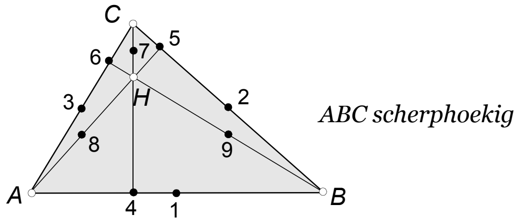
Wat te bewijzen is (49)

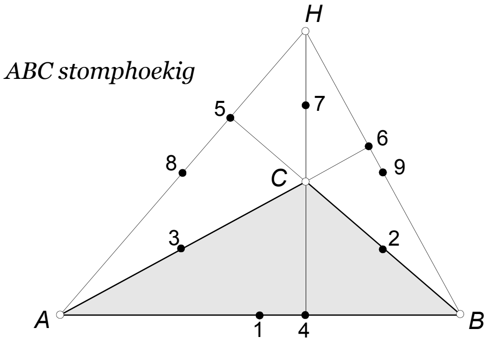
Rubriek

Onderstaand citaat is van C. Stanley Ogilvy en te vinden in een subliem boekje, getiteld *Excursions in Geometry*.

> The theorems of classical elementary geometry are nearly all too obvious to be worthy of study for their own sake. Their importance lies in the role they play in the chain of reasoning. It is regrettable that so few non-trivial theorems can be proved within the framework of the traditional geometry course when so many startling good ones lie just around the corner, hidden from the view of the young student.

Een typisch voorbeeld van een stelling die net even om de hoek lag van het vroegere meetkundecurriculum en hoogstens met een sterretje van 'facultatief' in de oude schoolboeken voorkwam, is de stelling over de zogeheten negenpuntscirkel van een driehoek.



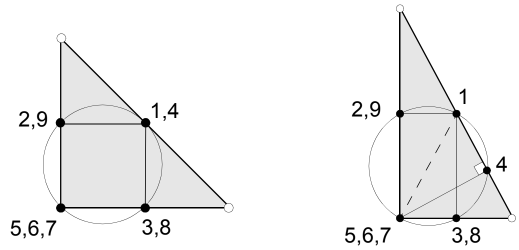


De drie keer drie punten, te weten de middens (1, 2 en 3) van de zijden van een willekeurige driehoek ABC, de voetpunten van de hoogtelijnen (4, 5 en 6) en de middens (7, 8 en 9) van de hoogtelijnstukken AH, BH en CH, liggen op één cirkel. In de literatuur wordt deze cirkel ten onrechte soms aangeduid als Euler-cirkel, en minder ten onrechte als Feuerbach-cirkel.

Van speciaal naar algemeen

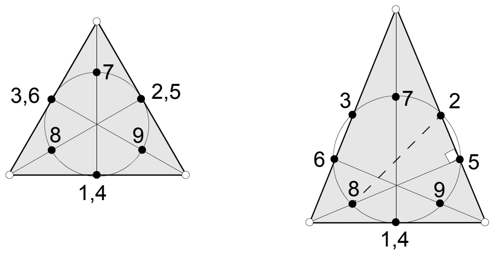
Van Polya heb ik geleerd dat het vaak leerzaam is om alvorens een stelling of formule in zijn algemeenheid te bewijzen, deze eerst te toetsen in bijzondere gevallen. De figuur hierboven toont een zomaar scherphoekige en een zomaar stomphoekige driehoek. Meer bijzonder zijn de rechthoekige driehoeken en van deze tussencategorie is het gelijkbenige exemplaar ('geodriehoek') het allerspeciaalst.

Om met dit laatste geval te beginnen: van de negen punten blijven er slechts vier over. Die vier liggen als hoekpunten van een vierkant zeker op één cirkel. Bij een willekeurige rechthoekige driehoek wordt het negental gereduceerd tot vijf. Vier daarvan zijn de hoekpunten van een rechthoek en liggen dus op één cirkel. De zwaartelijn naar de schuine zijde is middellijn van die cirkel en omdat de verbindingslijnen van het punt 4 met de eindpunten van die middellijn loodrecht op elkaar staan, ligt dat punt 4 ook op die cirkel.



