

Wat te doen met (hoog)begaafde leerlingen in de wiskundeles? Er zijn drie basisbehoeften waaraan moet worden voldaan om intrinsieke motivatie te bewerkstelligen: relatie, competentie en autonomie, aldus **Suzanne Sjoers** van het APS in Utrecht. Ze vertelt haar ervaringen met leerling Thijs.

(Hoog)begaafde leerlingen in de wiskundeles

een zee aan mogelijkheden...

Ooit had ik Thijs in mijn wiskundeles: hij haalde alleen maar tien, ging razendsnel door de stof en stelde me vragen die ik met moeite kon beantwoorden. Hij verveelde zich, ging zich vervelend gedragen (en verveelde daardoor ook mij) en kwam met steeds meer tegenzin naar mijn lessen. De hem kenmerkende glimmende ogen stonden steeds verdrietiger.

Tijdens de eerstvolgende leerlingbespreking bracht ik in dat ik niet zo goed raad wist met Thijs. “Misschien is hij hoogbegaafd!” merkte een collega op, maar dat was hij niet, bleek later nadat hij door een psycholoog uitgebreid was getest. Hij bezat wèl een buitengewone begaafdheid op het gebied van wiskunde en had kennelijk in mijn les meer uitdaging nodig. Maar dan wel èchte uitdaging, ‘meer dan alleen bezighouden’, was het advies uit het onderzoeksrapport van de psycholoog. Samen met Thijs heb ik gekeken hoe de wiskundeles voor hem weer uitdagend kon worden. Een interessante ontdekkingstocht... voor ons allebei.

In dit artikel richt ik mij op leerlingen die op het gebied van wiskunde op hoogintelligent niveau presteren. Dit zijn twee groepen leerlingen, namelijk de hoogbegaafde leerlingen, zij zijn onder goede condities in staat om op veel gebieden excellente prestaties te leveren, en de leerlingen met een buitengewone begaafdheid op het gebied van wiskunde.

Helaas bestaan er over (hoog)begaafdheid in het algemeen en wiskundig begaafde leerlingen in het bijzonder nog veel vooroordelen. Zo’n leerling wordt al snel een nerd, sociaal onhandig of wereldvreemd genoemd door medeleerlingen en docenten. Wanneer je als docent (team) besluit ook aan de specifieke onderwijsbehoeften van deze groep leerlingen tegemoet te komen, is het belangrijk deze vooroordelen uit “de school te helpen”. Een mooi hulpmiddel om het gesprek hierover op gang te brengen, is het Vooroordelenspel van APS (Algemeen Pedagogisch Studiecen-

trum in Utrecht, www.aps.nl). In dit spel zijn vijfendertig vooroordelen en vijf feiten samengebracht. De vooroordelen zijn letterlijk genoteerd op scholen waar docenten en leerlingen in gesprek waren over hoogbegaafdheid. De bedoeling van het spel is om de vijf feiten te ontdekken. Eén vooroordeel uit dit spel is bijvoorbeeld dat (hoog)begaafde kinderen vaker een bril dragen dan gemiddeld intelligente leerlingen. Wanneer dit vooroordeel op school als feit wordt beleefd, zal een allochtoon meisje zonder bril niet zo snel herkend worden als (hoog)begaafd en zal daardoor ook niet de uitdaging aangeboden krijgen om dit talent verder te ontwikkelen. Belangrijk is dus kennis te hebben over wat (hoog)begaafdheid wèl en niet is, kennis te hebben van de onderwijsbehoeften en de mogelijkheden van deze leerlingen.

Leerlingen die begaafd zijn op het gebied van wiskunde kunnen goed verbanden leggen, zijn goed in analyseren, in abstraheren en in het maken van grote denksprongen en vooral: zij hebben interesse in wiskunde. Thijs begreep bij de inleidende opgaven van een hoofdstuk al snel wat de bedoeling was van het hoofdstuk. Wanneer hij dat ontdekt had, begon de verveling toe te slaan.

