De open course *Logic in Action* is in principe bedacht en geschreven voor eerstejaarsstudenten van de Universiteit van Amsterdam die met logica te maken hebben. Logica is veel meer dan alleen een onderdeel van wiskunde of filosofie. Tijdens de openingslezing van de vorige NWD werd duidelijk dat deze open course ook leerlingen uit het voortgezet onderwijs kan aanspreken. **Johan van Benthem** en **Jan Jaspars** laten zien waar de open course over gaat.

Open Course Logic in Action

Logicaonderwijs langs nieuwe wegen

Inleiding

Logica wordt op Nederlandse universiteiten aan grote groepen studenten onderwezen. Bij nieuwe interdisciplinaire studies die veel studenten trekken, wordt logica vaak in het eerstejaarsprogramma opgenomen. In het onderwijsproject 'Logic in Action' (logicinaction.org), dat medio 2009 op de Universiteit van Amsterdam van start ging, wordt modern lesmateriaal ontworpen, schriftelijk en elektronisch, voor inleidend logicaonderwijs aan deze groeiende groep studenten. Dit materiaal lijkt ook de moeite waard voor sommige groepen leerlingen in het middelbaar onderwijs.

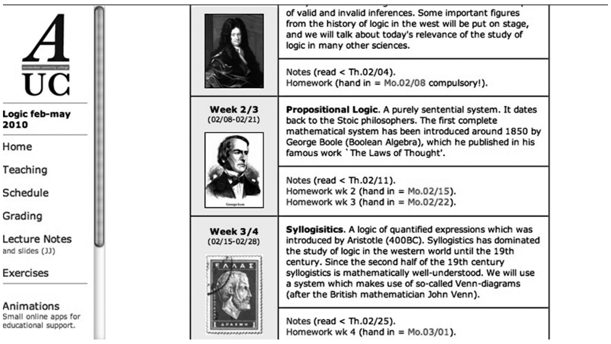

fig. 1 Aan verschillende universiteiten (Amsterdam, Beijing en Stanford) werden al colleges gegeven met behulp van het materiaal van 'Logic in Action'. Hierboven de website van zo'n college aan het Amsterdam University College voor tweehonderd eerstejaars studenten.

Achter deze ontwikkeling in het onderwijs schuilt een evolutie in het wetenschappelijk onderzoek. Logica is niet langer alleen de discipline van exacte argumentatie in de grondslagen van de wiskunde en filosofie, maar een algemene wetenschap die zich richt op representatie, analyse en overdracht van informatie. Die interesse wordt gevoed door vele contacten tussen logica en informatica, maar dan de moderne informatica als studie van communicerende en samenwerkende 'intelligent agents', eerder dan de loutere ingenieurskunde van machines. De logica levert inmiddels modellerings- en rekenmethoden voor een breed bereik aan disciplines, van de wiskunde en informatica tot de geestes- en menswetenschappen. Het recente 'strategic research program' LOGICCC (Modeling Intelligent Interaction: Logic in the Humanities, Computational and Social Sciences) van de European Science Foundation geeft hiervan een goede indruk.

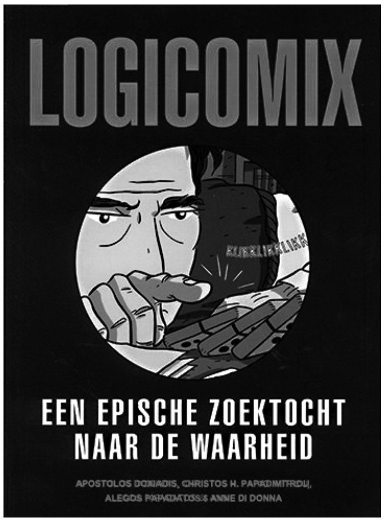

fig. 2 De cover van de Nederlandstalige versie van 'Logicomix'.

De logici zelf mogen zich ook verheugen op een brede belangstelling bij de belezen burger, zoals bijvoorbeeld blijkt uit het recente succes van *Logicomix*, een stripverhaal over het leven van Bertrand Russell en de grondslagenstrijd in de wiskunde van rond de eeuwwisseling.

fig. 3 Drie logici in de TIME-Magazine top-20 van belangrijkste personen van de twintigste eeuw. V.l.n.r. Gödel, Turing en Wittgenstein.

In de TIME-Magazine top-20 van belangrijkste intellectuelen van de twintigste eeuw stonden drie logici. Logica ligt soms ook wat dichter bij de student dan andere vakken, door het aspect van 'denken over je eigen denken'. Illustratief is de volgende verzuchting van een student in een cursus aan het Amsterdam University College:

> "Een onvoldoende voor wiskunde vind ik aanvaardbaar. Getallen, lijnen en grafieken behoren tot een externe wereld die niet de mijne is. Maar logica gaat over mijn eigen denken. Een onvoldoende hiervoor is een persoonlijke nederlaag."

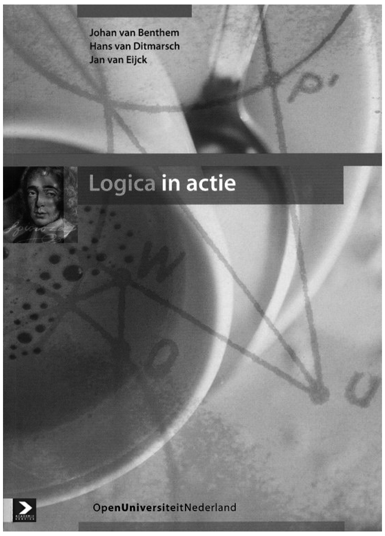

fig. 4 De voorkant van het Nederlandstalige boekje van de Open Universiteit Heerlen, Logica in Actie.