Van de niet-rechthoekige driehoeken is de gelijkzijdige de meest speciale en in dat geval vallen de middens van de zijden samen met de voetpunten van de hoogtelijnen, zodat er nu sprake is van zes in plaats van negen punten.

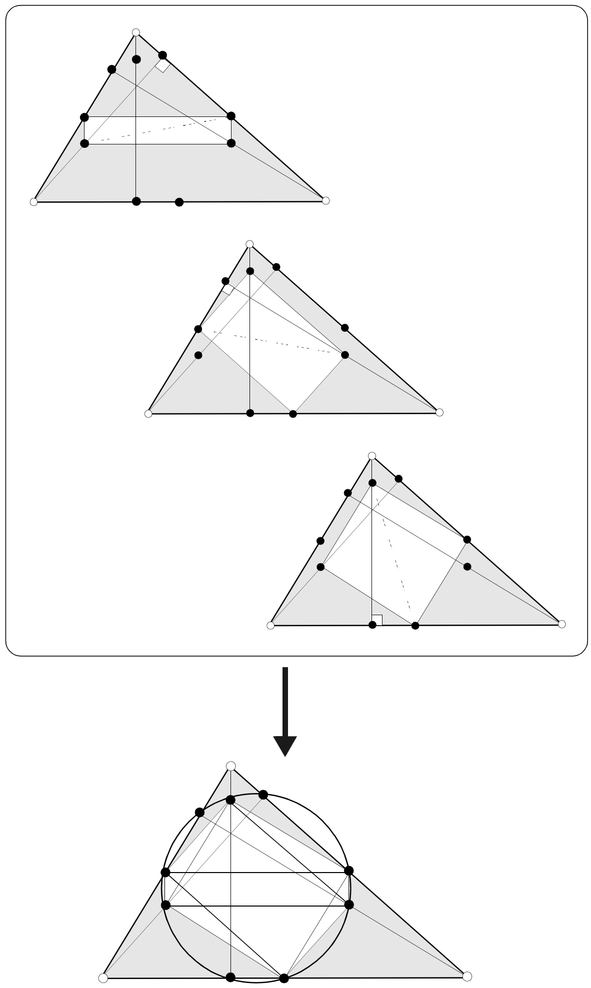
Dat die zes punten concyclisch zijn, volgt direct uit het feit dat het hoogtepunt (tevens zwaartepunt) hier de hoogtelijnen verdeelt in stukken met verhouding 2 : 1.



Bij een niet-gelijkzijdige, maar gelijkbenige driehoek is er sprake van acht in plaats van negen punten, en nu is er wat meer werk aan de winkel. De punten 2, 3, 8 en 9 zijn de hoekpunten van een rechthoek, want de lijnen 38 en 29 zijn beide evenwijdig aan de hoogtelijn uit de top en 23 en 89 zijn beide evenwijdig aan de basis (middenparallellen!). Evenzo vormen de punten 1, 8, 7, 2 een rechthoek en omdat de rechthoeken 2389 en 1872 de diagonaal 28 gemeenschappelijk hebben, weet ik dat 1, 2, 3, 7, 8 en 9 op één cirkel γ liggen. Nu moet ik nog kijken naar 5 en 6.

Vanuit het punt 5 wordt de middellijn 28 van cirkel γ 'gezien' onder een rechte hoek, dus ligt 5 (en vanwege de symmetrie ook 6) op γ.

