Is de inzet van ICT nu wel of niet een verrijking voor het wiskundeonderwijs? De meningen zijn verdeeld. In Duitsland gelden voor ieder Bundesland andere richtlijnen voor de inzet van ICT. **Gilbert Greefrath** laat zien dat de meerwaarde van ICT juist niet zit in het uit handen nemen van het rekenwerk, maar in de mogelijkheid kwalitatieve benaderingen te ondersteunen.

Kwalitatief werken met ICT?

ylnleiding

Functies en verbanden kunnen op verschillende manieren op een scherm getoond worden. Naast de exacte algebraïsche weergave in computeralgebrasystemen (CAS), kan een verband ook numeriek getoond worden: als schijnbaar continue grafiek of als een discrete tabel. In het eerste deel van dit artikel worden de verschillende toepassingen in het differentiaal- en integraalrekenen (analyse) beschreven. Vervolgens wordt getoond hoe het gebruik van ICT ondersteunend kan werken voor het kwalitatieve begrip.

Het onderwijs in de analyse is de afgelopen jaren sterk veranderd, onder andere door de beschikbaarheid van computers en rekenmachines. Het 'functieonderzoek', met als doel om zo exact mogelijk een grafiek van een functie te schetsen, is door de inzet van de grafische rekenmachine of grafiekenprogramma's geen hoofddoel meer. De nadruk in het werken met functies is aan de ene kant daardoor meer op het gebied van de toepassingen komen liggen, aan de andere kant ook meer op de inzichtelijke benadering. Door deze verschuiving is de analyse niet alleen gevariëerder geworden, maar ook veeleisender voor zowel docent als leerling. Een discrete benadering (eigenschappen van losse punten van een verband), zowel als een kwalitatieve benadering (eigenschappen van de functie als geheel) maakt het mogelijk het zo vaak nagelaten inzicht en begrip te benadrukken.

In alle facetten van de analyse, zoals die in figuur 1 weergegeven zijn, kan ICT een zinvolle ondersteuning zijn voor docent en leerling. Zo kan de computer bij toepassingen het mogelijk maken met complexere functies te werken en het rekenwerk drastisch te beperken. Op het eerste gezicht zou men kunnen denken dat inzicht ook goed zonder de inzet van ICT te verwerven is, maar ook hier kan de inzet zijn waarde bewijzen. Voor de kwalitatieve benadering kunnen er bijvoorbeeld verschillende grafieken getekend worden, waarvan het gedrag bestudeerd kan worden en het is gemakkelijk om te switchen tussen tabel, grafiek en formule. Bij de discrete benadering kunnen veel ingewikkeldere berekeningen gemaakt worden, ICT neemt dat werk over en er ontstaat meer tijd om aandacht te schenken aan verklaringen en veralgemeniseringen. Nu eerst een overzicht van de verschillende mogelijkheden om ICT zinvol in te zetten, aansluitend wordt met behulp van een aantal voorbeelden getoond hoe ICT zowel bij het kwalitatieve als het discrete begrip een zinvolle bijdrage kan leveren.

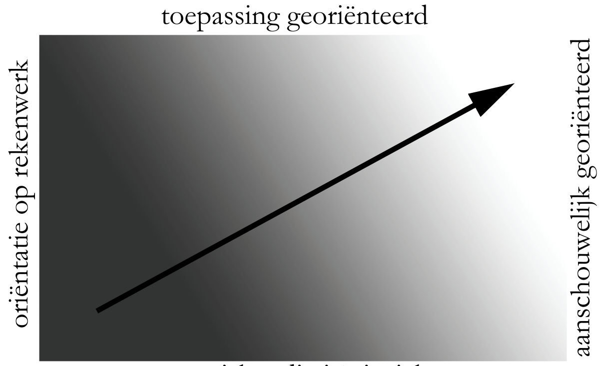


fig. 1 Verschuiving van het zwaartepunt van het analyseonderwijs.