Deze leerlingen hebben ook oog voor wiskundige structuren en patronen en zijn geneigd tot visualisering van wiskundige problemen. Ook bezitten ze een convergent denkvermogen (ze kennen feiten, kunnen regels toepassen) en bezitten een divergent denkvermogen (ze kunnen bekende stof op een nieuwe manier gebruiken). Zeker dit laatste punt was bij Thijs aanwezig en dat gaf veel mogelijkheden. Nadat het onderwerp ‘de normale verdeling’ was besproken, heeft hij binnen de vakgebieden economie en biologie gezocht naar waar deze normale verdeling te vinden is.

Leerlingen als Thijs hebben meer uitdaging nodig, niet méér van hetzelfde, want dat is een vorm van bezig-

houden. Het is van belang om bij deze leerlingen verveling te voorkomen. Verveling kan leiden tot gedragsproblemen en daar is niemand bij gebaat. Wanneer leerlingen op cognitief niveau wiskundestof van twee leerjaren hoger aankunnen, is de tegenzin om aan de slag gaan met opgaven op het niveau van het leerjaar waarin ze zitten, logisch te verklaren. Het is dan ook nuttig om bij deze leerlingen de grenzen van hun capaciteiten op te zoeken. Dit kan door de moeilijkheidsgraad van de opgaven op te schroeven tot frustratieniveau. Leerlingen ervaren zo dat er ook op dit gebied grenzen zijn aan hun eigen capaciteiten. Als docent is het goed om te weten wat het werkelijke niveau van de leerling is, om de verrijkingsstof hierop af te kunnen stemmen. Thijs bleek in VWO-3 op wiskundig gebied 1 jaar voor te lopen op de groep. Het verrijkingsmateriaal zocht ik dus op het niveau van VWO-4.

In de wiskundeles lijkt er dus een groep bijgekomen te zijn die specifieke aandacht, dus extra tijd vraagt. Deze investeringen zullen de docent veel gaan opleveren, namelijk gemotiveerde leerlingen en daardoor minder gedragsproblemen. Ikzelf merkte dat ik erg kon genieten van het enthousiasme van mijn leerlingen voor mijn vak en het was een uitdaging voor mezelf om vakinhoudelijk zo met deze leerlingen de diepte in te gaan.

Elke leerling, dus ook de begaafde leerling, heeft drie psychologische basisbehoeften die (wanneer hier aan voldaan wordt) zorgen voor intrinsieke motivatie bij de leerling om aan het werk te gaan. Dat zijn de volgende:

Relatie: Een goed contact tussen docent en leerling is belangrijk. Elke leerling wil gezien en erkend worden. Het zien van de leerling achter het lastige gedrag, het herkennen en erkennen van hun capaciteiten, het praten mét de leerling in plaats van over de leerling bevordert dit goede contact. De veiligheid creëren om te mogen excelleren zonder gepest te worden en ruimte geven om fouten te mogen maken (misschien wel voor de eerste keer!) zijn ook essentieel voor een goede relatie. Hoogbegaafde leerlingen zijn gevoelig voor authenticiteit, een niet oprechte belangstelling wordt door hen snel opgemerkt en werkt zelfs averechts. Onder relatie valt ook het contact tussen gelijkgestemde leerlingen, een *peer group*. Thijs zat in zijn examenjaar in een plusgroep met drie andere begaafde leerlingen. Samen werkten ze aan de verrijkingsstof en discussieerden ze over wiskundige onderwerpen. In deze groep ontmoette hij dus leerlingen met gelijke interesses en capaciteiten.

Competentie: Een leerling wil op zijn niveau aan het werk zijn. Het schoolwerk moet niet te moeilijk,

maar ook zeker niet te makkelijk zijn.

Autonomie: Een leerling heeft behoefte aan een zekere invloed op zijn leerproces. Een leerling mag binnen bepaalde kaders zelf invulling geven aan hoe hij de doelen wil bereiken, bijvoorbeeld door zelf opgaven te kiezen, door zelf onderwerpen voor verrijking te kiezen, door zelf te beslissen of de uitleg door de docent voor hem of haar nodig is.

De reguliere wiskundemethoden bestaan uit een hoeveelheid basisstof voor alle leerlingen, aangevuld met herhaling voor de leerlingen die extra oefening nodig hebben en verrijkingsstof voor leerlingen die de stof snel beheersen.

Voor begaafde leerlingen is de verrijkingsstof vaak al niet uitdagend genoeg. Voor een enkele leerling zal de basisstof zelfs al geheel bekend zijn. Zo'n leerling zal niet gemotiveerd aan de slag gaan met het nieuwe hoofdstuk. Voor het primair onderwijs heeft de SLO (Stichting Leerplan Ontwikkeling) Routeboekjes op de markt gebracht voor onder andere diverse rekenmethoden. In deze routeboekjes staan de kernopgaven van elk hoofdstuk. Wanneer een leerling deze opgaven goed maakt, beheerst de leerling de basisstof. Elk hoofdstuk wordt zo dus compacter aangeboden en in de overgebleven tijd kan een leerling met verrijkingsstof aan de slag gaan.

Voor het voortgezet onderwijs bestaat dit product niet, maar dat is naar mijn mening ook niet nodig. Volgens de psychologische basisbehoefte *autonomie*, wil de leerling zijn eigen route door het hoofdstuk kunnen plannen. Door voorafgaand aan het hoofdstuk de leerling te toetsen, wordt het voor docent en leerling duidelijk in hoeverre de leerling de basisstof van dat hoofdstuk beheerst. Uit een foutenanalyse kan vervolgens blijken dat de leerling bijvoorbeeld de basisstof niet meer hoeft door te werken, of slechts enkele onderdelen. Hóe de leerling dit doorwerkt, kan de leerling zelf vaststellen, indien nodig vooraf ter controle en goedkeuring voorgelegd aan de docent.

Een leerstrategie die hoogbegaafde leerlingen vaak gebruiken, is topdown-leren. Bij deze manier van leren gaat de leerling niet stap voor stap door de leerstof tot het einddoel is bereikt, maar begint deze leerling juist bij het einddoel. Wanneer het einddoel niet door de leerling begrepen wordt, zal de weg er naar toe moeten worden ingevuld. Mede doordat deze leerlingen snellere en grotere denksprongen kunnen maken, is deze weg vaak korter. Deze vorm van leren staat haaks op de bottom-up-methode die de wiskundemethoden gebruiken.

Ruimte geven aan de *autonomie* van de leerling, betekent dat de docent de hoogbegaafde leerling moet loslaten. Een leerling leert immers het best door vallen en opstaan. Een verkeerde planning en daardoor een slecht toetsresultaat is een goed en noodzakelijk leermoment, ook voor deze leerlingen. Omdat zij vaak zonder moeilijkheden door de reken- en wiskundestof zijn gegaan, hebben ze niet 'leren leren' op dit gebied. En dat is een noodzakelijke vaardigheid voor vervolgopleidingen.

Op de markt is voldoende verrijkingsmateriaal. Helaas wordt dit nog wel eens als 'extra werk' betiteld, een kwalificatie die niet motiverend werkt. Waarom extra werk als de voorgaande inspanning voldoende was? Klaarwerk, verrijkingsstof of pluswerk zijn passender namen. Welke naam wil uw leerling er zelf aan geven? Dit klaarwerk is te vinden in materiaal op papier: *Wiskunst*, het wiskundetijdschrift voor jongeren *Pythagoras*, de uitgaven van *Vierkant voor Wiskunde* en de Zebraboekjes. Maar ook online is veel goed materiaal te vinden. De onderwerpen Escher, Droste-effect, kunst en wiskunde, techniek, wiskundewandelingen ontwerpen en architectuur zijn slechts enkele onderwerpen om mee aan de slag te gaan.

