

Op een fiets met vierkante wielen comfortabel rijden kan, als je het wegdek tenminste een speciale vorm geeft. **Rudi Penne** en **Paul Levrie** rekenen uit hoe dat wegdek er dan uit moet zien om vervolgens op de vlakke weg de sporen van een fiets te analyseren.

Nieuwe wielen
Nieuwe wielen
Nieuwe wielen

Oude sporen Oude sporen Oude sporen Oude sporen Oude

Rudi Penne en Paul Levrie

Inleiding

Toen ons gevraagd werd op NWD2010 iets te komen vertellen over wiskunde en vervoer/fietsen, hebben we ons stuur met beide handen vastgegrepen, en zijn we over hobbelige wegen (of juist niet?) gereden naar wat u hieronder kan lezen. De personen die bij onze voordracht aanwezig waren, zullen in deze tekst sporen terugvinden van twee facetten van wat we toen hebben uiteengezet. Een eerste deel gaat over welk soort weg we moeten aanleggen als je met polygonale wielen wil rijden. In het tweede deel hebben we het over de sporen die een fiets achterlaat en wat je daaruit kunt afleiden.

Fietsen met vierkante wielen

Algemeen wordt aangenomen dat het wiel rond 3500 v. Chr. uitgevonden werd, ergens in Mesopotamië. Op de ronde vorm van het wiel lijkt niets aan te merken, dus opeenvolgende generaties van de menselijke beschaving zagen geen enkele reden om hierin verandering te brengen.

Maar als dingen te vanzelfsprekend worden, duikt meestal een wiskundige op om alles ingewikkeld te maken. In 1997 vond Stan Wagon het nodig om een fiets te bedenken met vierkante wielen. Bovendien slaagde hij erin om een comfortabele rit te maken dankzij aanpassing van het wegdek: zie hiernaast de foto van Wagon die in 1997 de wereldpers haalde. In het wetenschapsmuseum Technopolis in Mechelen (België) kunt u zelf het rijden met vierkante wielen ondervinden, weliswaar in een go-kart.



Terzijde merken we op dat in de directe omgeving van de Egyptische piramides vele halve boomstammen zijn opgegraven. Historici vermoeden dat deze als ondergrond dienden om zuilen met vierkante doorsnede vanuit de steengroeve naar de bouwwerf te rollen. Niets nieuws onder de zon.

Al lijkt het project van Stan Wagon hoofdzakelijk een gadget, het is een gevolg van wiskundig denkwerk en het geeft op zijn beurt aanleiding tot nieuwe vraagstukken. Meer bepaald, de fiets met vierkante wielen is gebaseerd op het artikel *Roads and Wheels* van Hall & Wagon (1992). Dit steunde dan weer op het artikel van G. B. Robison (*Rockers and rollers*, 1960).

Op een vlakke weg is rijden met vierkante wielen duidelijk geen goed idee, omdat de bestuurder meebeveegt met het op en neer gaan van de wielas:



Het geheim van het recept zit natuurlijk in de boogjes die ervoor zorgen dat het wielmiddelpunt horizontaal blijft:



Stel dat we gek genoeg zijn om wielen te maken met een platte kant R (zijde). Stel bovendien dat we een 'hobbel' van het wegdek modelleren als een wiskundige functie met voorschrift $y = f(x)$. We kiezen de beginsituatie met zijde R horizontaal en laten de oorsprong O samenvallen met het zwaartepunt van het wiel op dit moment (zie figuur 1). De afstand tussen dit zwaartepunt en de zijde R zullen we a noteren, en deze is constant omdat we het wiel star veronderstellen. Merk op dat in het begin ($t = 0$) het voetpunt A van de loodlijn uit het wielmiddelpunt op de zijde R op positie $(0, -a)$ ligt (zie figuur 1).