De rol van de computer

De computer speelt niet alleen op het didactisch, maar ook op het technisch vlak een interessante rol tussen continue en discrete wiskunde. Computeralgebrasystemen kunnen zowel numeriek-grafisch als symbolisch werken. In het eerste geval wordt er punt voor punt gerekend, discreet dus, terwijl er in het tweede met exacte formules gewerkt wordt. Bij grafieken bijvoorbeeld, wordt voor iedere pixel van de afbeelding een berekening uitgevoerd. Vooral in de laag-resolute schermen van rekenmachines krijgen grafieken daardoor een discreet karakter: de grafiek bestaat uit staafjes terwijl we weten dat hij eigenlijk glad zou moeten zijn, en eventuele discontinuïteiten komen pas bij sterk inzoomen tevoorschijn, zie figuur 2 (Hischer, 2002, p. 262).

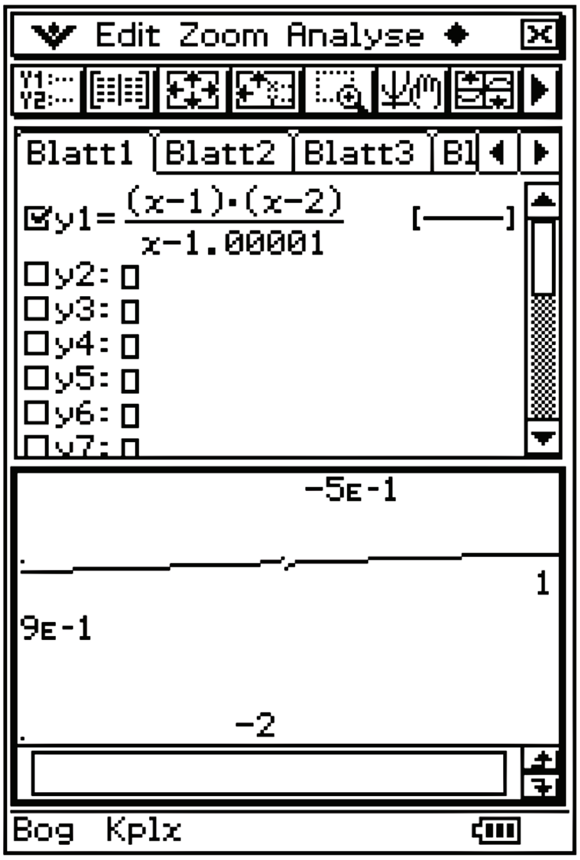


fig. 2 De rekenmachine als discrete tool.

Bij de meeste functies die in het onderwijs een rol spelen, treedt dit effect niet op, waardoor leerlingen de neiging krijgen om de getekende grafiek als exact te beschouwen.

Taken van ICT in het onderwijs

Experimenteren

ICT kan verschillende taken vervullen of overnemen binnen het onderwijs van de analyse (Barzel, Hußmann, Leuders, 2005, p. 42; Hischer, 2002, p. 116). Een van die taken is het experimenteren met functies. De volgende opgave bijvoorbeeld stimuleert de leerling om ICT als experimenteertool in te zetten (Henn, 2004):

> f is een derdegraads machtsfunctie, met nulpunten 2, 4 en 5. Teken de grafiek van f en de raaklijn aan die grafiek in het punt (3, f(3)). Wat valt je op aan de grafiek en de raaklijn? Geldt dat voor alle raaklijnen die zo geconstrueerd zijn?

