

In het kader van de masteropdracht van de Eerstegraads Lerarenopleiding Wiskunde ontwikkelde **Peter van Leuteren** in de periode van september 2009 tot maart 2010 een zevental korte modules over wiskundig modelleren. De modules werden ontwikkeld voor de bovenbouw van het vwo en zijn deels getest binnen een drietal middelbare scholen. In dit artikel worden de inhoud van de modules, het doel en de eerste resultaten gepresenteerd.

Wiskundig modelleren voor het vwo

Uitdagende cases voor de bovenbouw

Inleiding

Door de invoering van de vernieuwde tweede fase in 2007 werd het voor universiteiten en hogescholen mogelijk om de banden met de middelbare scholen verder te versterken. Bij de invoering van het vak Wiskunde D ontstond daarbij de vraag naar modules voor de invulling van de domeinen Wiskunde in Wetenschap (voor het vwo) en Wiskunde en Techniek (voor de HAVO). Verschillende universiteiten en hogescholen kregen de mogelijkheid om in samenwerking met middelbare schooldocenten materiaal voor dit wiskundevak te gaan ontwikkelen. Zo ontstonden er binnen het Regionale Steunpunt Bèta Oost modules over wiskundig modelleren.

Na het inzien van de verschillende door het Regionaal Steunpunt Bèta Oost ontwikkelde modules raakte ik persoonlijk geïnteresseerd in voornamelijk de startmodule Modelleren¹ die dit steunpunt aanbiedt. De invulling van de module met verschillende kleine opdrachten en verschillende onderwerpen sprak mij aan. Zo ontstond in het kader van de masteropdracht van de Eerstegraads Lerarenopleiding Wiskunde het idee om nieuwe modules met betrekking tot wiskundig modelleren te gaan ontwikkelen. Hierbij werd al snel gekozen om modules te ontwikkelen die behalve binnen wiskunde ook binnen het schoolvak Natuur, Leven en Technologie (NLT) zouden kunnen worden ingezet.

Waarom wiskundig modelleren?

Voordat we gaan kijken naar de opbouw en inhoud van de ontwikkelde modules is het belangrijk dat duidelijk wordt waarom we eigenlijk modules over specifiek 'wiskundig modelleren' willen ontwikkelen. Om deze vraag goed te kunnen beantwoorden, moeten we eerst bekijken wat we precies onder wiskundig modelleren en onder een wiskundig model verstaan.

Wiskundig modelleren is het in een gesloten systeem vangen van een (natuur)verschijnsel of fenomeen dat

de nieuwsgierigheid van de menselijke geest heeft getrokken. Het model (systeem) dient een logisch geheel te zijn, het identificeert grootheden die relevant zijn voor het fenomeen. Kijken we bijvoorbeeld naar het temperatuursverloop gedurende een dag, dan speelt het effect van de zonshoogte, de weersituatie en het betreffende seizoen een belangrijke rol. We focussen op eigenschappen en kenmerken van het fenomeen en proberen naar relaties te zoeken tussen deze geïdentificeerde grootheden. Wellicht onbewust maken we hierbij reeds keuzes over welke aspecten volgens ons relevant zijn.

De eerste activiteit binnen modelleren is dus het observeren van het verschijnsel en het benoemen van eigenschappen. Tot zover speelt wiskunde geen rol, maar het zoeken naar kwantificeerbare grootheden en de eventuele relaties tussen deze, is wezenlijk voor wiskundig modelleren. Het is een vaardigheid waarin een model als een logisch geheel wordt gebouwd, waarin relevante variabelen en grootheden worden herkend en waarin grootheden wel of niet met elkaar in relatie staan. Een wiskundig model is dan ook een vereenvoudigde beschrijving van de werkelijkheid in wiskundige termen. Het model dat tijdens dit modelleerproces ontstaat, moet mogelijk nog worden bijgesteld na terugkoppeling met de werkelijkheid. Het modelleerproces kan daarbij enkele iteratieslagen ondergaan als gevolg van het (onterecht) negeren van variabelen die toch wezenlijk zijn voor het verschijnsel. Ieder model van een fenomeen zal echter altijd zekere aannames bevatten en kan op grond daarvan conclusies formuleren.

