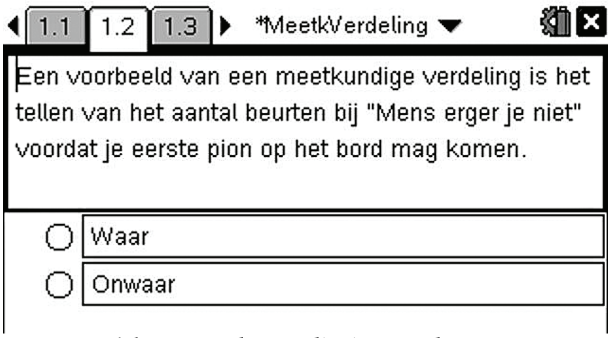
Om het spel *Mens erger je niet* te kunnen beginnen, moet je eerst een 6 gooien. En je kunt je flink gaan ergeren wanneer die 6 alsmaar uitblijft. Hoe lang kan dat eigenlijk duren? **Epi van Winsen** simuleert deze vraag met behulp van de TI-Nspire.

Mens erger je niet

Simulatie, kansrekening en algebra bij de meetkundige verdeling

Inleiding

Of het komt doordat het ook online gespeeld kan worden, weet ik niet, maar het klassieke bordspel *Mens erger je niet* is bij al mijn leerlingen bekend. Dat het een omgeving is waar je veel verschillende wiskunde kunt aantreffen, hadden zij niet vermoed.
Iedereen wist dat je, voordat je je pion op het speelveld mag plaatsen, eerst een zes gegooid moet hebben. Dit kan in de praktijk best wel lang duren.



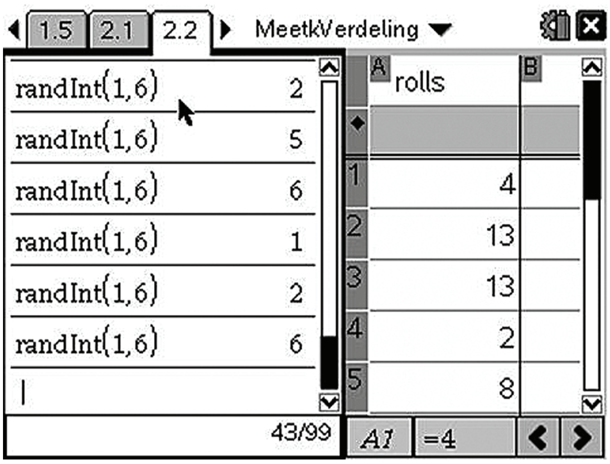
Het aantal beurten dat nodig is om de eerste zes te gooien, heeft een zogenaamde meetkundige verdeling en deze is het onderwerp van een les voor wiskunde D-leerlingen van 5 VWO nadat ze de binomiale en de normale verdeling hebben leren kennen. De leerlingen hebben een bestand gekregen op hun rekenmachine, de TI-Nspire met inleidende tekst, zelf controleerbare meerkeuzevragen en op te bouwen spreadsheets en grafieken.

In de inleiding komt de formele definitie van een meetkundig verdeelde stochast aan bod. Deze telt het aantal beurten tot en met het eerste succes waarbij:

1. iedere beurt precies twee uitkomsten heeft (succes en mislukking) met steeds dezelfde succeskans p.
2. alle beurten onafhankelijk zijn van elkaar.

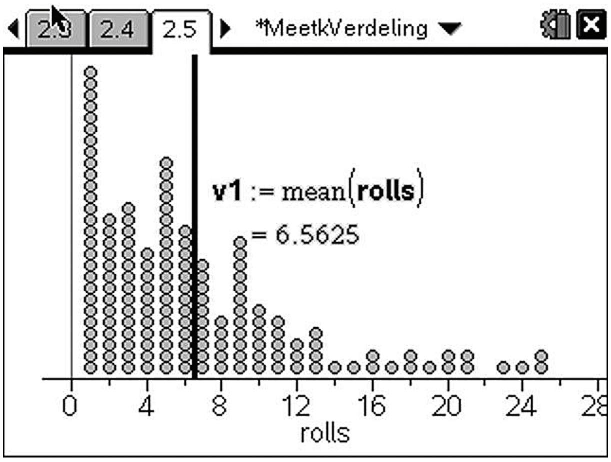
Enkele voorbeelden en non-voorbeelden komen in zelf na te kijken vragen voorbij. Eén van de non-voorbeelden was het achtereenvolgens pakken van een kaart uit een goed geschud spel kaarten totdat de eerste vrouw verschijnt. Bij het nabespreken kwam op mijn vraag waarom dit een non-voorbeeld is keurig als antwoord dat de achtereenvolgende trekkingen niet onafhankelijk zijn van elkaar.

Simulatie



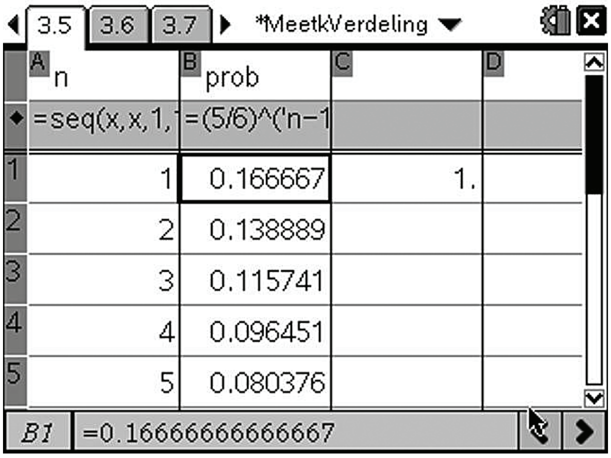
Simulatie op een grafische rekenmachine berust op het genereren van pseudo-toevalsgetallen. Na een reset krijgen alle machines precies dezelfde reeks van toevalsgetallen. Omdat ik de data van alle leerlingen wilde verzamelen, moesten ze beginnen met het commando **RandSeed***xxxx* waarbij ze voor de*xxxx* hun geboortedatum moesten invullen. Zo krijgen ze hun ‘eigen’ reeks toevalsgetallen.

Iedere leerling moest tien keer een rij dobbelsteengetallen genereren met **randInt(1,6)** en tellen hoe vaak ze moesten gooien totdat de eerste zes verscheen. In de spreadsheet is onder rolls aangegeven dat in de eerste serie worpen bij de vierde worp de eerste zes verscheen en bij de tweede serie worpen de eerste zes bij de dertiende worp verscheen. In het linkerdeel is te zien dat de laatste serie worpen bij de derde worp de eerste zes opleverde. Zo zijn in totaal 160 simulaties samengevoegd en dat geeft dan een plot met de empirische verdeling. Daarin is ook te zien dat de langste serie 25 worpen telde voor de eerste zes verscheen. In de figuur hieronder is ook het gemiddelde aantal worpen aangegeven.



Onderzoek

Een simulatie geeft een beeld, maar roept ook vragen op zoals de dip bij rolls = 4.
Dus maar eens kansen berekenen.



	A n	B prob	C	D
◆	=seq(x,x,1,1	=(5/6)^('n-1		
1	1	0.166667	1.	
2	2	0.138889		
3	3	0.115741		
4	4	0.096451		
5	5	0.080376		

B1 =0.16666666666667

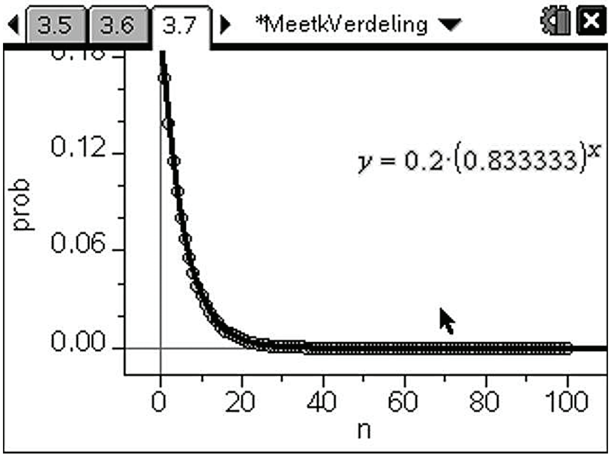
Zonder problemen werden de volgende kansen gevonden: $P(X=1)=\frac{1}{6}$, $P(X=2)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$,

$P(X=3)=\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$, $P(X=4)=\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6}=\frac{125}{1296}$,

$P(X=10)=\left(\frac{5}{6}\right)^9\cdot\frac{1}{6}=\frac{1953125}{60466176}\approx 0,0323$, en

$P(X=n)=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}$.