De leerlingen lossen deze opgave op door de grafiek te tekenen van $f(x) = (x-2)(x-4)(x-5)$ en de helling van de raaklijn in het punt $(3, 2)$ te berekenen. Vervolgens wordt het vermoeden geformuleerd dat de raaklijn van een punt, midden tussen twee nulpunten, door het derde nulpunt gaat. Dit vermoeden kan dan gecontroleerd worden in andere derdegraadsmachtsfuncties. Interessant is het ook om de uitzonderingsgevallen te bekijken, bijvoorbeeld wanneer de nulpunten samenvallen. Door te experimenteren kan een vermoeden opgesteld worden voor alle derdegraadsfuncties, en misschien zelfs ook voor nog hogeregraadsfuncties. Hier stopt vervolgens de experimenteerfase. Vervolgens zijn wiskundige verklaringen voor dit gedrag nodig. Ook daar kan ICT voor worden ingezet (Henn, 2004).

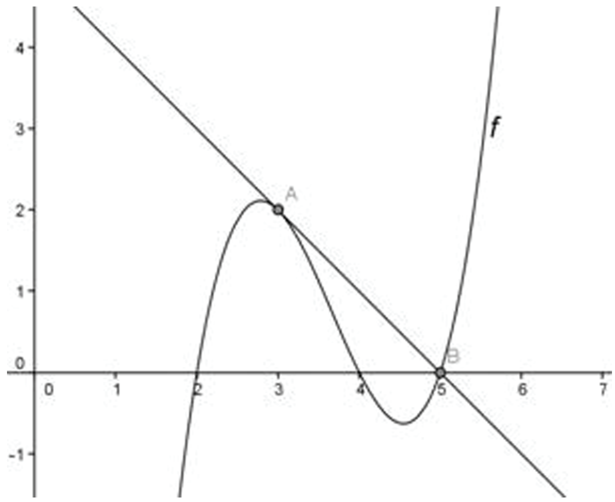


fig. 3 Experimenteren met ICT.

Visualiseren

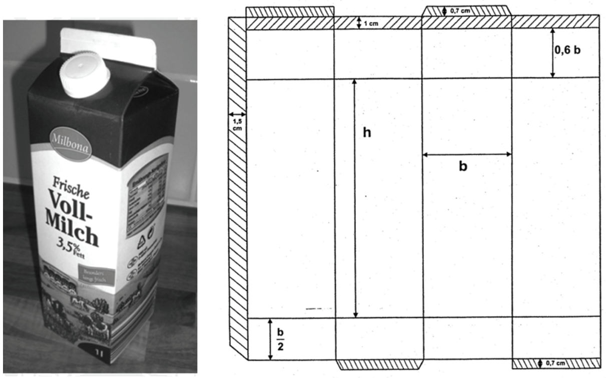
ICT kan natuurlijk ook de taak van het visualiseren op zich nemen (Weigand, Weth, 2002, p. 36). In het onderwijs speelt de afbeelding van de grafiek een centrale rol. Zo kan bijvoorbeeld de invloed van de verschillende parameters in exponentiële verbanden van groeiprocessen in beeld gebracht worden, iets dat zonder ICT alleen met veel rekenwerk gedaan kan worden.

Berekeningen maken

En uiteraard kunnen er met behulp van ICT berekeningen gemaakt worden die leerlingen algebraïsch niet, of niet binnen een hanteerbaar tijdsbestek, kunnen uitvoeren. Een voorbeeld is de berekening van het optimum van ingewikkelde verpakkingsproblemen, zoals van een melkpak, zie figuur 4 (Böer, 1993). Dit probleem leidt tot een te optimaliseren functie die met de gewone schoolwiskunde niet meer op te lossen is.

Algebraïseren

Tot het domein rekenen hoort ook het opstellen van formules en vergelijkingen. Bijvoorbeeld wanneer een functievoorschrift opgesteld wordt aan de hand van een set van reële data van een groeiproces. Dit algebraïseren verloopt middels de diverse regressiemodellen die in een rekenmachine zitten: het best passende functievoorschrift wordt gevonden. Een bacteriënkolonie groeit bijvoorbeeld in verschillende fasen. In het begin vermenigvuldigen ze zich snel, maar naarmate de voedingsbronnen opraken, gaat dat veel langzamer (Hinrichs, 2008, p. 268). Als deze gegevens geplot worden, blijkt de groei met een exponentieel verband te beschrijven te zijn, zie figuur 5. Het gebruikte model kan echter niet alleen door het ‘curvefitting’ gerechtvaardigd worden, maar er moet ook binnen de context naar een verklaring gezocht worden.