Via wiskundig modelleren wordt wiskunde een breed inzetbaar gereedschap. De leerling ontwikkelt kennis op het gebied van identificatie van de meest geschikte wiskundetechniek. Indien echter eerder opgedane wiskundetechnieken niet toereikend zijn, ontstaat de vraag naar uitbreiding van de wiskundige kennis. Het

proces van problemen oplossen, verbindingen zoeken en uittesten en controleren van resultaten staat centraal bij deze ontwikkeling van nieuwe interessante wiskunde. Zo kunnen leerlingen in aanraking komen met voor hen onbekende situaties waarin meerdere variabelen van belang zijn, en kunnen – afhankelijk van beginaannamen – verschillende eindantwoorden worden gevonden.

Zo beschouwd is wiskundig modelleren een wetenschappelijke activiteit, en voor een VWO-klas als vaardigheid niet tot in de finesses uitvoerbaar. Maar ook hier geldt dat een aanzet tot het proces van beschrijving van een fenomeen via ‘structureren-redeneren-abstraheren’ met korte modules deels in gang kan worden gezet. Laat de klas grootheden bij het fenomeen noemen, laat hen hierin een selectie maken en laat hen wiskundige verbanden opsporen volgens de regels van de logica. Op deze manier komt wiskunde voor de leerlingen wel in een ander perspectief te staan, maar dit is wat toegepaste wiskunde in wetenschappen technologie behelst².

Projectgrenzen en randvoorwaarden

Bij de start van het project werd reeds gekozen om niet één onderwerp uit te diepen, maar om net als in de startmodule van het Regionale Steunpunt Bèta Oost, meerdere onderwerpen uit het dagelijks leven aan te grijpen. Daarnaast hebben meerdere (kleine) modules als voordeel dat men ook bij beperkte tijd een module binnen een lessenreeks kan uitvoeren. Persoonlijke voorkeur van docent of de leerlingen kan daarbij de keuze van een module bepalen.

Aan het begin van het ontwerpproces werd tevens gefocust op samenwerking tussen twee of drie leerlingen tijdens het maken van een opdrachten. Door de leerlingen op deze wijze, met behulp van uitdagende cases afkomstig uit verschillende disciplines, ervaring te laten opdoen met wiskundig modelleren, hoopten we een begin van wetenschappelijke verdieping in onderwerpen met technische en maatschappelijke context te bewerkstelligen. Zo wordt een link gelegd tussen wiskunde, samenleving en wetenschap.

Ontwikkeling en didactiek

Aan de hand van de vooraf opgestelde ideeën en eendoelen werden, in de periode van september 2009 tot en met februari 2010, een zevental korte modules ontwikkeld. Deze zeven modules werden vervolgens in een bundel samengevoegd. De voorzijde van deze bundel is in figuur 1 weergegeven. Behalve het ontwikkelen van een leerlingenmodule werd daarbij ook uitgebreid aandacht besteed aan het ontwikkelen van een docentenhandleiding. De modules die ontstonden

zijn namelijk niet vergelijkbaar met een hoofdstuk uit één van de gebruikelijke wiskundemethodes. Wegens de rijke context wordt het denken van de leerling gestimuleerd en wordt het leerproces gestuurd door vragen die de leerlingen zichzelf stellen. Deze manier van werken is zowel voor de leerling als voor de docent nieuw, waardoor een gedetailleerde en uitgebreide docentenhandleiding noodzakelijk werd.

Aan de hand van onderwerpen als veeteelt, snelheidscontroles en wielrennen wordt in alle modules de nieuwsgierigheid van de leerlingen opgewekt. Door in groepjes van twee of drie leerlingen aan een opdracht te werken, kunnen de leerlingen elkaar hierbij vragen stellen en samen in discussie gaan over mogelijke grootheden, relaties en de structuur van een op te stellen model. De docent speelt hierbij een begeleidende rol door zelf ook vragen en opmerkingen toe te voegen aan deze onderzoeksfase.



fig. 1 Omslag modules Wiskundig Modelleren.

Binnen de eerste module genaamd *Melkveebedrijf* wordt op de beschreven manier bijvoorbeeld onderzoek gedaan naar de meest efficiënte manier waarop een boer zijn land kan indelen. Door een model op te stellen voor de opbrengst van voedermaïs, de opbrengst van gemaaid gras, en de benodigde hoeveelheid grond om de koeien in de zomer te kunnen laten grazen, ontwikkelt de leerling inzicht op gebied van wiskundig

modelleren. Door hulpvragen te stellen als “Denk je dat een boer meer gras- of juist meer maïsland nodig heeft om de koeien te kunnen voeren?”, wordt het denken van de leerling hierbij gestimuleerd.