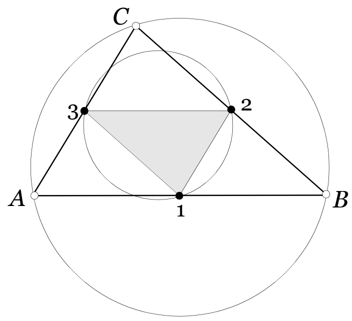
Na dit bewijs, dat net zo kan worden uitgevoerd voor een stomphoekig gelijkbenige driehoek, is het algemene bewijs niet moeilijk meer. Het enige verschil is dat we voor de eerste stap *drie* rechthoeken (met twee aan twee een gemeenschappelijke diagonaal) nodig hebben. Dat de drie resterende (voet)punten op de zespuntscirkel liggen, volgt dan weer uit het feit dat elke zijde van de driehoek samen met de hoogtelijn daarop door twee diametrale punten van de zespuntscirkel gaan (zie de stippeldiagonalen in het plaatje), waarmee het bewijs klaar is.



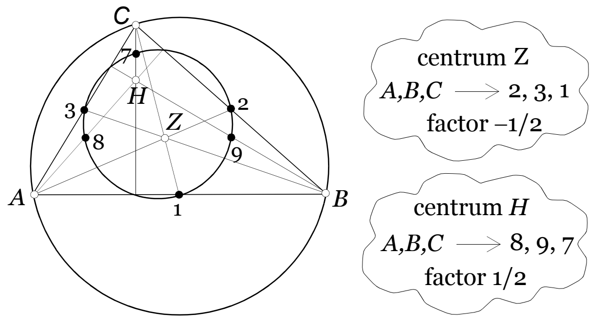
Zeg niet dat dit bewijs niet op school behandeld zou kunnen worden. De voorkennis is goed te overzien: de stelling van de middenparallel en de wetenschap dat de diagonalen in een rechthoek elkaar middendoor delen en even lang zijn. Wat afschrikt, is het aantal stappen, de complexiteit zeg maar. Toch denk ik dat er vroeger wel bevlogen leraren waren die hun leerlingen op de negenpuntscirkel tracteerden. Voor 1968 paste de cirkel in het programma van 3 HBS of 4 Gym, maar in zo'n klas zaten de alfa's en de beta's nog bij elkaar en dat weerhield veel leraren ervan om zich aan deze kroonjuweel van de vlakke meetkunde te wagen. In de 'voortgezette meetkunde' zoals die bestemd was voor het VWO-profiel natuur en techniek – en die alweer grotendeels is afgebroken – zou de negenpuntscirkel niet hebben misstaan en het is denkbaar dat er recentelijk ook wel enthousiaste leraren zijn geweest die op de een of andere manier hun leerlingen kennis hebben laten maken met dit fenomeen.

Omgeschreven cirkel en negenpuntscirkel

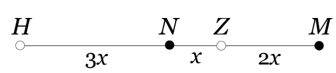
De drie middenparallellen van een driehoek vormen een driehoek die gelijkvormig is met en half zo groot is als de oorspronkelijke driehoek (ik noem die driehoek hier de *middendriehoek*). De negenpuntscirkel is de omgeschreven cirkel van de middendriehoek en bijgevolg is de straal van de negenpuntscirkel juist de helft van die van de omgeschreven cirkel.



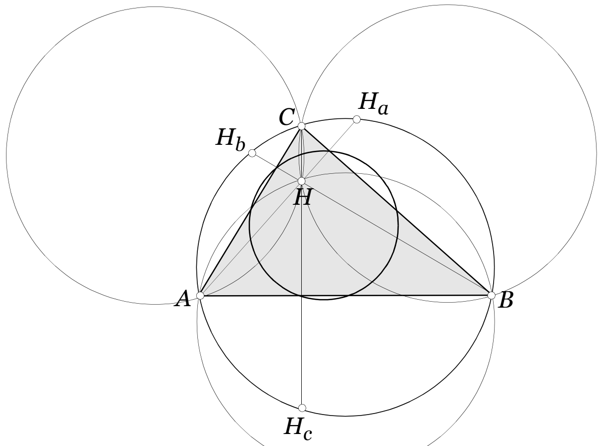
Bij twee niet-concentrische en ongelijke cirkels zijn er altijd twee centra te vinden van centrale vermenigvuldigingen (homothetiën) waarbij de een het beeld is van de ander. De vermenigvuldigingsfactoren daarbij zijn elkaars tegengestelde; het centrum dat past bij de positieve factor heet *uitwendig gelijkvormigheidspunt*, het andere *inwendig gelijkvormigheidspunt*. Neem ik voor de twee cirkels de omgeschreven cirkel en de negenpuntscirkel van een driehoek ABC, dan is het hoogtepunt H het uitwendig en het zwaartepunt Z het inwendig gelijkvormigheidspunt van die twee cirkels.