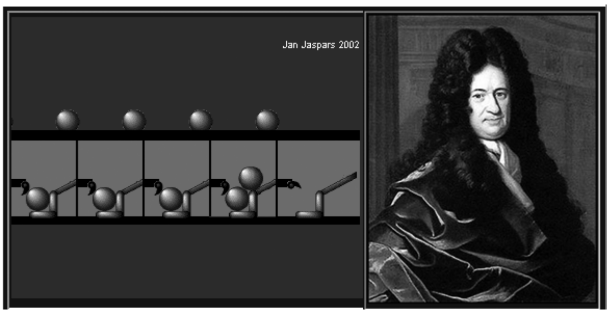

fig. 5 De uitvinding van het machinale binaire rekenen: de 'mechanica dyadica' van Leibniz (1700, alleen op papier beschreven). Gelukkig waren oude filosofen als Leibniz niet vies van ingenieurswerk. Honderdvijftig jaar later pas werd de relatie tussen binair rekenen en logica gelegd (Boole), en pas honderd jaar daarna gebruikt om elektronische computers eenvoudig te laten rekenen.

Logica en wiskunde

Van oudsher hebben logica en wiskunde nauwe contacten. Zo heeft Euclides' *Elementen* naast echte meetkundige principes, zoals het Parallellenpostulaat, ook 'algemene begrippen', universele logische wetten zoals het volgende principe van gelijkheid: "Twee objecten die beide gelijk zijn aan een derde object zijn gelijk aan elkaar". De grens tussen logica en wiskunde is dan ook vloeiend, en de moderne logica berust essentieel op wiskundige methoden. Logische begrippen als geldig gevolg of waarheid laten zich wiskundig bestuderen, een inzicht dat al teruggaat tot Leibniz (eind zeventiende eeuw) die het menselijk redeneren zag als rekenen. 'Leibniz' droom' was dat door formalisering van onze natuurlijke taal en expliciet maken van redeneerstappen foutieve conclusies zouden voorkomen kunnen worden, en verschillen van mening beslecht zouden worden door objectieve berekening ("Calculemus!"). Hij veronderstelde zelfs dat dit rekenwerk uiteindelijk overgelaten zou kunnen worden aan machines.

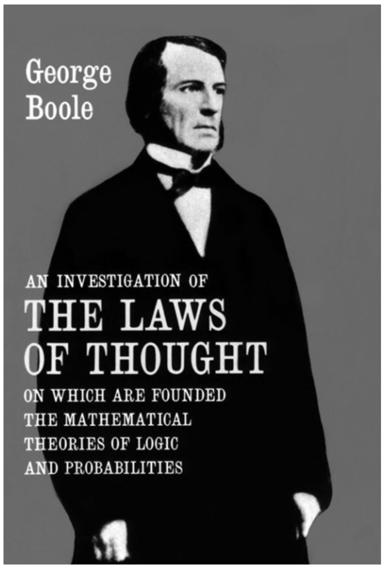

fig. 6 George Boole op de voorkant van een moderne uitgave van zijn Laws of Thought *(1846).*

Halverwege de negentiende eeuw gaf George Boole in zijn vermaarde *Laws of Thought* inderdaad een systeem van algebraïsche vergelijkingen dat simpele vormen van logisch redeneren formaliseerde. De variabelen lopen niet meer over getallen, maar over beweringen (proposities) of eigenschappen (verzamelingen). De algebraïsche operaties weerspiegelen dan logische operaties als de voegwoorden 'en', 'of' en 'niet', of kwantoren als 'alle', 'sommige' en 'geen'. Latere logici hebben vele uitbreidingen voor het algebraïsche systeem van Boole bedacht, met Charles Saunders Peirce als een beroemde vertegenwoordiger. Verder in Leibniz' meer praktische lijn, bouwde Stanley Jevons de eerste redenerende machine, de 'logische piano', een houten apparaat waarmee de geldigheid van eenvoudig gekwantificeerde gevolgtrekkingen (syllogismen) berekend kon worden. De weg naar de moderne computer lag in principe open, al zou dit nog een eeuw duren.

- x → (y → x)
- (x → (y → z)) → ((x → y) → (x → z))
- (-x → -y) → (y → x)

fig. 7 De drie axioma's in symbolische notatie. Het eerste zegt, 'x blijft behouden nadat zij versterkt is met y' (monotonie). De tweede stelt de transiviteit voor, 'als .. dan ..', en de derde is 'contrapositioneel redeneren': indien y waar is, kan ik de waarheid van x aantonen door te laten zien dat de aanname dat x onwaar is tot een tegenspraak met y leidt $(-x \to -y)$*. In het volgende beschrijven we kort de klassieke en moderne thema's in de logica die samen komen in onze opencourse Logic in Action. Een meer uitgebreide versie is te vinden in het gratis downloadbare boekje Logica in Actie van de Open Universiteit te Heerlen.*

Moderne logische systemen gebruiken doorgaans niet-algebraïsche notaties. In figuur 7 ziet u een klein voorbeeld, met een pijltje (→) voor een logische implicatie, en een streepje (-) voor negatie. Het volgende systeem (afkomstig van Jan Lukasiewicz, 1910) bestaat uit slechts drie axioma's en de afleidingsregel 'modus ponens': "indien de uitspraak $x \to y$ aangetoond is, en ook x, dan kan worden geconcludeerd tot y'. De variabelen x, y,... staan voor willekeurige beweringen. Gebruikmakend van de drie gegeven axioma's en de modus ponens-regels komt men steeds weer tot nieuwe logisch geldige principes. Het is nooit mogelijk om een ongeldige uitspraak af te leiden – het systeem is correct – en bovendien is er voor elk geldig principe betreffende implicatie en negatie een bewijs in dit systeem te geven - het systeem is 'volledig'.