Algebra 2

$$\#1: \quad \frac{44\cdot b}{5} - \frac{3820}{b^2} - \frac{2865}{b^3} + \frac{169}{20} = 0$$

$$\#2: \quad \mathrm{APPROX}\left(\mathrm{SOLVE}\left(\frac{44\cdot b}{5} - \frac{3820}{b^2} - \frac{2865}{b^3} + \frac{169}{20} = 0,\ b,\ \mathrm{Real}\right)\right)$$

$$\#3: \quad b = -0.7502042796 \lor b = 7.508524164$$

fig. 4 Het optimale melkpak.

	A	B	C	D	E
1	**Diskretes Wachstumsmodell**				
2	**Startwert**	80			
3	**Parameter**	0,82			
4	**Zeit**	**Modellwert**		**Wert**	**Quadratische Abweichung**
5	0	80,0		80	0,0
6	1	145,6		145,9	0,1
7	2	265,0		266,4	2,0
8	3	482,3		482,4	0,0
9	4	877,8		875,7	4,2
10	5	1597,5		1597,8	0,1
11					6,4

fig. 5 Groeimodel met gegevens uit een schoolboek (Freudigmann e.a., 2000).

Controleren

Het controleren of en hoe goed een model klopt, is ook een zinvolle toepassing van ICT. Zo kan er gekeken worden in welke mate bovenstaand groeimodel klopt. Ga er van uit dat de groei sneller verloopt naarmate er meer bacteriën zijn. Omdat het om een bacteriekolonie gaat, kunnen invloeden van buiten uitgesloten worden.

De toename van het aantal bacteriën in het tijdsinterval h, dus $f(t+h)-f(t)$ is dan evenredig met de aanwezige hoeveelheid $f(t)$ en de verstreken tijd h. Voor kleine h levert dat het volgende model op:

$$f(t+h)-f(t) = c \,.\, f(t) \,.\, h$$

Deze vergelijking kan discreet of continu aangepakt worden. In figuur 5 is te zien hoe dat discreet gedaan is in Excel. Voor $h = 1$ geldt de formule $f(t+1)-f(t) = c \,.\, f(t)$. Door naar opeenvolgende waarden te kijken, kan de parameter c bepaald worden. En er moet nog een starttijd gekozen worden: $t = 0$.

De parameter c wordt nu met de schuifregelaar zó bepaald dat de som van het kwadraat van de afwijkingen zo klein mogelijk is, in het voorbeeld is dat het geval bij $c = 0,82$. Door de directe berekening van deze kleinste kwadratensom kan de kwaliteit van het model direct gecontroleerd en beoordeeld worden. De modelwaarden kunnen met de reële waarden vergeleken worden. Het passende resultaat wordt hier dus numeriek gecontroleerd. Maar het is ook denkbaar dat dat grafisch gedaan wordt, of, in andere gevallen, zelfs algebraïsch.

Bovenstaande voorbeelden van de taken van ICT kunnen in samenhang gebracht worden met het schema van figuur 1:

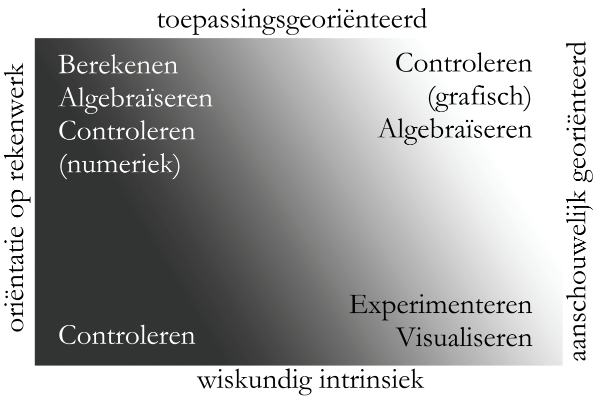


fig. 6 De taken van ICT in de vier facetten.