Omdat de gelijkvormigheidspunten van twee cirkels met de beide middelpunten op één lijn liggen, weet ik nu dat H en Z samen met M en N (respectievelijk middelpunt van omgeschreven cirkel en negenpuntscirkel) op één lijn liggen en wel zó dat $|HM| = 2|HN|$ en $|ZM| = 2|ZN|$. De onderlinge ligging van de vier punten is dan zó:



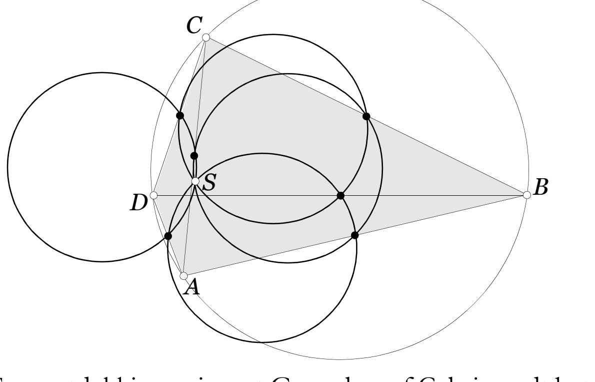
De drie lijnstukken AH, BH en CH verdelen driehoek ABC in drie driehoeken (ABH, BCH en CAH) en het is eenvoudig te zien dat deze driehoeken dezelfde negenpuntscirkel hebben als driehoek ABC. Daaruit volgt dan onmiddellijk dat de omgeschreven cirkels van dit drietal driehoeken even groot zijn als de omgeschreven cirkel van driehoek ABC.



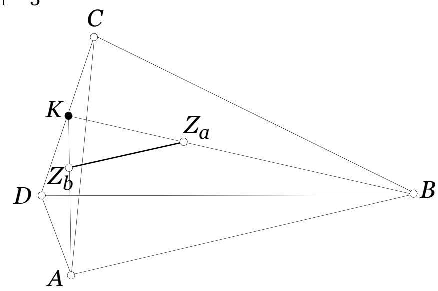
De omgeschreven cirkels van ABH, BCH en CAH zijn dus spiegelbeelden van de omgeschreven cirkel van ABC respectievelijk in BC, CA en AB. Een gevolg daarvan is weer (blikwisseling!) dat de spiegelbeelden H_a, H_b, H_c van het hoogtepunt van een driehoek ten opzichte van de zijden op de omgeschreven cirkel van ABC liggen.

Vier negenpuntscirkels door één punt

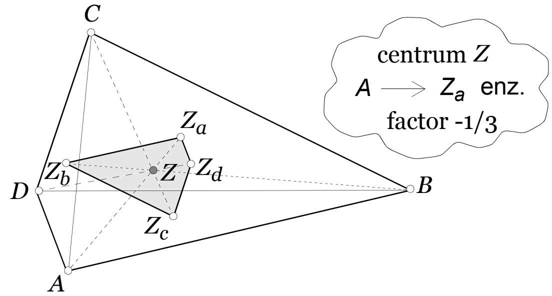
De diagonalen van een koordenvierhoek $ABCD$ vormen met de zijden vier driehoeken: ABC, ABD, ACD en BCD. Bij die vier driehoeken horen vier negenpuntscirkels die allemaal dezelfde straal hebben, namelijk $\frac{1}{2}R$ waarbij R de straal is van de cirkel om $ABCD$.