Het modelleringsproces en de moeilijkheidsgraad

De zeven modules die zijn ontwikkeld, zijn naar moeilijkheidsgraad genormeerd. Op een schaal van drie wordt onderscheid gemaakt tussen modules die geschikt zijn voor het vierde leerjaar, modules die geschikt zijn voor leerjaar vier en/of vijf en als laatste modules geschikt voor leerjaar vijf en/of zes. De noodzakelijke voorkennis wordt in de docentenhandleiding per module beschreven. In tabel 1 is een overzicht van de verschillende modules en de normering weergegeven.

De modelleercyclus, die in de verschillende modules naar voren komt wordt in de eerste modules nog relatief gestuurd doorlopen. Grootheden zijn vaak reeds gegeven en de leerling hoeft dan ook alleen nog naar relaties tussen de grootheden te zoeken om het gegeven fenomeen te kunnen beschrijven. In de modules met een hogere moeilijkheidsgraad wordt de leerling echter steeds meer losgelaten en moet de leerling alle stappen in het modelleringsproces zelf doorlopen. Door zelf vragen te stellen, relaties te zoeken en grootheden te kiezen, ontstaat zo een model dat de werkelijkheid benadert. In hoeverre het model de werkelijkheid representeert hangt daarbij uiteraard af van de selectie van grootheden en relaties, die door de leerling zijn opgesteld en gekozen. Om het modelleringsproces aan te leren, wordt aangeraden om te starten met een module met 4 VWO-normering. Vervolgens kunnen deze modules worden vervolgd met modules met een hogere moeilijkheidsgraad.

Tabel 1: Overzicht, normering en aantal lesuren van de zeven modules.

Modulietitel:	Normering:	Aantal lesuren:
Melkveebedrijf	4 VWO	2
Kruispunt	4/5 VWO	4
Jupiter	4/5 VWO	3
Wielrennen	4 VWO	5
Snelheidscontroles	4/5 VWO	3
Spoorwegennet	4/5 VWO	2
Ademen	5/6 VWO	7

Testen in de klas

Na afronding van de modules is in februari en maart 2010 de module *Melkveebedrijf* uitgetest binnen een aantal middelbare scholen. Voor aanvang van deze

test werd een vragenlijst opgesteld bestaande uit een veertiental meerkeuzevragen over de inhoud, het onderwerp en de moeilijkheidsgraad van de module. Deze vragenlijst werd in een gedrukt moduleboekje, ter afsluiting van de module, opgenomen. Figuur 2 toont een tweetal bladzijden uit het moduleboekje.

Eind februari brachten twee 3-VWO klassen van de Scholengemeenschap Twickel en het OSG Bataafs Lyceum uit Hengelo een bezoek aan de Universiteit Twente. Tijdens een wiskunde D middag kregen de 49 aanwezige leerlingen, die op het punt stonden om een profiel te gaan kiezen, behalve informatie over wiskunde D ook de module uitgereikt. In groepjes van twee leerlingen werd vervolgens aan het eerste deel van de module gewerkt en werd aan het eind de vragenlijst ingevuld. Ondanks dat de module *Melkveebedrijf* in feite genormeerd was voor toepassing in 4 VWO, werd hierbij goed ingeschat dat de test in 3 VWO niet tot grote problemen zou leiden.

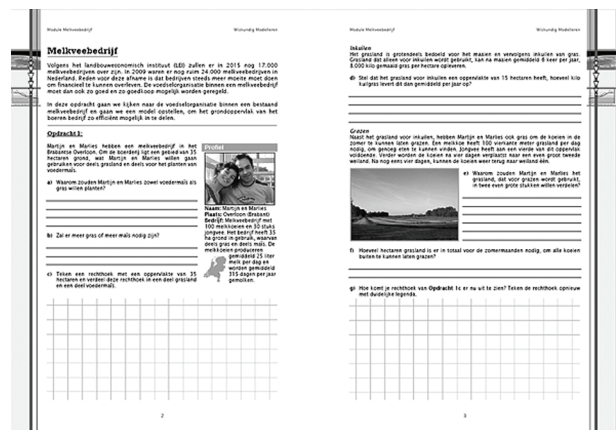


fig. 2 Een tweetal pagina's van het moduleboekje.