Het blijkt dat ICT inzetbaar is in al deze vier facetten van het onderwijs in de analyse. De grote verscheidenheid aan mogelijkheden om ICT in te zetten en de veelzijdigheid van het analyseonderwijs kunnen zich dus wederzijds ondersteunen. Twee concrete voorbeelden:

Voorbeeld 1: vermoedens onderzoeken Het doel van de ICT-inzet is sterk afhankelijk van de plaats in het leerproces waar die inzet plaatsvindt. Een voorbeeld uit de bovenbouw nadat de afgeleiden behandeld zijn: het gaat erom te weten te komen wat voldoende en noodzakelijke voorwaarden zijn voor lokale extrema en de samenhang tussen het stijgen en het dalen van de functie en het verloop van de eerste afgeleide. Het doel van deze activiteit is het ontdekken van de overeenkomstige samenhang met behulp van de grafieken. In tweetallen wordt er met ICT de afgeleide van een functie berekend en samen met de functie zelf geplot. Dit is de opdracht:

> Bereken de afgeleide van de volgende functies en teken de grafiek van zowel functie als afgeleide in één diagram. Stel vermoedens op over de samenhang tussen functie en afgeleide en controleer deze vermoedens in zelfgekozen voorbeelden.
> a) $f(x) = 3x^3 - 21x^2 + 36x$
>
> b) $f(x) = 10x^5 - 20x^4 + 10x^3$

In figuur 7 staan de grafieken van a):

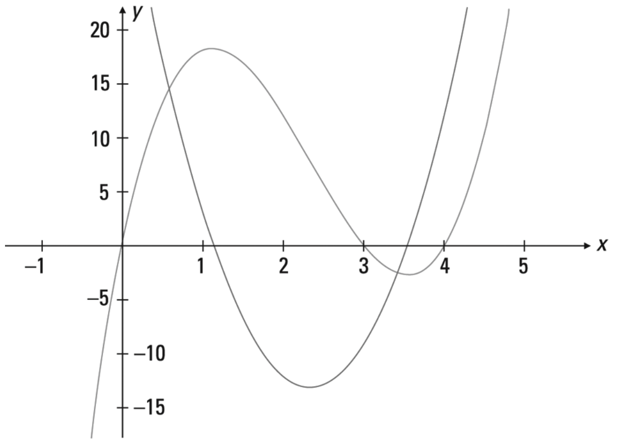
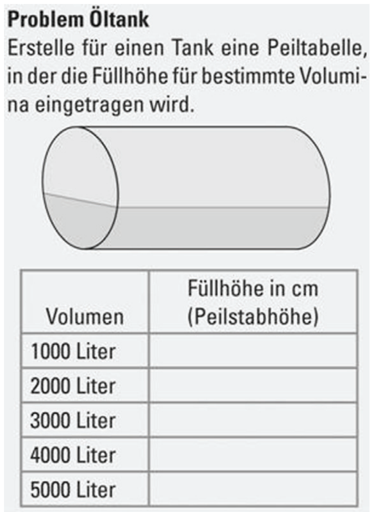


fig. 7 Grafieken van opgave a.