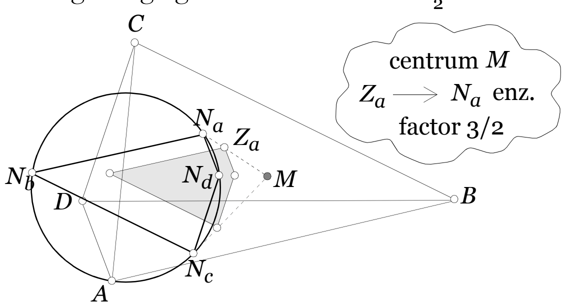
Een ontdekkingsreis met Geogebra of Cabri voedt het vermoeden dat die vier negenpuntscirkels concurrent zijn, ofwel dat er een punt *S* bestaat dat op alle vier de cirkels ligt. Het punt *S* zal dan het middelpunt moeten zijn van een cirkel met straal $\frac{1}{2}R$ die door de vier centra N_a, N_b, N_c en N_d van respectievelijk de negenpuntscirkels van BCD, ACD, ABD en ABC gaat. Voor een bewijs hiervan is het afdoende als kan worden aangetoond dat vierhoek $N_aN_bN_cN_d$ gelijkvormig is met $ABCD$ met gelijkvormigheidsfactor $\frac{1}{2}$.
Een geschikte tussenstap hierbij is om eerst te letten op vierhoek $Z_aZ_bZ_cZ_d$ met Z_a, Z_b, Z_c en Z_d zwaartepunten van respectievelijk BCD, ACD, ABD en ABC.
In de volgende figuur zijn de zwaartelijnen AK en BK van de driehoeken BCD en ACD getekend. De zwaartepunten Z_a en Z_b verdelen BK en AK in stukken die zich verhouden als 1 en 2; hieruit volgt $Z_aZ_b // AB$ en $|Z_aZ_b| = \frac{1}{3}|AB|$.



Iets dergelijks geldt voor de andere zijden van vierhoek $Z_aZ_bZ_cZ_d$ en hieruit kan worden geconcludeerd dat die vierhoek gelijkvormig is met $ABCD$ en dat de gelijkvormigheidsfactor $\frac{1}{3}$ is. Eigenlijk moet ik zeggen $-\frac{1}{3}$ want de eerste vierhoek is het beeld van de tweede bij een homothetie met factor $-\frac{1}{3}$. Het centrum van die homothetie is het zwaartepunt Z van vierhoek $ABCD$.



Vierhoek $Z_aZ_bZ_cZ_d$ is dus ook een koordenvierhoek en de straal van de omgeschreven cirkel is $\frac{1}{3}R$.
Laat M nu het middelpunt van de omgeschreven cirkel van vierhoek $ABCD$ zijn. Uit de figuur onder aan de vorige bladzij volgt dat de punten N_a, N_b, N_c en N_d de beeldpunten zijn van Z_a, Z_b, Z_c en Z_d bij een vermenigvuldiging vanuit M met factor $\frac{3}{2}$.



Gevolg: $N_aN_bN_cN_d$ is een koordenvierhoek en de straal van de omgeschreven cirkel is $\frac{3}{2} \times \frac{1}{3}R = \frac{1}{2}R$ en dat is precies wat ik wilde weten.

Tot slot een korte opmerking over Feuerbach. Die wiskundige plaatste de negenpuntscirkel in de schijnwerpers in 1822, en bewees dat 'zijn' cirkel raakt aan de ingeschreven en de drie aangeschreven cirkels van de bijbehorende driehoek. Een mooie stelling, maar vrij lastig te bewijzen. Dat lukt nog het best met een transformatie als instrument, dan niet de homothetie maar de inversie.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl