Hoe kun je van bepaalde breuken, als je alleen de eerste vier decimalen van de bijbehorende decimale ontwikkeling hebt, die breuk terugvinden? Dat het kan, en dat het ook met behulp van kettingbreuken kan, laat **Piet Lemmens** in dit artikel zien.

Een toepassing van de stelling van Legendre voor kettingbreuken

Inleiding

Een onvereenvoudigbare breuk p/q met p en q geheel en $0 < q < 100$ is geheel bepaald door zijn decimale ontwikkeling tot en met de vierde decimaal na de komma. Immers, als r/s een andere dergelijke breuk is (dus ook onvereenvoudigbaar en $0 < s < 100$), dan geldt $|p/q - r/s| = |p \cdot s - r \cdot q|/(q \cdot s) > 1/10000$, tenzij $p \cdot s - r \cdot q = 0$, maar dat is alleen het geval als $p = r$ en $q = s$.

De waarde van dit eerste stuk van een decimale ontwikkeling noemen we de 'op vier decimalen afgekapte waarde'. De vraag is, of we zonder al te veel moeite p en q kunnen terugvinden als we van p/q inderdaad alleen de op vier decimalen afgekapte waarde ter beschikking hebben.

Een elementaire oplossing

Voor het gemak zullen we steeds veronderstellen dat $0 < p < q < 100$ en ggd$(p, q) = 1$.

Noem x de op vier decimalen afgekapte waarde van p/q, dan weten we $0 \le p/q - x < 1/10000$, dus $0 \le p - q \cdot x < 1/100$.

Met een moderne rekenmachine lijkt het probleem dus in principe gemakkelijk op te lossen:
Maak een tabel van $n \cdot x$ voor de gehele waarden van n van 1 tot en met 99, en zoek daarin de n waarvoor $n \cdot x$ zo weinig mogelijk kleiner is dan een gehele waarde m. Voor m komen alleen de entier $[n \cdot x]$ en $[n \cdot x] + 1$ in aanmerking. In het eerste geval moet $[n \cdot x] = n \cdot x$ zijn, in het tweede geval moet $n \cdot x > [n \cdot x] + 0.99$ gelden.
Bij het zoeken hoeven we dus alleen te letten op uitkomsten die geheel zijn of uitkomsten die na de komma beginnen met '99'.

Voorbeeld: 7/86 = 0,08139534 . . ., en we moeten dus uitgaan van $x = 0,0813$.

Nu is $86x = 6,9918$ de enige te onderzoeken waarde in de tabel, en die ligt dicht bij 7. Conclusie: $p = 7$ en $q = 86$.

Voorbeeld: 22/29 = 0,7586206 . . ., dus $x = 0,7586$. De tabel geeft de volgende mogelijkheden:
$n = 29$ met $n \cdot x = 21{,}9994$; 0,0006 kleiner dan 22
$n = 58$ met $n \cdot x = 43{,}9988$; 0,0012 kleiner dan 44
$n = 87$ met $n \cdot x = 65{,}9982$; 0,0018 kleiner dan 66

De kleinste n (namelijk $n = 29$) is dus ook meteen degene die we moeten hebben, maar $n = 58$, $m = 44$ en $n = 87$, $m = 66$ zijn ook niet helemaal verkeerd. Immers, de bijbehorende breuken zijn te vereenvoudigen tot 22/29.

Voorbeeld: 7/25 = 0,28, dus $x = 0,28$.
De tabel geeft de volgende mogelijkheden:
$n = 25$ met $n \cdot x = 7$
$n = 50$ met $n \cdot x = 14$
$n = 75$ met $n \cdot x = 21$
Mutatis mutandis is het commentaar hier hetzelfde als in het vorige voorbeeld. Het is niet moeilijk om deze experimenten te bevestigen met een stelling.

Stelling

Van twee onderling ondeelbare positieve gehele getallen p en q, met $0 < q < 100$, is van het quotiënt p/q slechts de op vier decimalen afgekapte waarde x gegeven. Dan is q het kleinste positieve gehele getal s waarvoor er een geheel getal r is, zo dat $0 \le r - s \cdot x < 0.01$. En p is gelijk aan de zo bij q behorende r.
Bewijs: We weten dat $p/q - x = a \cdot 0,0001$ voor zekere rationale a met $0 \le a < 1$. Neem nu een gehele s met $1 \le s \le 99$, en laat daarbij de gehele r zo zijn dat $r - s \cdot x$ zo klein mogelijk niet-negatief is. Nu hebben we:

$$r - sx = r - (s \cdot p)/q + (s \cdot p)/q - s \cdot x = r - (s \cdot p)/q + s \cdot a \cdot 0,0001$$

Wegens de beperkingen voor s, a en q is
$0 \le s \cdot a \cdot 0,0001 < 0,01$,

terwijl $|r-(s\cdot p)/q| \geq 1/q > 0,01$ als s geen q-voud is. Dus $r-s\cdot x$ kan slechts niet-negatief zijn als $r-(s\cdot p)/q \geq 0$.
Als s geen veelvoud van q is, dan volgt $r-s\cdot x \geq 1/q > 0,01$.
Als daarentegen s een veelvoud van q is, dan kunnen we $r=(s\cdot p)/q$ kiezen en daarvoor volgt $0 \leq r-s\cdot x < 0,01$, en $s=q$ is de kleinste positieve s die hieraan voldoet. In dat geval is $r=p$.