De algemene formule geeft een kansverdeling (voor $n = 1$ tot 100) waar snel een grafiek bij te maken is.



Exponentiële regressie op deze grafiek leidt tot de inleidende vraag om aan te tonen dat de formule voor $P(X=n)=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}$ te herleiden is tot de regressievergelijking. Zonder problemen komt dan

$$P(X=n)=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}\cdot 5\cdot\frac{1}{5}=$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}=\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\cdot\frac{1}{5}\approx 0,2\cdot(0,833333)^n$$

In cel C1 staat de som van de kansen uit kolom B. Dat dit een afronding is, wordt door de leerlingen snel ingezien. Dat de meetkundige verdeling te maken heeft met een meetkundige rij, waarvan de naam ook is afgeleid, wordt duidelijk als gevraagd wordt naar de som van alle kansen:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

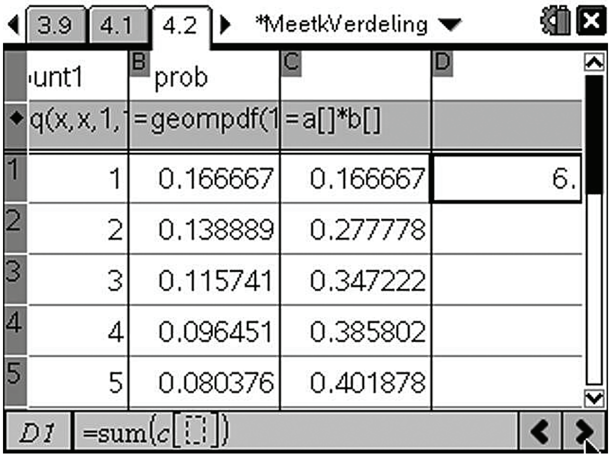
waarbij de somformule van de meetkundige rij

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{5}{6}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}=1$$ duidelijk maakt dat hier

echt een kansverdeling met som der kansen = 1 is.

Verwachtingswaarde

Uit de experimentele data kunnen we halen dat het gemiddeld 6,2 worpen heeft geduurd tot de eerste 6 geworpen is. De verwachtingswaarde kun je in de spreadsheet op een voor de hand liggende manier benaderen. De algebraïsche aanpak ligt voor de leerlingen minder voor de hand, maar heeft wel parallellen met de afleiding van de somformule voor meetkundige rijen.



De opdracht is om $E = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot n\right)$ te bepalen.

Hiervoor is in een klassengesprek het volgende afgeleid:

$$E = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot 4 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot 5 + \ldots$$

en dan de list:

$$\frac{5}{6} \cdot E = \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot 4 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot 5 + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot 4 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot 5 + \ldots$$

Zet dit netjes onder elkaar en bepaal het verschil:

$$E = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot 4 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot 5 + \ldots$$

$$\frac{5}{6}E = \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot 4 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot 5 + \ldots\right)$$

dus

$$\frac{1}{6}E = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot 1 + \ldots$$

en daar kwam zojuist 1 uit. Dus de verwachtingswaarde van een stochast met een meetkundige verdeling met succeskans $\frac{1}{6}$ is gelijk aan 6.

Huiswerk is om de verwachtingswaarde van een meetkundig verdeelde stochast met succeskans p te bepalen. Antwoord natuurlijk:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Slot

De meetkundige verdeling is ook in de rekenmachines ingebakken. De syntax is zowel voor TI-84 als voor TI-Nspire **geomPdf(p,n)** $= P(X = n)$ en **geomCdf(p,n)** $= P(X \le n)$. De Nspire heeft ook nog **geomCdf(p,m,n)** $= P(m \le X \le n)$, dit alles analoog aan wat de leerlingen voor de binomiale verdeling geleerd hebben.

Epi van Winsen
Sg. Sophianum, Gulpen