Zo'n 'axiomatisch' systeem kan weer vervangen worden door een zogenaamd natuurlijk deductiesysteem (Gerhard Gentzen, 1938) dat uit afleidingsregels bestaat. Voor het implicatietaaltje van hierboven kunnen de drie axioma's vervangen worden door twee regels zoals we die gebruiken in wiskundige bewijsvoering. Hierbij wordt gebruik gemaakt van hypothesen en veronderstellingen. De twee regels luiden:

> $x \to y$ *is bewezen als* y *bewezen kan worden onder de veronderstelling dat* x.
>
> *x is bewezen als een tegenspraak bewezen kan worden uit de veronderstelling dat -x.*

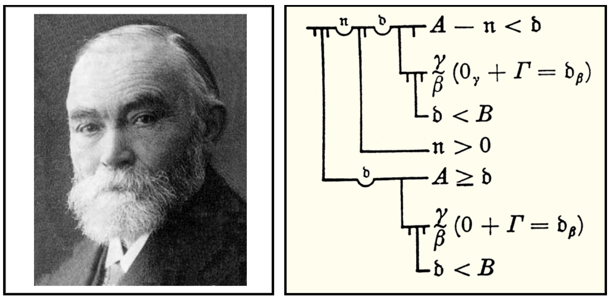

fig. 8 Gottlob Frege, met ter rechterzijde een originele notatie van het Begriffschrift. Tegenwoordig gebruikt men doorgaans een lineaire notatie, die ook gangbaar is in hedendaagse wiskundeteksten.

De ware doorbraak van de logica binnen de wiskunde werd geïnitieerd door het werk van Gottlob Frege. Rond 1880 introduceerde hij het *Begriffschrift*, een veel rijker logisch formalisme dan dat van Boole. Binnen de logica zelf was dit een verdere stap voorwaarts in de formalisering van menselijk redeneren, maar in de verhouding met de wiskunde ontstond een omkering van perspectief. Het logische systeem van Frege is voldoende krachtig om iedere wiskundige bewering formeel te noteren. Daarmee leent zo'n systeem zich om wiskundige bewijzen te bestuderen, en daarmee de grondslagen van wiskundige theorieen, zoals vervolgens gebeurde in het werk van Bertrand Russell en David Hilbert. Het 'grondslagenonderzoek van de wiskunde' zocht met name naar bewijzen dat wiskundig redeneren contradictievrij is, als sluitstuk op de historische beweging naar grotere precisie die de wiskunde in de negentiende eeuw had gekenmerkt. De grootste resultaten van deze periode werden geboekt in de dertiger jaren. Centraal punt zijn de 'onvolledigheidsstellingen' van Kurt Gödel die ruwweg zeggen dat voldoende sterke wiskundige theorieën (die op zijn minst enige elementaire rekenkunde bevatten) niet alle ware beweringen in hun domein kunnen bewijzen, en voorts dat dergelijke theorieën, indien consistent, niet in staat zijn hun eigen consistentie te bewijzen. Hoewel 'negatief' geformuleerd, zijn deze resultaten het begin geworden van een stormachtige ontwikkeling van nieuwe methoden en inzichten om bewijskracht van wiskundige theorieën te bepalen, evenals hun relatie tot de wiskundige werkelijkheid. Zelfs als er geen wiskundige garanties zijn af te geven voor de consistentie van de wiskunde, dan kan men dit ook interpreteren als een vrijbrief voor creativiteit. Moderne theorieën van cognitie zien het wezen van menselijke intelligentie in ons vermogen, niet tot vlekkeloze correctheid, maar tot het corrigeren van gebleken fouten.

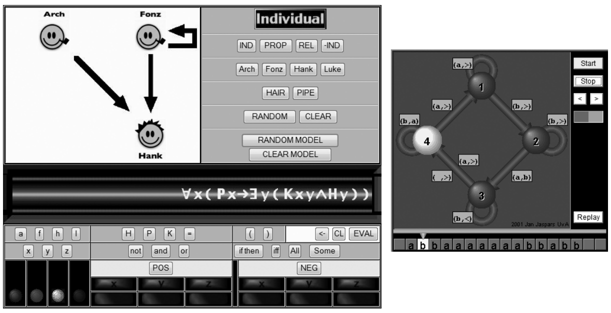

fig. 9 Een programmaatje om kennis te maken met predikatenlogica (links) en een simpele Turing machine op de site van 'Logic in Action'.

Er zijn in deze bloeiperiode overigens vele positieve resultaten geboekt van een algemenere logische strekking. Het beroemdste voorbeeld komt weer van Gödel: in zijn proefschrift bewees hij dat Frege's predikatenlogica een volledige beschrijving geeft van alle geldige principes voor redeneren met Boolese operaties en kwantoren over willekeurige structuren. De predikatenlogica is daarmee nog steeds de kern van iedere serieuze inleiding in de moderne logica.

Logica en informatica

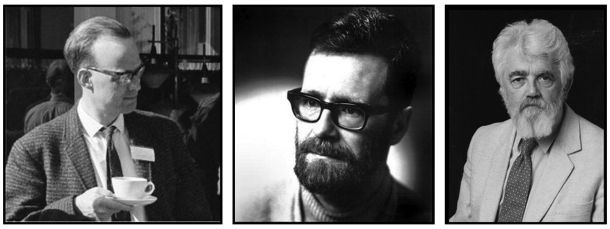

fig. 10 Pioniers van de informatica. Links Tony Hoare van de 'Hoare Logica', een systeem voor het bewijzen van correctheid van computerprogramma's, een voorganger van de dynamische logica. In het midden Edsger Dijkstra die systemen ontwikkelde om correctheidsbewijzen dichter te laten aansluiten bij de programma's zelf. Rechts John McCarthy, ontwerper van de programmeertaal LISP, gebaseerd op Church' lambda calculus, en ook een der pioniers van de 'kunstmatige intelligentie'.

Met de formele wiskundige studie van redeneren kwam ook de mechanisering ervan in beeld. Alan Turing gaf in de jaren dertig de eerste wiskundig precieze definitie van rekenmachines. Weer kwamen toen in eerste instantie juist beperkingen op formele berekenbaarheid aan het licht: Turing bewees met name (in het voetspoor van Cantors en Gödels 'diagonaalargumenten') dat er geen mechanische methode bestaat om te testen of een gegeven rekenprogramma op een gegeven invoer 'termineert', dat wil zeggen, stopt met een antwoord. In dezelfde geest bewees Alonzo Church dat hiermee ook een eind komt aan 'Leibniz' Droom': geldigheid van gegeven gevolgtrekkingen in de predikatenlogica is in zijn volle algemeenheid niet mechanisch te berekenen. Maar weer bleek dit geen eind maar een begin: de machinemodellen van deze periode, en daarmee verbonden technieken als coderen van bewijzen en gegevensstructuren in natuurlijke getallen, stonden aan het begin van de moderne informatica. Turing zelf gebruikte zijn model na de Tweede Wereldoorlog in zijn ontwerp voor de verwezenlijking van de eerste Britse computers. Het systeem van Church werd later in de zestiger jaren gebruikt bij de ontwikkeling van geavanceerde programmeertalen. Met de formele wiskundige studie van redeneren kwam ook de mechanisering ervan in beeld. Alan Turing gaf in de jaren dertig de eerste wiskundig exacte definitie van rekenmachines. Weer kwamen toen in eerste instantie juist beperkingen op formele berekenbaarheid aan het licht: Turing bewees met name (in het voetspoor van Cantors en Gödels 'diagonaalargumenten') dat er geen mechanische methode bestaat om te testen of een gegeven rekenprogramma op een gegeven invoer 'termineert', dat wil zeggen, stopt met een antwoord. In dezelfde geest bewees Alonzo Church dat hiermee ook een eind komt aan 'Leibniz' Droom': geldigheid van gegeven gevolgtrekkingen in de predikatenlogica is in zijn volle algemeenheid niet mechanisch te berekenen. Maar weer bleek dit geen eind maar een begin: de machinemodellen van deze periode, en daarmee verbonden technieken als coderen van bewijzen en gegevensstructuren in natuurlijke getallen, stonden aan het begin van de moderne informatica.

Deze contacten tussen logica en informatica zijn in de loop der jaren alleen maar gegroeid. In de jaren 60 en 70 werden logica's gebruikt voor de beschrijving, en soms zelfs het ontwerp van programma's, in het werk van Edsger Dijkstra, Tony Hoare, Amir Pnueli, en anderen. Tegelijkertijd werkten logici als Dana Scott aan diepe wiskundige theorieën van berekening en informatie, vaak met gebruik van categorieëntheorie, en ontstonden logisch geïnspireerde theorieën van databases (nog steeds een florerend gebied met vele toepassingen). In de jaren 80 intensiveerde dit contact, onder meer met subtiele logische studies van concurrency (een grote naam hier is Robin Milner): tegelijk rekenen door vele machines, en tegenwoordig ook: door vele min of meer intelligente processoren. Een parallelle stroom was de opkomst van de kunstmatige intelligentie, waaronder pioniers als John McCarthy, waarin vele nieuwe genres redeneren werden bestudeerd in een poging machines dichter te brengen bij het 'common sense redeneren' dat wij gebruiken bij het oplossen van alledaagse problemen. Het meeste logica-onderzoek wereldwijd vindt tegenwoordig plaats op de rand met de informatica, en er is een lange rij winnaars van de 'Turing Award' (de hoogste onderscheiding binnen de informatica) die de vruchtbaarheid van dit contact aantoont.

We noemen hier al deze namen, niet zozeer als 'name dropping', maar om een veel voorkomende exclusieve aandacht voor de grondslagenfase van de jaren 30 te corrigeren. Dit bewijst niet dat er daarna niets meer van belang is gebeurd, maar eerder dat er tot nog toe te weinig van de nieuwe prestaties in de algemene leerboekcultuur is doorgedrongen.