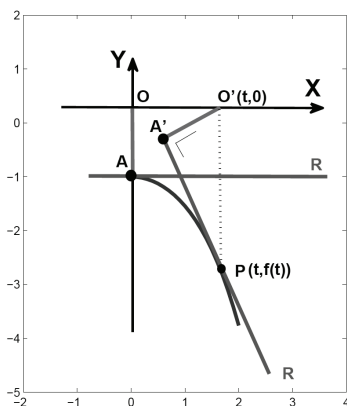


fig. 1

Het rijden met deze platte kant kan slechts comfortabel gebeuren onder de volgende voorwaarden:

- Op ieder ogenblik t raakt zijde R aan de weg $y = f(x)$ (in het punt $P(t, f(t))$).
- Het wielzwaartepunt (O') bevindt zich steeds boven het raakpunt P en beweegt horizontaal.

In zijn artikel van 1960 rekende Robison uit dat het geschikte voorschrift van de 'baan' gegeven wordt door

$$f(x) = -a \cosh(x/a)$$

waar \cosh staat voor de *cosinushyperbolicus*:

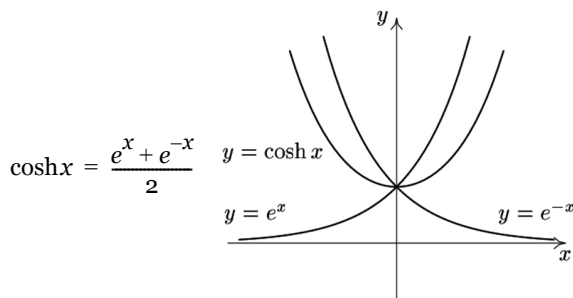


fig. 2

Dit resultaat kunnen we bijvoorbeeld als volgt vinden. Eerst stellen we de vergelijking op van de platte wielzijde als raaklijn in het punt $P(t, f(t))$:

$$R: f'(t)x - y + f(t) - f'(t) \cdot t = 0$$

De eis 'wielzwaartepunt O' beweegt horizontaal' wordt vertaald door de keuze $O' = (t, 0)$ en de eigenschap dat de afstand van O' tot R (platte wielkant) constant blijft:

$$|O'A'| = |OA| = a.$$

Uit de formule voor de afstand van een punt tot een rechte volgt:

$$|O'A'| = d(O', R) = \frac{|f(t)|}{\sqrt{f'(t)^2 + 1}}.$$

Dit brengt ons dus tot de volgende differentiaalvergelijking in $y = f(x)$:

$$a^2(y'^2 + 1) = y^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{ady}{\pm\sqrt{y^2 - a^2}} = dx$$

$$\Leftrightarrow \pm \operatorname{arcosh}(-y/a) = \frac{x}{a} + C \quad (\text{want } y < 0)$$

$$\Leftrightarrow y = -a \cosh(x/a + C)$$

De functie $y = \operatorname{arcosh} x$ staat voor de inverse van $f(x) = \cosh x$ met $x \geq 0$. Uiteindelijk, gecombineerd met de beginvoorwaarde $y(0) = -a$:

$$y = -a \cosh(x/a)$$

Opmerking. Deze oplossing garandeert meteen ook dat we 'rollen zonder glijden'. Inderdaad, als A' het voetpunt is op R van de loodlijn uit O' , dan is met behulp van de stelling van Pythagoras (zie figuur 1):

$$|A'P| = \frac{|f(t) \cdot f'(t)|}{\sqrt{f'(t)^2 + 1}} = a \cdot \sinh(t/a)$$

en anderzijds berekenen we voor de booglengte λ_{AP} op de grafiek tussen A en P :

$$\lambda_{AP} = \int_0^t \sqrt{f'(x)^2 + 1} dx = \int_0^t \cosh(x/a) dx = a \cdot \sinh(t/a)$$

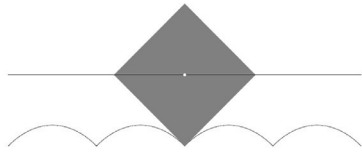
Hierbij staat \sinh natuurlijk voor de *sinushyperbolicus*:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Merk op dat $\cosh' x = \sinh x$ en $\sinh' x = \cosh x$.