Leerlingen zijn goed in staat hun eigen verrijkingsstof of verrijkingsonderwerpen te zoeken. Vaak is een combinatie van vakken voor begaafde leerlingen interessant, omdat zij in aanleg sterk zijn in het leggen van verbanden en dit extra uitdaging biedt. Leerlingen ervaren het als heel plezierig om hun creativiteit eindeloos te mogen inzetten bij het zoeken naar oplossingen van complexe problemen. Belangrijk is dat de docent de verrijkingsstof serieus nakijkt, waardeert en voorziet van feedback. Het laten zien van een uitgevoerd project aan de rest van de groep is een andere mogelijkheid. Thijs liet ik de laatste les van een periode aan de klas presenteren wat hij gedaan had. Een hoogtepunt van zijn presentaties was wel hoe hij de hele klas Escher-motieven liet ontwerpen.

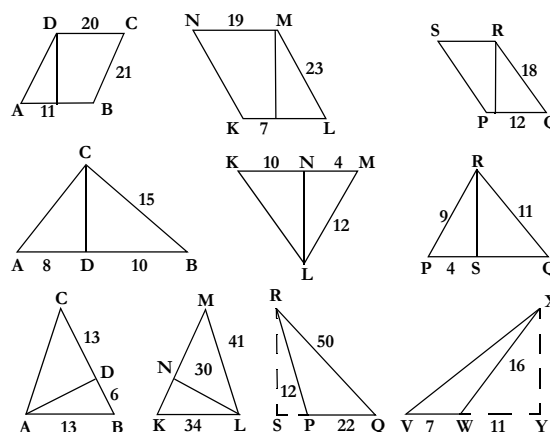
Het is voor de leerling niet zinvol wanneer de leerstof uit volgende jaren wordt aangeboden als klaarwerk, tenzij leerlingen vervroegd examen kunnen gaan doen in dit vak. Naast verrijkingsmateriaal bestaat ook de mogelijkheid modules bij HBO-instellingen of de Open Universiteit te volgen. Ook is de internationale Kangoeroe reken- en wiskundewedstrijd voor deze leerlingen erg uitdagend. Projectmatig werken, een wiskundeclub op school starten, bedrijfsbezoeken, onderzoeksopdrachten vanuit het bedrijfsleven of van de schoolleiding zijn andere mogelijkheden die aangeboden kunnen worden. Alle onderwerpen van de wis-

kunde zijn hiervoor geschikt: statistisch onderzoek, meetkunde, verbanden, getallen...

Begaafde leerlingen zijn gebaat bij open, complexe opdrachten. Deze zijn niet altijd in de wiskundemethode te vinden. Zeker de eerste opgaven in een hoofdstuk zijn vaak eenvoudig, stap voor stap opgebouwd en gesloten van aard. Het herschrijven van de opgaven (door docent of door de leerlingen zelf) is dan een mogelijkheid. Het toevoegen van extra deelvragen is een andere optie. Door leerlingen kritisch te laten kijken naar de vraagstelling, doet de docent een beroep op de metacognitieve vaardigheden van de leerlingen, ook dit is verrijking! Een andere mogelijkheid hierbij is om vragen vanuit andere vakken toe te voegen. Bij lineaire verbanden kunnen leerlingen naar situaties in de economie, natuurkunde, biologie of scheikunde zoeken waar sprake is van lineaire verbanden. Een interessante en complexe zoektocht.

Een voorbeeld van een opgave die Thijs en ik aangepast hebben, is de volgende:

Bereken de oppervlakte van de driehoeken en parallellogrammen hieronder.