De leerlingen zien dat de functie overal stijgt waar de afgeleide positief is, en daalt waar de afgeleide negatief is. Bij de nulpunten van de afgeleide heeft de grafiek een horizontale raaklijn. Om dit als leerling zelf te ontdekken zijn veel voorbeelden nodig, maar die kunnen nu juist snel met behulp van ICT gemaakt worden. Het tweede voorbeeld heeft een dubbel nulpunt én een buigpunt, zodat ook deze gevallen bekeken worden. Deze twee voorbeelden worden als startpunt gegeven, maar je zou ook de leerlingen van meet af aan hun eigen voorbeelden kunnen laten kiezen. Een tweede doel van deze onderzoeksopdracht is om leerlingen te laten ontdekken dat het idee er bij een nulpunt van de afgeleide áltijd een extreme waarde van de functie zelf hoort, een misconceptie is. Dit voorbeeld dient als inleiding op het grafisch differentiëren, dat uiteindelijk ook zonder computer gedaan kan worden. ICT wordt hier ingezet om te experimenteren en te visualiseren.

Voorbeeld 2: de olietank In dit tweede voorbeeld wordt ICT ingezet als ondersteuning van een discreet probleem. De vraag is hoe je uit het oliepeil in een tank het aanwezige volume olie kunt berekenen, een relevante vraag als je een volumetabel voor zo'n tank wilt maken (Greefrath, 2008).

Dit probleem kan experimenteel aangepakt worden door een cilindervormig vat op z'n kant te leggen en met water te vullen, maar het kan ook wiskundig gemodelleerd worden. Neem voor de diameter van de tank 1,5 m en voor de lengte 2,5 m. De afhankelijkheid van de hoogte van het oliepeil en het volume kan bepaald worden door bijvoorbeeld de tabel in figuur 8 in te vullen.



Problem Öltank
Erstelle für einen Tank eine Peiltabelle, in der die Füllhöhe für bestimmte Volumina eingetragen wird.

Volumen	Füllhöhe in cm (Peilstabhöhe)
1000 Liter	
2000 Liter	
3000 Liter	
4000 Liter	
5000 Liter	

fig. 8 Het olietankprobleem.

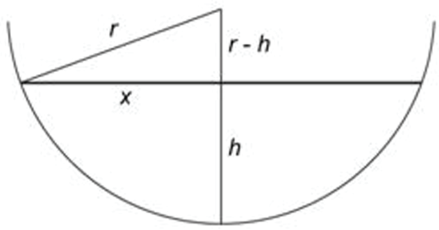


fig. 9 Verband tussen x, r en h.

In het onderste deel van de tank geldt, volgens de stelling van Pythagoras, voor x:

$$x = \sqrt{r^2 - (r-h)^2} = \sqrt{2rh - h^2}$$

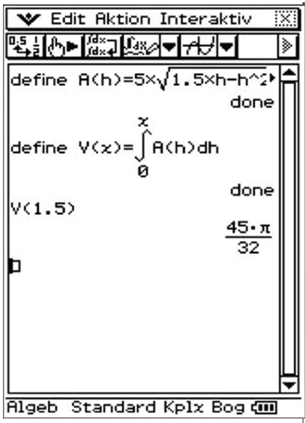
Het olieoppervlak dat bij een zeker oliepeil h hoort, is dan te beschrijven met:

$$A(h) = 2l \cdot \sqrt{2rh - h^2} \ ,$$

waarin l de lengte van de tank is. Op grond van symmetrie geldt dit ook voor de bovenste helft van de tank. Wanneer met behulp van een CAS dit oppervlak over de hoogte h geïntegreerd wordt, dan krijg je het volume van de olie bij ieder oliepeil h. Maar dit levert zo'n draak van een vergelijking op, dat het handiger is om numeriek verder te gaan.

Bij $r = 0{,}75$ m en $l = 2{,}5$ m vind je bijvoorbeeld $V(1{,}5) = 4{,}4178$ m^3, zie figuur 10 en 11.

Omgekeerd kan ook numeriek het oliepeil voor 1000, 2000, 3000 en 4000 liter worden berekend, zie figuur 12.