Bovenstaande theorie stelt ons nu in staat om een wegdekrelief te ontwerpen waarover je met vierkante wielen kunt rijden. De weg bestaat dus uit een rij van identieke bulten, elk een spiegeling van een stuk grafiek van de cosinushyperbolicus. De lengte z van de vierkantszijde is precies even groot als de booglengte van de bult en bepaalt ook de afstand $a = z/2$ die de

kromming aanpast. Twee opeenvolgende bulten komen samen in een knikpunt waarin de twee raaklijnen een hoek van precies 90° maken, zodat de volgende zijde van het vierkant naadloos kan doorrollen:



Zonder noemenswaardige hindernissen kunnen we deze ontwerptechniek uitbreiden voor andere regelmatige veelhoeken als wielen (zie voor een animatie <http://mathworld.wolfram.com/Roulette.html>; de figuren zijn overigens afkomstig van deze website). Als we de lengte z van de zijde fixeren (dus ook de booglengte van de bulten), dan zal de afstand a van het middelpunt tot een zijde toenemen met het aantal zijden. En als a toeneemt, wordt de kromming van de bult $y = -a \cosh(x/a)$ kleiner, en de hoek tussen opeenvolgende bulten groter. We kunnen dus stellen: hoe meer zijden, hoe vlakker de baan. In de limiet wordt de weg helemaal plat en het wiel een cirkel. Al betwijfelen we of de bewuste Mesopotamiër 5500 jaar geleden deze redenering volgde om tot zijn uitvinding te komen.

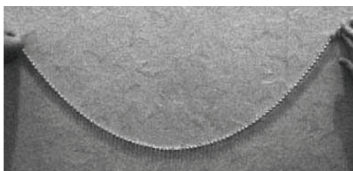


Opmerking. Voor gelijkzijdige driehoeken als wielen treedt er een complicatie op. De cupmaat van het baantraject is nu zo groot dat terwijl een zijde over een bult rolt, ze al de volgende bult doorboort.



Over de kettinglijn

De grafiek van de cosinushyperbolicus wordt dikwijls de kettinglijn genoemd (*catenary* in het Engels; *catena* is Latijn voor ketting). Inderdaad, een kabel of ketting die opgehangen is tussen twee punten op gelijke hoogte, zal steeds wat onder zijn gewicht doorbuigen, omdat hij niet perfect ‘stijf’ is.



Deze evenwichtsvorm wordt gegeven door de vergelijking

$$y = K \cosh(mx)$$

(met K en m geschikte schaalparameters). In deze materie ging Galilei iets te kort door de bocht, want hij dacht dat een doorhangende kabel de vorm van een parabool had.

Ruwweg volgt dit uit het feit dat de kracht op een kabel in rust, enkel doorhangend onder zijn eigen gewicht, uniform verdeeld is over zijn lengte. Dit leidt dan tot de volgende vergelijking:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{k} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

met k een ‘kettingconstante’. Gekoppeld aan de juiste randvoorwaarden, komen we dan uit bij de cosinushyperbolicus. De vergelijking voor de kettinglijn werd voor het eerst gevonden door Christiaan Huygens (1691) (ongeveer gelijktijdig met Leibniz en Bernoulli).

Omdat de kettinglijn dus de natuurlijke reactie is op een uniforme krachtverdeling over deze lijn, kwamen Perzische en Arabische architecten meer dan duizend jaar geleden reeds op het idee om de gespiegelde kettinglijn te gebruiken voor de bogen in hun bouwwerken. Deze vorm minimaliseert immers de vereiste stijfheid van de boog om een uniforme gewichtsverdeling op te vangen. Verbaas u bijvoorbeeld hieronder over de Gateway Arch in St. Louis.