In wat volgt bespreken we drie typische thema's uit de moderne logica die uit deze latere periode stammen. Ze zijn als volgt te begrijpen. Klassieke systemen als propositielogica of predikatenlogica zijn rijke talen om een complexe wiskundige of zelfs alledaagse realiteit te beschrijven. Maar hoe gebruiken we zulke formalismen? Dan komen de activiteiten in zicht van redenerende of communicerende actoren die taal gebruiken voor bepaalde doelen. Drie van zulke belangrijke gebruiksthema's zijn handelingen en hun effecten, kennis en informatie, en strategische interactie op langere termijn tussen meerdere actoren in een spel.

Logica, verandering, en handelen

Klassieke logische talen beschrijven waarheid in een onveranderlijke wereld. Maar programma's dienen om computers tot opeenvolgende handelingen te krijgen, en dus zijn nieuwe logica's nodig die veranderingen beschrijven door de tijd heen. Een belangrijke lijn in dit onderzoek begon met de analyse van eenvoudige programma's voor rekentaken. Hier is een voorbeeld van een eenvoudig stukje programmacode om een getal te kwadrateren met alleen gebruikmaking van optelling:

```
y=1;
while (x < n)
{x=x+1; z=z+y; y=y+2}
```

De belofte is dat uitvoering in een begintoestand met waarden 0 voor x en z uiteindelijk de waarde n^2 voor z oplevert. Maar kunnen we ook een garantie geven dat het werkt? Met behulp van dynamisch logische rekenregels kan een correctheidsgarantie geleverd worden. In dynamische logica schrijft men dit als $(x = z = 0) \rightarrow [P](z = n^2)$ waarbij P staat voor het hier genoemde programma. De genoemde formule leest nu als volgt:

"*Als* $x = z = 0$ *dan zal (elke) uitvoering van het programma* P *leiden tot een toestand waarin* $z = n^2$."

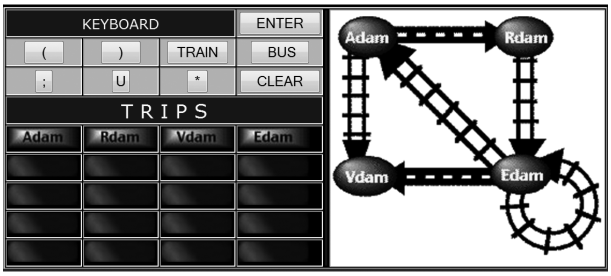

fig. 11 Een animatie op logicinaction.org die een versimpelde versie van het Nederlandse OV-netwerk weergeeft. Ter kennismaking en oefening van de dynamische logica voor beginnende studenten.

Er blijkt nu een systeem van abstracte logische redeneerwetten te bestaan dat precies beschrijft wat geldig is in deze combinatie van handelingen en beweringen over de diverse toestanden die voor en na een handeling kunnen optreden. Daarbij is van belang dat handelingen opgebouwd kunnen zijn uit andere handelingen (zoals in het voorbeeld kwadrateringsprogrammaatje P van hierboven, of de reisprogramma's die men kan samenstellen met behulp van het OV-netwerkje in het voorbeeld van figuur 11. In de 'dynamische logica' worden drie standaardcombinaties onderscheiden:

– $P\,;Q$: voer eerst P uit en dan Q (compositie)
– $P \cup Q$: doe P of Q (keuze).
– P^* : doe P een aantal (eventueel 0) keren achter elkaar (iteratie).

Meer gestructureerde handelingen, waaronder de bekende programmeerconstructie '`IF test DO P ELSE DO Q`' en '`WHILE test DO P`' kunnen gedefinieerd worden in termen van deze basiscombinaties. De 'dynamische logica' bestaat uit een uitbreiding van de wetgeving van de klassieke logica (zoals bijvoorbeeld gegeven in figuur 7) met principes die het gedrag van deze combinaties van handelingen vastleggen. Twee eenvoudige wetten voor compositie en keuze zijn:

– $[P;Q]p \leftrightarrow [P][Q]p$
– $[P \cup Q]p \leftrightarrow ([P]p \,\&\, ([Q]q))$

Lastiger wordt het als iteratie in het spel komt. Een belangrijk axioma voor iteratie is het volgende 'inductie'-principe:

– $(p \,\&\, [P^*][P]p) \leftrightarrow [P^*]p$

Deze iteratiewet stelt dat als p in de huidige toestand het geval is en dat na elke willekeurige herhaling van P-handelingen p behouden blijft indien we P nog een keer uitvoeren, dan moet p waar zijn na elke P-iteratie. Dit is de logische essentie van het wiskundige begrip inductie.

Dynamische logica is verwant aan zogenaamde 'modale logica's', oorspronkelijk ontwikkeld in de filosofie ter beschrijving van de begrippen 'noodzakelijke' en 'mogelijke' waarheid. Inmiddels is dit systeem veel algemener in gebruik als beschrijving van een breed bereik aan handelingen, niet alleen zuivere rekentaken, maar in feite ieder soort gestructureerd handelen. Dynamische logica's worden gebruikt in de analyse van 'agent systems' om te redeneren over wat wijzelf en anderen doen, in de analyse van planningsproblemen in de kunstmatige intelligentie, maar ook in de beschrijving van de procedures waarmee wij natuurlijke taal interpreteren ('dynamische semantiek'). Nieuwe toepassingen, en meer uitgebreide systemen van deze handelingenlogica zijn een nog steeds zeer actief onderzoeksgebied.

