ 0*1 + 1*2	=3
D(3,2)=	D(2,1) +	D(2,2)*(2-2)		=0	+ 1*0	=0
D(3,3)=	D(2,2)			=1		=1

D(4,0)=		D(3,0)*(3-0)	+ D(3,1)*1	=	2*3 + 3*1	=9
D(4,1)=	D(3,0) +	D(3,1)*(3-1)	+ D(3,2)*2	=2	+ 3*2 + 0*2	=8
D(4,2)=	D(3,1) +	D(3,2)*(3-2)	+ D(3,3)*3	=3	+ 0*1 + 1*3	=6
D(4,3)=	D(3,2) +	D(3,3)*(3-3)		=0	+ 1*0	=0
D(4,4)=	D(3,3)			=1		=1

Wie meer verbaal is ingesteld, kan steun hebben aan de volgende verwoording van recursieve formule (5):

> Een nieuw rencontre-getal vind je door optelling van de linker bovenbuur (mits bestaand) + de midden bovenbuur maal zijn aantal verdwaalde letters + de rechter bovenbuur maal zijn aantal rencontres

Hierbij gebruiken we 'zijn aantal verdwaalde letters' en 'zijn aantal rencontres' om verkort de aantallen verdwaalde letters respectievelijk rencontres aan te duiden die karakteristiek zijn voor de categorieën waarvan genoemde bovenburen de omvang aanduiden.

Toepassing van de recursieve formule uit (5) of het verbale voorschrift leveren voor D(6,2) en D(7,0):

D(6,2) =	45 +	20*(5-2) +	10*3	=	135
D(7,0) =		265*(6-0) +	264*1	=	1854

Het is de wens van de auteur dat de lezer nu met kinderlijk plezier ook de resterende getallen bij n=7 berekent[3].

Henk van Wijk,
Bennekom

Literatuur

Euler, L. (1811). Solutio quaestionis curiosae ex doctrina combinationum. *Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Petersbourg, 3*, 57-64

Euler, L. (1751). Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre. *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, 7*

Feller, W. (1950). *An introduction to probability theory and its applications. vol.1*.

Noten

[1] In een (beneden)driehoeksmatrix zijn alle elementen rechts van de diagonaal gelijk aan 0. Die nullen worden vaak weggelaten. Maar voor de berekening van onder andere de diagonale elementen van A met behulp van (1) zijn ze essentieel.

[2] Bij elk r-tal gebonden letters resten er nog n-r vrije letters en die zijn op $\mathrm{D}(n-r,0)$ manieren te herschikken zonder extra rencontres te veroorzaken. Er zijn ${}_nC_r$ van zulke r-tallen.

[3] Het huiswerk voor modelspoorwegbouwers en flipperkastontwerpers luidt: construeer een netwerk van banen en wissels, en wel op zo'n manier dat het wagonnetje of de knikker bij opeenvolgende driesprongen een vervolgbaan kiest (links, rechtdoor, rechts) met de door Eigenschap I gedicteerde kansen $r/(n+1)$, $(n-r)/(n+1)$ en $1/(n+1)$ naar analogie van het Galtonbord. Liefhebbers van Excel kunnen 'alle' rencontre-getallen genereren door één keer betrekking 5 in te voeren en daarna met 'copy-paste' het 'hele' werkblad ermee te bedekken.