De Gateway Arch (illustratie afkomstig van <http://commons.wikimedia.org>).

Bij niet-symmetrische bouwconstructies is de last op een boog boven een deur of raam wellicht niet uniform verdeeld. Dit bracht de Spaanse architect Gaudi ertoe om te werken met draadmodellen waar zakjes zand voor een meer ingewikkelde lastenverdeling zorgden.

Opmerking. Voor ophangsystemen bij bruggen is het vaak belangrijk dat de last horizontaal uniform verdeeld is, in plaats van over de kabellengte. Het gewicht van de kabel zelf is dan minder belangrijk voor de las-

tenverdeling. Men kan aantonen dat de kabels dan eerder een parabolische vorm aannemen. Aannemelijk dus dat Galilei zich had laten vangen. Zowel de kettinglijn als de parabool zijn natuurlijk wiskundige idealisaties. In fysische constructies treden vaak mengvormen op.

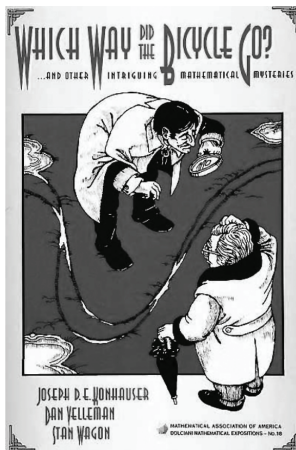
Intermezzo

(zie <http://math.dartmouth.edu/~doyle/docs/gi/gi.pdf>)
 Het probleem van John Conway: bevestig een touwtje aan je rechtertrapper en trek aan dat touwtje (= pijltje op de figuur) terwijl je met je andere hand de fiets in evenwicht houdt. In welke richting rijdt de fiets?



Fietsen en sporen

In het Sherlock Holmes-verhaal *The Adventure of the Priory School* (1903) van Sir Arthur Conan Doyle lezen we het volgende:



We had come on a small black ribbon of pathway. In the middle of it, clearly marked on the sodden soil, was the track of a bicycle.

...
 "This track, as you perceive, was made by a rider who was going from the direction of the school."

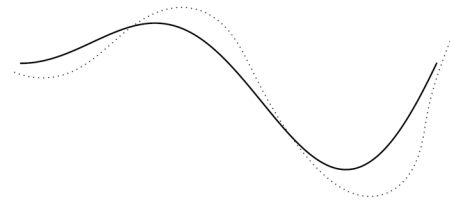
"Or towards it?"

"No, no, my dear Watson. The more deeply sunk impression is, of course, the hind wheel, upon which

the weight rests. You perceive several places where it has passed across and obliterated the more shallow mark of the front one. It was undoubtedly heading from the school."

Sherlock Holmes slaat hier de bal wel lelijk mis: als een fiets sporen achterlaat, bijvoorbeeld in de modder, en het spoor van het achterwiel en het voorwiel kruisen elkaar, dan gaat het spoor van het achterwiel het spoor van het voorwiel 'overschrijven', en dat kan je ook zien. Maar je kan daaruit niet afleiden in welke richting de fiets reed.

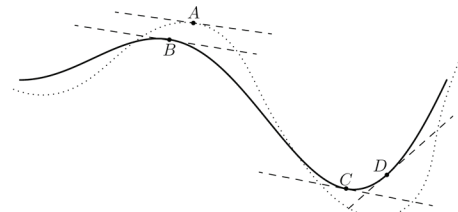
In *Which Way Did the Bicycle Go* (Konhauser, Velleman & Wagon, 1996) wordt de volgende vraag gesteld: hoe kunnen we dat wel bepalen? Stel dat een fiets deze twee sporen achterlaat. In welke richting reed de fiets dan?