Logica, kennis en informatie

Dynamische logica beschrijft abstracte structuren in handelingen en processen. Maar ons handelen wordt doorgaans gedreven door informatie. Een andere belangrijke uitbreiding van de klassieke logica is de 'kennislogica' die beschrijft wat actoren weten over de wereld, en over elkaars kennis. Bijvoorbeeld, communicatie in natuurlijke taal valt niet te begrijpen zonder te analyseren wat sprekers en hoorders al dan niet weten, inclusief wat zij denken over wat anderen al dan niet weten. Kennislogica heeft weer zijn oorsprong in de filosofie (Jaakko Hintikka), maar is ook onafhankelijk herontdekt in de moderne economie (Robert Aumann won er zelfs een Nobelprijs mee).

Dit keer werken we met verzamelingen toestanden voor informatie die een persoon heeft: hoe meer toestanden, des te meer onzekerheid, en dus minder informatie. Neem ter illustratie de puzzel in figuur 12.

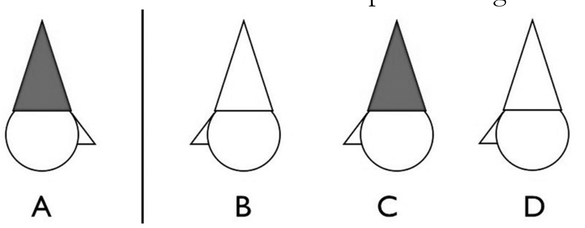

fig. 12 D ziet alleen B en C, C ziet alleen B, en A en B zien niemand. Publiekelijk wordt dit viertal verteld: "Twee van jullie dragen een witte hoed, de andere twee een rode". De vraag aan deze vier spelers is :"Ken je de kleur van je eigen hoed?" Enige tijd blijft het stil, waarop een van de vier roept dat hij het antwoord weet. Wie?

Persoon D ziet maar twee mogelijkheden, persoon C drie, de andere twee zes! Kennislogica is een uitbreiding van de klassieke propositielogica met kennisoperatoren K_x waarbij $K_x p$ staat voor de bewering dat agent x weet dat p het geval is. In termen van individuele onzekerheden betekent dat de bewering p waar is in alle situaties die de agent x voor mogelijk houdt. Figuur 13 maakt dit duidelijk. Als r_x betekent dat agent x een rode hoed draagt, dan staat $K_D r_D$ voor de uitspraak dat D weet dat hij een rode hoed draagt. Deze bewering is in de situatie als gegeven in figuur 13 duidelijk onwaar. Een bewering die wel waar is, is dat als C een witte (niet rode) hoed draagt, $-r_C$, dan zou $K_D r_D$ wel waar zijn. In een kennisformule:

$$-r_C \to K_D r_D \,.$$

Symbolische rekensystemen voor kennislogica bestaan uit uitbreidingen van systemen voor klassieke logica aangevuld met extra axioma's zoals

$$(K_x(p \to q) \;\&\; K_x p) \to K_x q \,.$$

Dit zegt dat actoren worden beschouwd als perfecte logische denkers: zij kennen dus de logische gevolgen van hun eigen kennis. Het genoemde axioma toepassende op het raadseltje uit figuur 13, kunnen we tot een antwoord komen. Agent C weet immers dat als D niet weet dat hij een rode hoed draagt, dat hijzelf een rode hoed draagt. In een formule: $K_C(-K_D r_D \to r_C))$. Nadat het stil blijft, verwerft C de informatie dat D niet weet dat hij de rode hoed draagt: $K_C - K_D r_D$. Op grond van het hierboven genoemde principe van logische perfectie levert dit de conclusie $K_C r_C$.

Fijnzinnig redeneren over kennis en onwetendheid van anderen is niet voorbehouden aan puzzeltjes. Het is onmisbaar bij het modelleren van alledaagse communicatieve handelingen, waar kennis over anderen essentieel is, en zelfs vormen van 'groepskennis' voorkomen. De laatste jaren wordt uitgebreid onderzoek gedaan naar de manieren waarop informatie verandert in communicatie met natuurlijke taal. Dit wordt gemodelleerd door veranderingen in gegeven kennismodellen, die doorgaans kleiner worden als nieuwe informatie binnenkomt. Hiermee komen we bij combinaties van de eerdere dynamische en epistemische logica's, waarmee zeer complexe scenario's zijn te beschrijven, met mengsels van publieke en privé-informatie, zoals wanneer u e-mail gebruikt met een bcc-ontvanger. En daarmee komt weer een verband naar voren met informatica en kunstmatige intelligentie: de studie van gedistribueerde systemen van mensen, robots of andere autonome rekenapparatuur die informatie kunnen uitwisselen.

Logica en spel

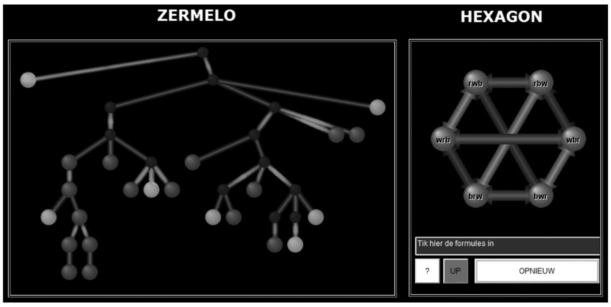

fig. 13 Twee speltheoretische animaties uit Logic in Action. *De eerste illustreert modellen voor zogenaamde gedetermineerde spelen, waarbij een van beide spelers een winnende strategie heeft, zoals in diverse bordspelen. De animatie laat zien hoe voor elk zo'n spel voor een van de spelers een winnende strategie gevonden kan worden (de stelling van Zermelo). De tweede illustratie is een model voor een simpel kaartspel. Bij kaartspelen speelt men veelal met verborgen informatie, wat ervoor zorgt dat de kennis verschilt per speler. Hier hebben we (dynamische) kennislogica nodig voor de modellering en berekening van de gedragingen van de verschillende deelnemers.*