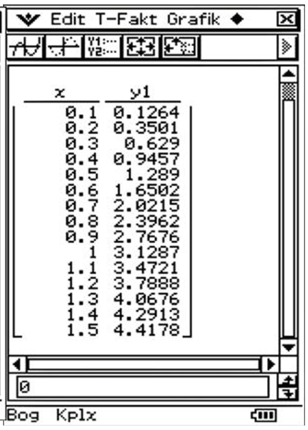


fig. 10 Berekening volumefunctie V(h). fig. 11 Tabel van V(h).

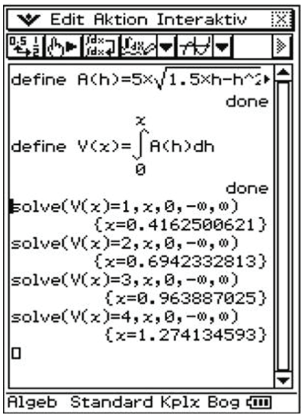


fig. 12. Berekening van het oliepeil.

In dit geval wordt er dus geen $h(V)$ functievoorschrift opgesteld, maar een numerieke benadering, nauwkeurig genoeg voor dit probleem. Hierin ligt het discrete karakter van de opzet van de oplossing. Als vervolg kunnen de volgende vragen worden gesteld:

- Hoe verhouden het oliepeil en het volume zich tot elkaar?
- Wanneer stijgt het oliepeil het snelst bij het gelijkmatig vullen van de tank?
- Hoe kun je nauwkeurige tussenwaarden bepalen?

Hier is de kwalitatieve benadering van belang. De tussenwaarden kunnen eventueel met behulp van een tabel gegenereerd worden. En de inverse $h(V)$ functie kan in ieder geval grafisch worden weergegeven. De controle van de oplossing kan door het substitueren van diameters in het functievoorschrift of door het aflezen van de grafiek. Als er experimentele data zijn, dan kan daar regressie op los gelaten worden.

Grenzen aan de inzet van ICT

Naast de vele bekende en inzetmogelijkheden van ICT hebben beide voorbeelden laten zien dat het dus ook mogelijk is de computer in te zetten voor kwalitatieve doelen. Maar het gebruik van ICT zal zeker niet het doorgronden van het concept 'differentiëren' vervangen. Om dat concept echt te begrijpen ontkom je niet aan het gebruik van limieten. Limietovergangen zijn zowel bij de differentiaal- als de integraalrekening het hart van het concept. Denkt men bijvoorbeeld bij het invoeren van het begrip afgeleide aan de helling van de raaklijn aan een punt van de grafiek, dan kan men met ICT aan de ene kant numeriek de helling van een koorde bepalen, en wel met iedere gewenste nauwkeurigheid.

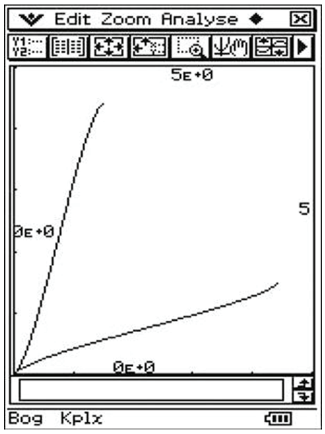


fig. 13. Grafieken van V(h) en de inverse functie h(V).

Aan de andere kant kunnen CAS ook limieten en afgeleiden algebraïsch bepalen. Het heeft alleen geen zin om deze berekeningen onbegrepen door ICT te laten uitvoeren, het moet een hulpmiddel zijn bij het doorgronden van het limietbegrip. En dat begrip krijg je niet door alleen ICT in te zetten. Over limieten moet je praten, je moet ze niet alleen berekenen. Maar de weg naar het begrip kan wel degelijk ondersteund worden door het gebruik van ICT: door te experimenteren, te visualiseren, te berekenen en te algebraïseren. Zo kan een verkenningsfase leiden tot dieper begrip. Maar dan blijft het gedachte-experiment van de koorde die tot raaklijn nadert nodig, alleen kan die stap nu danig verkleind worden door de ondersteuning van ICT. Dus ICT kan aan de ene kant het doorgronden van kernbegrippen flankeren en aan de andere kant ook verder uitbouwen. Het is zowel een tool voor het begrijpen van wiskunde als het uitvoeren van wiskunde. Om succesvol differentiaal- en integraalrekening te onderwijzen, dienen alle vier aspecten aan bod te komen: rekenen, pure wiskunde, toepassingen en begrip. En in al deze aspecten kan de inzet van ICT een zinvolle taak vervullen.