Enkele opmerkingen die ons zullen helpen:

- Een fietswiel wijst op elk ogenblik in de richting van de raaklijn aan het wielspoor in het contactpunt van het wiel met de grond.
- Het achterwiel wijst steeds in de richting van het contactpunt van het voorwiel met de grond, dus naar het spoor van het voorwiel.
- De afstand tussen de contactpunten van de wielen met de grond is constant.

Bekijk even het punt *A* op de volgende figuur. Uit de opmerkingen 1 en 2 volgt dat het gepunte spoor (waarschijnlijk) niet dat van het achterwiel zal zijn. Kijk nu naar de punten *B*, *C* en *D*. Dan zie je al snel met opmerking 3 dat de fiets van links naar rechts reed!

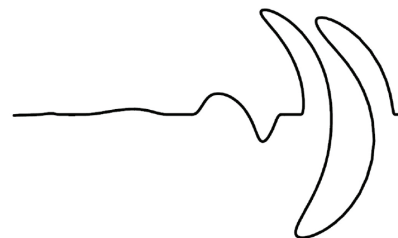


Maar kunnen we uit de sporen altijd afleiden in welke richting de fiets reed? Er zijn natuurlijk uitzonderingen, en we delen ze op in twee soorten.

Eén spoor. Als de fiets het volgende spoor achterlaat, dan is het evident dat het moeilijk wordt:



Een interessante vraag die we hier kunnen stellen, is de volgende. Kan het dat een fiets maar één spoor achterlaat en dat het geen rechte lijn is? Dit probleem is uitvoerig bestudeerd door David L. Finn (2002); neem zeker eens een kijkje op zijn website¹. Het antwoord is ja, en hier is een voorbeeld van zo'n spoor:



(In welke richting reed deze fiets?)

Twee sporen. Zijn er gevallen met twee sporen waarbij je de rijrichting niet kunt bepalen? Natuurlijk heb

je het linkse geval, maar er zijn er nog andere, zoals in de figuur rechts. Deze figuur vind je ook op de website van Finn² (2004):



Er zijn nog andere vragen die we ons kunnen stellen. Zijn er gevallen met twee sporen waarbij je niet kunt zien wat het spoor is van het voorwiel en welk dat van het achterwiel? Of, hoe maken we een figuur zoals deze in de tekst? Op deze laatste vraag willen we nog even ingaan. Gegeven het spoor van het achterwiel, dan is het eenvoudig om het spoor van het voorwiel te construeren. We vertrekken daarvoor van een stelsel parametervergelijkingen voor het spoor van het achterwiel, stel

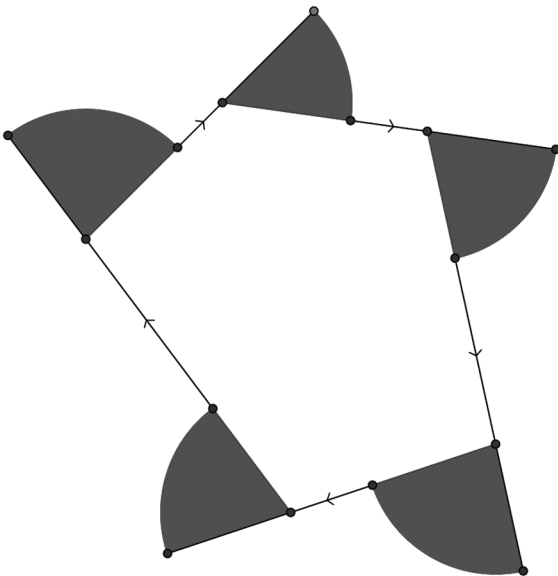
$$(f(t), g(t)).$$

Neem een punt van deze kromme, bijvoorbeeld het punt met coördinaten $(f(t_0), g(t_0))$. Dit is het contactpunt van het achterwiel met de grond. Uit opmerking 1 volgt dat we het contactpunt van het voorwiel met de grond moeten zoeken in de richting van de raaklijn aan deze kromme in dit punt. We weten nu dat $(f'(t_0), g'(t_0))$ een rakende vector voorstelt, en we kunnen die normaliseren. De vector