In maart 2010 werd de module tevens binnen een 4 HAVO/VWO Wiskunde D combinatieklas uitgetest op de KSG Marianum in Groenlo. Tijdens een tweetal bezoeken aan deze middelbare school werd de module in twee delen door de 22 HAVO- en VWO-leerlingen gemaakt, waarna ook hier de vragenlijst werd ingevuld.

Tijdens het uittesten van de module kwamen allerlei zaken naar voren. Zo moesten de leerlingen wennen aan de hoeveelheid tekst in vergelijking met de gebruikelijke wiskundemethode, maar was men enthousiast over het mogen samenwerken met andere leerlingen, het wiskundig bekijken van een onderwerp uit het dagelijks leven, en het uitdagende karakter van de vragen. Bij de afsluiting van de module vertelde een leerling bijvoorbeeld dat hij het op ‘biologie met formules’ vond lijken, terwijl een andere leerling het meer aan ‘natuurkunde, maar dan zonder moeilijke formules’ deed denken.

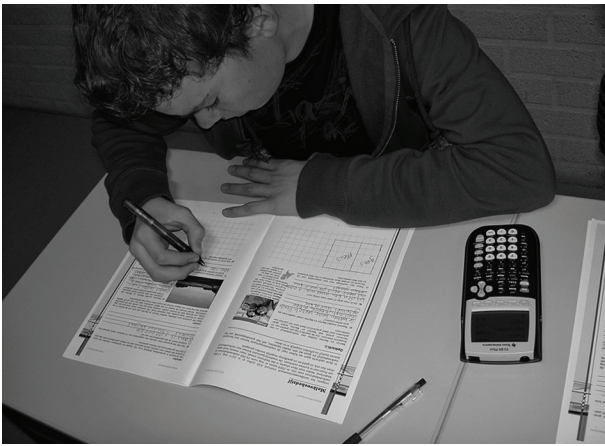


fig. 3 Een 4 vwo-leerling aan het werk met de module.

Ook was het mooi om te zien hoe de leerlingen tijdens het werken aan de module met elkaar in overleg en discussie gingen over mogelijke aannames en relaties. Ook eigen ervaringen kwamen hierbij naar voren. Zo deelde een leerling, waarvan de ouders zelf een melkveebedrijf hadden, mee hoeveel voer zijn ouders tijdens de winter elke avond in de stal brachten. Deze eigen ervaringen droegen zo bij aan het voorstellingsvermogen van andere leerlingen die de indruk hadden gekregen dat de gemaakte berekeningen wel erg grote hoeveelheden gras en maïs opleverden.

De docenten van de verschillende klassen gingen tijdens de uitvoering van de modules overigens als begeleiders te werk. In alle drie de testsituaties waren de docenten vooraf wel op de hoogte gesteld van de inhoud van de module, maar waren zij niet bekend met de antwoorden uit de docentenhandleiding. Door deze manier van werken werden de docenten gestuurd tot rol van begeleider en kwamen zij zelf tot het stellen van hulpvragen, zonder dat ze zich daar bewust van waren.

Resultaten van de vragenlijst

Ondanks dat slechts één van de zeven ontwikkelde modules werd uitgevoerd, zou het toch zeer interessant zijn om te zien wat de leerlingen van deze module *Melkveebedrijf* en de manier van werken vonden. Met behulp van de vragenlijst, waarvan de vragen in figuur 4 zijn weergegeven, werd zo behalve de observaties tijdens de les, nog een tweede indruk van de leerlingen verkregen.

Uit de ingevulde vragenlijsten volgde onder andere dat de leerlingen het leuk hadden gevonden om met de module bezig te zijn. Het overgrote deel van de leerlingen vond het onderwerp uitdagend en interessant, en vond daarbij dat de wiskundekennis die men al bezat, voldeed om de module te kunnen maken.