Van alle vormen heeft hij één oppervlakte berekend. Toen hij deze goed berekend had, heeft hij vervolgens in en om school deze vlakke figuren gezocht en daar de oppervlakte van berekend. Aangezien het soms lastig was om de afmetingen te bepalen (zo had hij een driehoekig plein ontdekt), werd er ook een beroep gedaan op de vaardigheid schatten van maten.

Begaafde leerlingen zijn erg gevoelig voor de context van de opgave. Een reactie van een begaafde leerling uit groep 5 op de opgave om drie pannenkoeken met acht leerlingen te delen, is een mooi voorbeeld hiervan. De leerling gaf aan dat er te weinig pannenkoeken gebakken waren, dus dat het een rare vraag was. Toen ik de leerling vroeg hoe zij de opgave aan kon passen

zodat deze naar haar mening reëler werd, gaf ze aan dat het verdelen van vijfendertig pannenkoeken over acht leerlingen interessant werd, want wie krijgt/krijgen dan de laatste drie?

Met Thijs is het goed gegaan, we hebben samen met ups en downs mooi verrijkmateriaal verzameld, waar veel begaafde leerlingen na hem van hebben genoten in de wiskundeles.

En Thijs? Hij is net afgestudeerd: wiskunde en natuurkunde. Ik sprak hem laatst en vroeg hem naar zijn toekomstplannen...

“Misschien wel in het onderwijs” sprak hij met zijn welbekende glimmende ogen....

*Suzanne Sjoers
APS, Utrecht*

Wintersymposium KWG 2011

Logica!

Als we stemmen, communiceren of liegen

zaterdag 8 januari 2011, Utrecht

Stemmen, communiceren en ook liegen zijn activiteiten die we allemaal recent ondernomen hebben of hebben opgemerkt bij anderen. (U liegt natuurlijk niet, wij ook nooit).

Het komende Wintersymposium van het Koninklijk Wiskundig Genootschap staat in het teken van Logica en deze drie zeer menselijke activiteiten.

- Jan van Eyck, hoogleraar aan het Utrechts Institute of Linguistics (Universiteit Utrecht), senior researcher bij het Centrum Wiskunde en Informatica (Amsterdam) en auteur van vele publicaties, ook voor de Tweede Fase, geeft een voordracht over *Redeneren over Communicatie*.
- Eric Pacuit, universitair medewerker Universiteit Tilburg, studeerde in New York en heeft onder meer gewerkt als onderzoeker bij de Universiteit van Amsterdam en Stanford University. Hij werkt in speltheorie, maar doet ook onderzoek aan andere sociale interacties. Zijn voordracht gaat over *The Logic behind Voting (and other Social Interactions)*. Een zeer actueel thema!

- Hans van Ditmarsch studeerde wiskunde en filosofie in Utrecht en werkte onder meer bij de Rijksuniversiteit Groningen en de university of Otaga in Nieuw Zeeland. Op het ogenblik is hij als universitair medewerker verbonden aan de Universiteit van Sevilla. Hij is (mede)auteur van vele publicaties, ook voor het voortgezet onderwijs en werkt op het ogenblik aan een publicatie over *De logica van het liegen*. Daarover gaat ook zijn voordracht.

Datum, plaats, bijdrage

Het symposium wordt gehouden op **zaterdag 8 januari 2011** in het Academiegebouw van de Universiteit Utrecht (Domplein 29, 3512 JE Utrecht). Het programma start om 10:00 uur (koffie vanaf 9:30) en eindigt ca. 15:00 uur.

U wordt verzocht u van te voren online aan te melden via de website van het Koninklijk Wiskundig Genootschap, www.wiskgenoot.nl (kies dan ‘wat doet het KWG’ en vervolgens ‘congressen en symposia’). Daar is ook het volledige programma, inclusief samenvattingen van de lezingen, te vinden.

Nadere inlichtingen bij Jenneke Krüger, telefonisch (06-16420445) of per e-mail: jenneke.kruger@gmail.nl