$$\left(\frac{f'(t_0)}{\sqrt{[f'(t_0)]^2 + [g'(t_0)]^2}}, \frac{g'(t_0)}{\sqrt{[f'(t_0)]^2 + [g'(t_0)]^2}} \right)$$

is een raakvector met lengte 1. Stel nu dat de fiets lengte L heeft, dan vinden we het punt waar het voorwiel de grond raakt op deze positie:

$$(f(t_0), g(t_0)) \pm L \cdot \left(\frac{f'(t_0)}{\sqrt{[f'(t_0)]^2 + [g'(t_0)]^2}}, \frac{g'(t_0)}{\sqrt{[f'(t_0)]^2 + [g'(t_0)]^2}} \right)$$



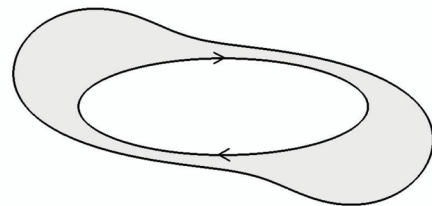
Zo vinden we een stelsel parametervergelijkingen voor het spoor van het voorwiel:

$$f(t), g(t) \pm L \cdot \left(\frac{f'(t)}{\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}}, \frac{g'(t)}{\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}} \right)$$

Hier kan je kiezen of je een plus- of een minteken neemt, deze keuze bepaalt de richting waarin de fiets rijdt...

Fietsen, sporen en oppervlakteberekening

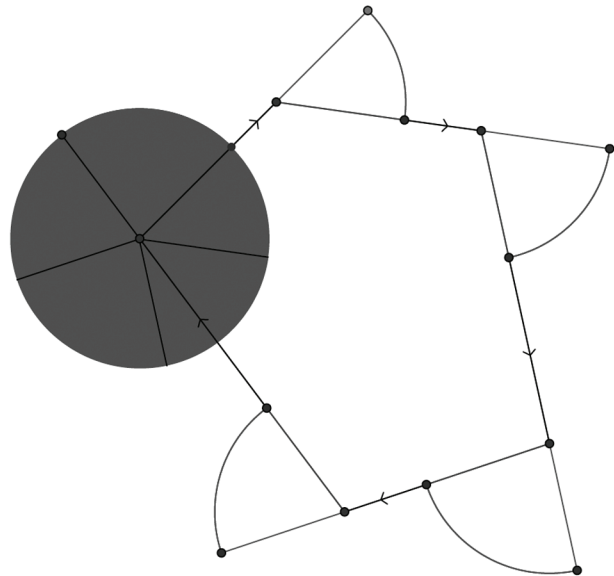
Nu is er een interessante eigenschap (zie bijvoorbeeld Apostol, 2000) af te leiden in verband met de sporen van een fiets als je rondjes rijdt en er daarbij voor zorgt dat het spoor van je achterwiel convex is, zoals op de volgende figuur:



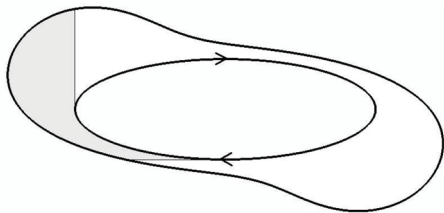
De oppervlakte van het gebied tussen de twee sporen is dan onafhankelijk van de vorm van de rondjes die je rijdt, en is enkel afhankelijk van de grootte van je fiets. Meer specifiek, als de afstand tussen de twee contactpunten van de wielen met de grond gelijk is aan a , dan is die oppervlakte gelijk aan πa^2 of precies de oppervlakte van een cirkel met straal a .

Dit kan je als volgt gemakkelijk inzien. Een convexe kromme (zoals de ellips in de bovenstaande figuur) kun je zien als een limiet van convexe veelhoeken. Stel je nu even voor dat je achterwiel als baan een convexe veelhoek beschrijft zoals in de figuur links onder aan deze bladzijde.

Je rijdt over een zijde van de veelhoek tot je met je achterwiel in een hoekpunt staat. Dan draai je je fiets

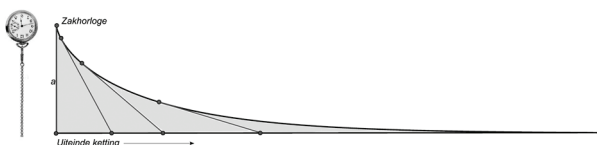


een slag tot je voorwiel uitkomt op de volgende zijde van de veelhoek (het contactpunt van je voorwiel met de grond beschrijft daarbij een cirkelboog). Dan rij je door tot aan het volgende hoekpunt, enzovoort. Opnieuw zijn er twee sporen, en die begrenzen een gebied. Op de figuur rechts kun je dan zien dat de oppervlakte van dat gebied gelijk is aan de oppervlakte van een cirkel met straal a . Merk op dat als je maar een deel van de baan doorloopt, dat je dan ook de bijhorende oppervlakte kan berekenen. Daarbij is de hoek waarover de raaklijn aan de binnenbaan gedraaid is, bepalend. Bijvoorbeeld hier zal de gekleurde oppervlakte gelijk zijn aan $\pi \frac{a^2}{4}$.



Fietsen, sporen, oppervlaktes en de tractrix

We kunnen dit zelfs gebruiken om een oppervlakte te berekenen waarvoor we anders een integraal nodig hebben. Een bekend vraagstuk is het volgende. Neem een oud zakhorloge, leg het op een houten tafel en zorg ervoor dat het kettinkje gespannen is. Als je dan aan het uiteinde van de ketting trekt in een richting loodrecht op de ketting, dan beweegt het horloge mee. Wat voor een weg beschrijft het horloge? Het is welbekend dat de kromme in kwestie een tractrix is. De horizontale lijn op de figuur is de beweging van het uiteinde van de ketting.



Het principe is natuurlijk hetzelfde als bij een fiets. Als we de gekleurde oppervlakte willen berekenen, dan kunnen we dus tewerk gaan zoals boven, maar we hebben hier maar een deel van een gesloten kromme als baan van het achterwiel: de raaklijnen in begin- en eindpunt maken een rechte hoek. De oppervlakte is dan ook gelijk aan

$$\pi \frac{a^2}{4}.$$

Rudi Penne,

Departement Wiskunde Universiteit Antwerpen/
 Departement IWT Karel de Grote-Hogeschool, Hoboken (België),
 rudi.penne@kdg.be

Paul Levrie,

Departement Computerwetenschappen Universiteit Leuven/
 Departement IWT Karel de Grote-Hogeschool, Hoboken (België),
 paul.levrie@kdg.be

Literatuur

- Apostol, T. (2000). A Visual Approach to Calculus Problems. *Engineering & Science*, 3, 22–31.
- Finn, D. L. (2002). Can a Bicycle Create a Unicycle Track? *College Math. J.*, 33, 283-292.
- Finn, D. L. (2004). Which Way Did You Say That Bicycle Went? *Math. Mag.* 77, 357-367.
- Hall, L. & Wagon, S. (1992). Roads and Wheels. *Math. Mag.* 65, 283-301.
- Konhäuser, Velleman, & Wagon (1996). *Which Way Did the Bicycle Go?* Washington, D.C.: Mathematical Association of America.
- Robison, G. B. (1960). Rockers and rollers, *Math. Mag.* 33 (1960), 139-144.

Noten

- [1] <http://www.rose-hulman.edu/~finn/research/unicycle/unicycle.html>
- [2] <http://www.rose-hulman.edu/~finn/research/bicycle/tracks.html>