Een groot nadeel van deze methode is, dat het zoeken in de tabel nogal veel concentratie vereist. Uiteraard geldt dit niet als we beschikken over een programmeerbaar apparaat, dat zelf de zoektocht kan verrichten.

Een suggestie: kettingbreuken?

Men zou kunnen denken dat de gezochte p en q misschien de teller en noemer zijn van een convergent van de kettingbreukontwikkeling (kbo) van x.

Voorbeeld: $x = 0{,}0813$ (bij $7/86$).
De wijzergetallen zijn 0, 12, 3, 3, 81, met convergenten 0/1, 1/12, 3/37 en de volgende is 10/123, maar daarvan is de noemer te groot. Echter, van geen van de eerste drie convergenten is de afgekapte waarde gelijk aan x. Merk op dat de kettingbreuk [0, 12, 3, 2] wel voldoet, want hiervoor zijn de convergenten 0/1, 1/12, 3/37 en tenslotte $7/86$.

Voorbeeld: $x = 0{,}6179$ (bij 55/89).
De wijzergetallen zijn 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, . . . met convergenten 0/1, 1/1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13, 13/21, 21/34, 55/89, . . .

Voorbeeld: $x = 0{,}9880$ (bij 83/84). De wijzergetallen zijn 0, 1, 83, . . . met convergenten 0/1, 1/1, 83/84, . . .

Voorbeeld: $x = 0{,}9898$ (bij 98/99). De wijzergetallen zijn 0, 1, 97, 255, . . . met convergenten 0/1, 1/1, 97/98, maar 97/98 = 0,9897 . . . en dat willen we niet.
Echter, [0, 1, 97, 1] = 98/99, en 98/99 = 0,9898989. . . en die klopt dus wel.

De bovenstaande voorbeelden suggereren dat p/q dan misschien geen convergent is van de kbo van x, maar dat een extra wijzergetal 1 of 2 wellicht helpt. We gaan niet in op de vraag of dit in alle gevallen zo is, maar constateren slechts dat het een ingewikkelde bezigheid is, niet echt een alternatief voor de eerste methode met de tabel!

Voor degenen die er meer over willen weten verwijs ik naar Chapter I, Theorem 10 in het boek van Lang (1994), of naar het recentere artikel van D. Barbolosi en H. Jager, dat via Google kan worden geraadpleegd.

De stelling van Legendre

Om toch gebruik te kunnen maken van de kbo van x, gaan we te rade bij een stelling van A.-M. Legendre (1752-1833).

Stelling
(Legendre, 1798, *Essai sur la théorie des nombres*)
Zijn p, q gehele getallen met $q > 0$, en is

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2},$$

dan is p/q een convergent van de kbo van α.

We willen deze stelling toepassen op de situatie dat α de op vier decimalen afgekapte waarde x van p/q is. Dan moeten we ons dus beperken tot gehelen p en q waarvoor $0 < q$ en $q^2 < 10^4/2$, dus $0 < q \leq 70$. Willen we op grond van deze stelling toch voor $q < 100$ kunnen beweren dat p/q een convergent is van α, dan moet α de op vier decimalen *afgeronde* waarde y van p/q zijn. Immers, dan is inderdaad

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < 5 \cdot 10^{-5} < \frac{1}{2 \cdot 99^2} \leq \frac{1}{2q^2}$$

Uiteraard is de afkapping op vijf decimalen ook goed.

Voorbeeld: We kijken nog eens naar de eerder als voorbeeld gebruikte $7/86$. De rekenmachine geeft 7/86 = 0,08139534 . . . Dus de op vier decimalen afgeronde waarde is $y = 0{,}0814$ met kbo [0, 12, 3, 1, 1, 28, 2] en convergenten 0/1, 1/12, 3/37, 4/49, 7/86, 200/2457, 407/5000.

Wat schieten we op met het afronden op vier decimalen?

We kennen de op vier decimalen afgeronde waarde y van p/q, en willen p en q terugvinden door de kbo van y te bepalen. Een van de convergenten daarvan is p/q.

Voorbeeld: $y = 0{,}92$ (bij 23/25).
De kbo van y is [0, 1, 11, 2] met convergenten 0/1, 1/1, 11/12, 23/25. Dit en het voorgaande voorbeeld geven de algemene situatie: p/q *is de laatste convergent waarvan de noemer kleiner is dan* 100.
Immers, stel dat r/s een convergent is met $s < 100$, en dat er na r/s nog een convergent is met noemer kleiner dan 100. Dan geldt met name voor de onmiddellijk na r/s volgende convergent u/v dat $v < 100$. Bovendien ligt y tussen r/s en u/v, en wel zo dat $0 \leq |y-u/v| < |y-r/s|$. Dit heeft tot gevolg dat

$$\left|y - \frac{r}{s}\right| > \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{u}{v} - \frac{r}{s}\right| = \frac{|u \cdot s - r \cdot v|}{2 \cdot v \cdot s} > 5 \cdot 10^{-5}$$

zodat r/s dus niet de gezochte convergent kan zijn.