Daarnaast vond men dat de opdrachten maar weinig op de gebruikelijke wiskundemethode leken en dat de opdrachten niet erg wiskundig van aard waren, maar dat er ook algemene, interesse opwekkende vragen in de module werden gesteld. Het gezamenlijk werken aan een opdracht bleek ook goed bij te dragen aan het eindresultaat en aan een toepassing binnen een ander vak dan wiskunde, zo oordeelde een groot deel van de leerlingen. Als laatste vond men dat het bekijken en analyseren van een onderwerp uit het dagelijks leven toch wel erg leuk en interessant was en dat invoering van soortgelijke modules binnen wiskunde zeker een goede bijdrage aan het vak zou zijn.

Vragenlijst:	
1.	Ik vond het leuk om met de opdrachten uit de module <i>Melkveebedrijf</i> bezig te zijn.
2.	Ik vond het onderwerp van de module interessant.
3.	Ik vond de opdrachten uitdagend.
4.	De moeilijkheidsgraad van de opdrachten was voor 3-vwo te hoog.
5.	Mijn wiskundekennis was voldoende om de opdrachten te kunnen maken.
6.	Ik had genoeg tijd om Opdracht 1 helemaal af te ronden.
7.	De opdrachten waren erg wiskundig.
8.	De opdrachten leken erg veel op die uit de gebruikte wiskundemethode op school.
9.	Ik zou het leuk vinden om meer van dit soort modules op school te maken.
10.	Ik kon de opdrachten zelfstandig, zonder hulp van anderen, maken.
11.	In groepjes van twee of drie leerlingen aan de module werken is handiger dan alleen.
12.	Deze module zou je behalve bij wiskunde ook bij een vak als natuurkunde, biologie of aardrijkskunde kunnen toepassen.
13.	Het is erg leuk om onderwerpen uit het dagelijks leven met een wiskundige in teek te bekijken
14.	Als wiskunde D deels zou worden opgevuld met modules over wiskundig modelleren, dan zou ik het vak zeker kiezen.
15.	Als je zelf deze module zou mogen aanpassen of uitbreiden, wat zou je dan veranderen?

fig. 4 Overzicht van de vragen uit de vragenlijst.

Na de veertien meerkeuzevragen was er ook één open vraag in de vragenlijst opgenomen. Deze vraag ging over mogelijke aanpassingen of uitbreidingen van de module die de leerlingen na het maken van de opdrachten misschien voor ogen hadden. Op deze vraag werd door 9 van de 65 ondervraagde leerlingen gemeld dat ze toch liever een ander onderwerp hadden bekeken. Tevens werd door 5 van de 65 leerlingen om meer tijd voor het maken van de opdrachten gevraagd. Vier leerlingen zouden minder tekst hebben toegepast en drie leerlingen zouden graag meer tips en aanwijzingen zijn tegengekomen.

Samengevat bleken zowel de docenten als de leerlingen enthousiast te zijn over de module en de toepassing hiervan binnen wiskunde D. Om echter het gehele werk goed te kunnen analyseren, zullen alle modules in de toekomst eens moeten worden uitgevoerd in een middelbare schoolklas. Ervaringen van docenten zijn hierbij dan ook van harte welkom. Bij deze nodig ik u dan ook uit om, voor of na toepassing van één van de modules, contact op te nemen om uw ervaringen te delen.

Toekomstvisie

Na het afronden van de modules en het uitvoeren van één van de modules binnen drie middelbare scholen is inmiddels de leerlingenbundel online beschikbaar gesteld via de website van het Steunpunt Bèta Oost (www.beta-oost.nl). De leerlingenbundel kan in de komende jaren worden ingezet binnen wiskunde, wiskunde D en Natuur, leven en technologie (NLT), waar-

bij de docentenhandleiding op aanvraag wordt toegezonden. We hopen dan ook dat er veelvuldig van deze mogelijkheid gebruik zal worden gemaakt.

*Peter van Leutenen
Tweets Carmel College, Oldenzaal*

Voor contact en aanvragen van de docentenhandleiding:

Gerard Jeurnink
g.a.m.jeurnink@utwente.nl
Organisatie Wiskunde D
Universiteit Twente, Enschede

Noten

- [1] Steunpunt Bèta Oost (www.beta-oost.nl)
- [2] Wiskunde in Wetenschap - Visie op een domein in wiskunde D - Universiteit Twente (UT) kerngroep. *Euclides*, 82(5), 173-175.