Prof. Dr. Gilbert Greefrath
Seminar fur Mathematik und ihre Didaktik,
Universität zu Köln
g.greefrath@uni-koeln.de

Dit artikel is een bewerking van *Mit dem Computer qualitativ arbeiten?,* verschenen in PM Heft 31, februari 2010.

Vertaling: Tom Goris en Rainer Kaenders.

Literatuur

Barzel, B., Hußmann, S., & Leuders, T. (2005). *Computer, Internet & Co im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Böer, H. (1993). Extremwertproblem Milchtüte. In W. Blum (Red.), *Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.

Freudigmann, H., et al. (2000). *Lambacher Schweizer Analysis Grundkurs*. Stuttgart: Klett.

Greefrath, G. (2008). Vertrauen ist gut - Kontrolle ist besser. Mathematische Modelle eines Öltanks analysieren. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht* 8, 463-468.

Henn, H.-W. (2004). Computer-Algebra-Systeme - Junger Wein oder neue Schläuche? *Journal für Mathematik-Didaktik, 25*(4), 198-220.

Hinrichs, G. (2008). *Modellierung im Mathematikunterricht*. Heidelberg: Springer.

Hischer, H. (2002). *Mathematikunterricht und Neue Medien*. Hildesheim: Franzbecker.

Weigand, H.-G., & Weth, Th. (2002). *Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen*. Heildelberg: Spektrum Verlag.

REKENBETER.NL

Blijf rekenfit met vier sommen per dag!

De site is bedoeld voor iedereen die zijn rekenvaardigheid wil oefenen. Dat kunnen leerlingen van groep 7 en 8 zijn die met of zonder hun meester of juf, al dan niet via het digibord de sommen maken, maar ook leerlingen uit het voortgezet onderwijs en MBO-studenten die in het kader van hun vervolgstudie hun rekenniveau willen verbeteren. En niet in de laatste plaats voor PABO-studenten die aan hun eigen vaardigheden willen werken. Kortom: voor iedereen van tien tot tachtig die rekenen leuk vindt en nog iets wil leren.
Bij aanmelding met een e-mailadres wordt vanaf 12 april elke werkdag een e-mail gestuurd met daarin een link naar de site van Rekenbeter.nl. Op de site staan dan vier nieuwe opgaven klaar: twee kale opgaven (alleen cijfers en getallen), een tekstopgave en een zogenaamde ‘som voor morgen’. Na beantwoording komen van de twee kale opgaven en de tekstopgave onmiddellijk de score en de antwoorden en uitwerkingen in beeld. Elke opgave sluit af met een verwijzing naar achtergrondtheorie.

De uitwerking van de ‘som voor morgen’ komt de volgende dag beschikbaar. Die opgave is bedoeld als doordenker, waarbij soms iets moet worden opgezocht en waarbij overleg met anderen mogelijk is. De volgende dag staan er weer drie opgaven klaar, plus het antwoord op de som van gisteren en natuurlijk de som voor morgen.
Aanmelden als deelnemer kan via www.rekenbeter.nl. Deelname is gratis.
Sieb Kemme, telefoon: 0594 514826,
e-mail: siebkemme@educadbv.nl
Willem Uittenbogaard, telefoon: 0255 512244,
e-mail: willemub@fi.uu.nl
Ed de Moor, e-mail: e.w.a.demoor@planet.nl