Met een logische beschrijving van informatie en handelen met meerdere actoren ligt een laatste stap voor de hand, en wel naar sociaal gedrag. De bovengenoemde systemen blijken goed aan te sluiten bij de speltheorie en sociale keuzetheorie, waar individuen en groepen handelen gedreven door informatie, maar ook door hun voorkeuren over uitkomsten van gedrag. Om dit duidelijk te maken een klein voorbeeld: de Benelux kiest een nieuwe voorzitter. De benoemingscommissie bestaat uit drie leden: een Belg, een Nederlander en een Luxemburger. De zittende voorzitter is een Belg die ook weer aan de verkiezing deelneemt. In de eerste speelronde wordt een tegenkandidaat gekozen waarvoor een Nederlander en een Luxemburger kandideren. De tegenkandidaat wordt gekozen door dezelfde commissie. In de hieronder gegeven tabel zijn de verschillende voorkeuren van de drie leden gegeven.

BE	NE	LUX
BE	NE	LUX
NE	BE	NE
LUX	LUX	BE

Ieder commissielid heeft de voorkeur voor een voorzitter van eigen nationaliteit. In de kolommen van de tabel is verder gegeven hoe de verdere voorkeuren liggen. Het Belgische commissielid prefereert de Nederlandse kandidaat boven de Luxemburgse. Het Nederlandse commissielid de Belg boven de Luxemburger. Het Luxemburgse lid ziet het liefst de zittende voorzitter vertrekken. Deze individuele preferenties zijn bekend bij de gehele commissie.

Een oplossing voor rationele spelers valt te vinden in de speltheorie, met het zogenaamde algoritme van 'backward induction' (zie ook de eerste animatie in figuur 14). Dergelijke algoritmes beschrijven hoe spelers kunnen (of moeten) redeneren om optimaal gedrag voor zichzelf en anderen te vinden. De laatste jaren blijkt dit heel goed aan te sluiten bij logische systemen voor kennis, handelingen, en voorkeuren. Zulke systemen maken expliciet welk redeneren actoren gebruiken om tot optimaal 'evenwichtsgedrag' te komen, met speltheoretische strategieën die zij niet meer hoeven te veranderen.

Men kan dit speltheoretische perspectief beschouwen als een sterk verlegde grens van het logisch onderzoek, ver verwijderd van de klassieke interessen in wiskundig bewijs en grondslagen van berekenbaarheid. Maar dat is schijn! Zelfs fundamentele logische of wiskundige activiteiten hebben vaak meerdere spelers: denk maar aan een argumentatie waar de een iets poneert en de ander deze bewering bestrijdt. Wie wint hangt af van de waarheid, maar evenzeer van strategieën voor argumentatie. Het is mogelijk gebleken zelfs de centrale logische noties als waarheid en bewijs in deze speltermen te beschrijven, waarbij de centrale noties uit de propositie- en predikatenlogica een herinterpretatie ondergaan. Bijvoorbeeld, verdedigen van een disjunctie A-of-B is een typiche spelhandeling, het maken van een keuze welk van de twee beweringen men gaat verdedigen. Aanvallen van een disjunctie laat deze keuze juist aan de tegenspeler: en dus is de sinds lang bekende wiskundige analogie tussen conjunctie (A-en-B) en disjunctie verklaard. Het is in wezen dezelfde zet in een spel, maar het verschil schuilt in de speler die de zet doet. Daarmee is dan natuurlijk ook een ander belangrijk spelaspect aan de orde: het wisselen van rol tusen spelers. Ook dat correspondeert met een welbekende logische operatie, en wel de negatie. Soortgelijke spelanalyses bestaan voor de logische kantoren 'alle' en 'sommige'. Spelen voor logische noties zijn concreet en makkelijk te onderwijzen, maar ze leggen tegelijkertijd een verband met het bredere meerpersoonsperspectief dat we hierboven hebben beschreven.

fig. 14 L.E.J. Brouwer op een recente Nederlandse postzegel, met als onderschrift de ongeldigheid van het uitgesloten derde in symbolische notatie.

Tenslotte, iets algemener denkend, gaan spelen over gedrag van meerdere personen, gecodeerd in strategieën, dat afhankelijkheden vertoont. Maar ook logisch redeneren gaat typisch over conditionele afhankelijkheden. Dit is geen toeval. Diverse fundamentele resultaten over spelen hebben daarmee een nauw verband met de logica. Een mooi voorbeeld is de Stelling van Zermelo (zie ook figuur 13), die zegt dat elke spelboom van eindige diepte voor twee spelers met tegenstrijdige belangen (een zogenaamd 'extensief nulsom spel') 'gedetermineerd' is: een van de twee spelers heeft een winstrategie die winst garandeert, wat de ander ook doet. Dit resultaat, oorspronkelijk bedacht door de logicus en verzamelingstheoreticus Zermelo (en onafhankelijk van hem herontdekt door de Nederlandse wereldkampioen schaken Max Euwe) heeft diepe verbanden met logische principes als de wet van het Uitgesloten Derde. Dit laatste principe lag nu juist onder vuur van de Nederlandse 'intuïtionisten' (met name L.E.J. Brouwer), en inderdaad valt hier veel meer te zeggen. We staan aan een begin, niet aan een eind.