De berekening van de kbo

Het is de moeite waard om speciale aandacht te besteden aan de berekening van de kbo van een getal z tussen 0 en 1 waarvan de decimale ontwikkeling eindig is met een klein aantal cijfers na de komma.

Met een verstandig gebruik van de rekenmachine kunnen we exact rekenen. Daartoe schrijven we z in de vorm van een echte breuk met gehele teller en noemer. Dat doen we ook met alle andere in de berekening voorkomende breuken. Het nulde wijzergetal a_0 is de entier (het gehele deel) van z, in ons geval dus $a_0 = 0$ met rest $r_0 = z - a_0 = z$.

De nulde convergent is p_0/q_0 met $p_0 = a_0$ en $q_0 = 1$.

Bereken $z_1 = 1/r_0$. Het eerste wijzergetal a_1 is de entier van z_1, met rest $r_1 = z_1 - a_1$.

De eerste convergent is p_1/q_1 met $p_1 = 1 + a_1 \cdot p_0$ en $q_1 = a_1 \cdot q_0$.

We stoppen als $r_1 = 0$, en anders gaan we door:

Bereken $z_2 = 1/r_1$ en a_2 is de entier van z_2 met rest $r_2 = z_2 - a_2$.

De tweede convergent is p_2/q_2 met $p_2 = p_0 + a_2 \cdot p_1$ en $q_2 = q_0 + a_2 \cdot q_1$.

Stop als $r_2 = 0$, ga anders door:

Bereken $z_3 = 1/r_2$ en a_3 is de entier van z_3 met rest $r_3 = z_3 - a_3$.

De derde convergent is p_3/q_3 met $p_3 = p_1 + a_3 \cdot p_2$ en $q_3 = q_1 + a_3 \cdot q_2$.

Stop als $r_3 = 0$, ga anders door, enzovoort:

Voorbeeld: z = 0,2457, dus z = 2457/10000

n	breuk	=	entier	+ rest	p_n	q_n
0	2457/10000	=	0	+ 2457/10000	0	1
1	10000/2457	=	4	+ 172/2457	1	4
2	2457/172	=	14	+ 49/172	14	57
3	172/49	=	3	+ 25/49	43	175
4	49/25	=	1	+ 24/25	57	232
5	25/24	=	1	+ 1/24	100	407
6	24/1	=	24	+ 0	2457	10000

Het kan nog iets efficiënter, door in elke regel linker- en rechterlid van de gelijkheid te vermenigvuldigen met de noemer. Dan ontstaat het vertrouwde algoritme van Euclides voor het bepalen van de grootste gemene deler van 2457 en 10000. De wijzergetallen veranderen daarbij niet:

n								p_n	q_n
0	2457	=	0	×	10000	+	2457	0	1
1	10000	=	4	×	2457	+	172	1	4
2	2457	=	14	×	172	+	49	14	57
3	172	=	3	×	49	+	25	43	175
4	49	=	1	×	25	+	24	57	232
5	25	=	1	×	24	+	1	100	407
6	24	=	24	×	1	+	0	2457	10000

In dit voorbeeld hebben we een tamelijk willekeurige z genomen, en er geldt dan ook niet dat z de afronding op vier decimalen is van 14/57. Nemen we z echter zo dat dit wel het geval is, dan komt er met y in plaats van z:

Voorbeeld: y = 0.2456, dus y = 2456/10000

n								p_n	q_n
0	2456	=	0	×	10000	+	2456	0	1
1	10000	=	4	×	2456	+	176	1	4
2	2456	=	13	×	176	+	168	13	53
3	176	=	1	×	168	+	8	14	57
4	168	=	21	×	8	+	0	307	1250

Voor de oplossing van ons probleem, het terugvinden van p en q waarvoor y de op vier decimalen afgeronde waarde is van p/q, met $0 < p < q < 100$ en ggd(p, q) = 1, hoeven we de berekening slechts uit te voeren tot de rest 0 is of de volgende convergent een noemer groter dan 99 zal hebben.

Gezien het kleine aantal cijfers van y kan dit ook wel zonder rekenmachine gebeuren, wat natuurlijk veel indruk zal maken op een leek die p en q bedenkt. Met behulp van de 'fractie'-knop op de GR kan hij controleren of p en q inderdaad relatief priem zijn. Met diezelfde knop kunnen p en q zonder moeite worden teruggevonden als p/q zelf hoogstens vier cijfers achter de komma heeft, anders lukt dat niet.

Piet Lemmens
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Literatuur

Barbolosi, D., & Jager, H. (1994). *On a Theorem of Legendre in the theory of continued fractions*. Séminaire de Théorie des Nombres, Bordeaux 6, 81–94.

Beukers, F. (1999). *Getaltheorie voor Beginners*. Epsilon Uitgaven 42, Utrecht.

Lang, S. (1966). *Introduction to Diophantine Approximations*. Reading.