Conclusie

De logica in haar klassieke fase heeft nauwe verbanden met de wiskunde. De afgelopen eeuw zijn hier contacten bijgekomen met de informatica in de volle breedte van dat vak, maar ook met de filosofie, taalkunde, en economie, en de laatste jaren zelfs de cognitiewetenschap. Hiermee verandert de basisinhoud die een logicacursus zou willen overdragen, wil het vak zijn brede universitaire rol zichtbaar maken. Aan de andere kant blijft de band tussen logica en wiskunde nog steeds een zeer speciale. Om te beginnen is de activiteit van werkende wiskundigen een mooi voorbeeld van rationele sociale interactie die al millennia bestaat en floreert, veel langer dan de meeste religieuze of politieke bewegingen.

Maar nog belangrijker: de werkwijze van de logica, ook als het gaat over handelen, informatie of spel, blijft wiskundig. In de woorden van een Amsterdamse wiskundecursus voor een breder publiek (zie figuur 16, eerste plaatje): “Niet alleen het Boek van de Natuur, maar ook het Boek van de Cognitie is in wiskundige taal geschreven.”

Opzet van de cursus en een nieuw initiatief

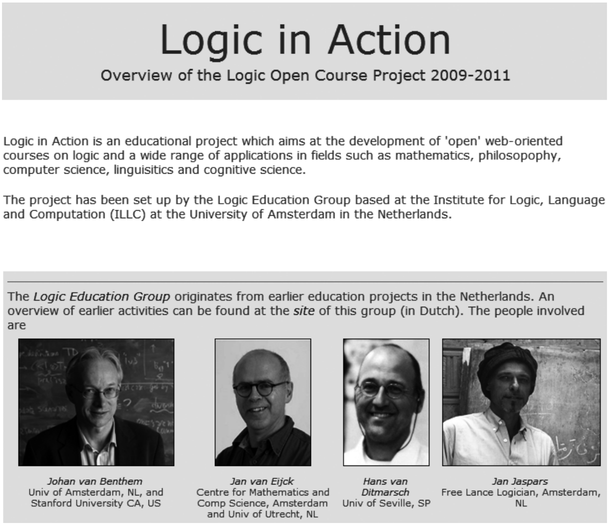

fig. 15 Het Logic Education Project vervaardigt het materiaal voor Logic in Action. Op deze site vindt u ook de internationale contacten van onze groep.

De open course Logic in Action weerspiegelt de hier beschreven inhouden. Er is een klassiek deel met beschrijvingstalen voor structuren zoals propositielogica, syllogistiek, en predikatenlogica. Vervolgens komt een modern deel met gebruikstalen zoals dynamische logica, kennislogica, en logica’s voor spelen. Dit besluit een mogelijke basiscursus. De website biedt echter modulair verder materiaal aan. Zo bevat de cursus ook een optioneel deel met algemene methoden die door alle moderne toepassingen van de logica spelen, en ook is er een deel in constructie met computationele implementaties, waar gebruikers zelf eenvoudige programma’s kunnen schrijven en hands-on ervaring verwerven met ‘logica in actie’. Een ander innovatief aspect van de cursus is niet de inhoud, maar de vorm. In de vorm van een e-book worden ook allerlei animaties en illustraties aangeboden bij begrippen en resultaten, en ook kan men doorklikken naar verdiepingmateriaal over geschiedenis, historische en moderne figuren, en connecties met cognitiewetenschap en andere bronnen van praktische redeneervaardigheden.

fig. 16 Nederlandstalige cursussen voor inleidend logica-onderwijs dat gebruikt kan worden voor middelbaar schoolonderwijs. Van links naar rechts: Denkpatronen*: on-line cursus over wiskunde en logica met tekst en programmatuur (Van Benthem, Dijkgraaf),* Denkende Machines*: de geschiedenis van de rekenmachine en computer, en de rol van de logica daarin (van Eijck e.a.), en* Bewijzen en Inzien*: inleidende tekst over de structuur van wiskundige bewijzen (Van Eijck, Visser).*

Wij menen dat dit materiaal ook geschikt kan zijn voor middelbare scholen. Een pilot in deze richting is in de planningsfase in het EPGY-programma te Stanford dat extra lesinhouden aanbiedt voor scholieren in vele leeftijdsgroepen over een breed scala van vakken. Wij zijn bijzonder geinteresseerd in contacten met VWO-leraren die ons materiaal op logicinaction.org (voor een presentatie van het team, het Logic Education Project, zie figuur 15) willen uitproberen. In figuur 16 vindt u ook Nederlandstalige cursussen die specifiek voor dit publiek bedoeld zijn, en die in een eerder stadium door de Logic Education Project werden ontwikkeld.

Jan Jaspars,
janjaspars@gmail.com
freelance logicus, Amsterdam
Joham van Benthem,
johan.vanbenthem@uva.nl
Universiteit van Amsterdam

Noot

[1] Dit artikel is een bewerking van de lezing die in 2010 door de auteurs is gegeven op de NWD. Voor een volledige elektronische versie, met alle programmatuur en hyperlinks, zie http://www.science.uva.nl/~jaspars/nwd/