Wat te doen bij een oranje verkeerslicht? Van die alledaagse vraag wilde **Johan Deprez** onderwijs maken. Niet alleen toont hij hoe dat er uiteindelijk uit is komen te zien, hij maakt de lezer ook deelgenoot van het hele proces dat daar aan vooraf ging, en presenteerde een deel van dit verhaal op de NWD van februari jongstleden. Ook is deze tekst eerder verschenen in Uitwiskeling (2009).

Het verkeerslichtenprobleem

Inleiding

Op een lange rechte weg nader je met de fiets of met de wagen een verkeerslicht. Het springt op oranje. Wat doe je? Als je dicht bij het verkeerslicht bent, moet je natuurlijk stevig afremmen of zelfs gewoon doorrijden. Maar als het verkeerslicht nog wat verderaf is? Ontkoppel je dan zodat je eerst een tijdje stilaan vaart mindert om dan wat later zachtjes af te remmen tot je voor het verkeerslicht tot stilstand komt? Dat is wat de meeste mensen doen. Maar zou het ook anders (en beter) kunnen?

Veel automobilisten zullen zich deze vraag al eens gesteld hebben terwijl ze met de auto een verkeerslicht naderden. Maar op die momenten heb je natuurlijk niet de mogelijkheden om er goed over na te denken. En thuisgekomen verdwijnt zo'n vraag weer uit je gedachten... tot je je afvraagt of hier geen mooie opgave voor leerlingen van te maken zou zijn? Zo zette ik me op een dag in de kerstvakantie aan het denken, rekenen, tekenen...

Ik neem jullie in deze tekst eerst mee in dat denkproces. Daarna toon ik hoe ik dit met leerlingen zou aanpakken. Je kunt dus voor één keer 'live' meemaken hoe een idee uitgroeit tot materiaal voor klasgebruik: ik toon jullie niet alleen het eindproduct maar ook het proces dat tot dit eindproduct leidt.

Voor mezelf was het probleem een onderzoeksopdracht met een heel open karakter. Aanvankelijk is het nog niet duidelijk omschreven en is niet duidelijk welke wiskunde we nodig zullen hebben. Je zult zien dat we het probleem eerst vereenvoudigen tot het haalbaar lijkt om het daadwerkelijk op te lossen. Het oplossen zelf verloopt niet helemaal rechtlijnig. Soms zie ik dingen over het hoofd. Ik had in het begin ook wat moeite om het juiste abstractieniveau te bepalen. Ook duurde het een hele tijd eer ik een geschikte grafische voorstelling vond. In het eerste deel van de tekst zie je het probleem en onze oplossing organisch groeien, ook al neem ik jullie niet mee langs alle dwaalweggetjes die ik soms bewandeld heb.

Op het einde van de tekst presenteer ik een (eerste versie van een) onderzoeksopdracht voor leerlingen (nog niet getest in de klas!). Ik gun de leerlingen wat meer sturing dan ik zelf had bij het oplossen. In de formulering van de opdracht heb ik de ervaringen verwerkt die ik opdeed bij het zelf oplossen van het probleem. Toch probeer ik het open karakter van de opdracht voor een goed deel te behouden. Al te vaak immers breken we als leraren een probleem op in kleinere deelvraagjes. Het oplossen van het probleem is op die manier al voorgekauwd door de leraar of door de auteur van de werktekst. Belangrijke beslissingen in het oplossingsproces worden dan door de ontwerper van de deelvraagjes genomen. Daardoor oefent de leerling minder in het probleemoplossend denken.

Het probleem afbakenen

Bij het aanpakken van het probleem werd me al gauw duidelijk dat ik het probleem eerst sterk moest vereenvoudigen, want anders werd het werkelijk te moeilijk. Zo besloot ik ervan uit te gaan dat ik wist hoe lang het duurt vóór het groen wordt. Het zou bijvoorbeeld kunnen gaan om een verkeerslicht waar ik wel vaker langskom. Of we kunnen ons inbeelden dat we een chip ontwerpen die in 2020 ingebouwd zal worden in elke auto. Die chip ontvangt informatie van het verkeerslicht en regelt op basis daarvan de snelheid van de auto.

Ik besloot ook al snel dat er beter geen andere auto's op de weg konden rijden. Dan hoefde ik daar geen rekening mee te houden en was ik vrij om te doen en laten wat ik wilde. Een optimale regeling van de snelheid op een drukke weg, dat zou voor een andere keer zijn...

Om de situatie te verkennen, besloot ik aanvankelijk met eenvoudige types van beweging te werken: combinaties van eenparig rechtlijnige bewegingen (constante snelheid) en eenparig versnelde (of vertraagde) rechtlijnige bewegingen (constante versnelling).

Hier zijn de symbolen die we bij de oplossing zullen gebruiken:
- t is de tijd in seconden vanaf het ogenblik dat het verkeerslicht op oranje springt;
- T geeft aan hoe lang (in seconden) het verkeerslicht op oranje en rood staat;
- d is de afstand (in meters) van de auto tot het verkeerslicht op het ogenblik dat het op oranje springt;
- x staat voor de positie van de auto, gemeten in meters vanaf de positie op tijdstip 0;
- v_0 is de beginsnelheid (in meter per seconde) van de auto;
- v en a stellen de snelheid en versnelling van de auto voor.

Een eerste scenario

De eenvoudigste manier van reageren op het oranje licht is de volgende: remmen met een gepaste constante negatieve versnelling om het verkeerslicht op het goede moment te passeren. Het gaat dus over een eenparig versnelde (in feite vertraagde) rechtlijnige beweging. Hierbij worden de snelheid en de positie gegeven door

$$v = v_0 + at \text{ en } x = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

We zoeken een (negatieve) waarde van a zo dat we na T seconden een afstand d afgelegd hebben, dat wil zeggen

$$v_0 T + \frac{aT^2}{2} = d.$$

Dat gaf

$$a = \frac{2(d - v_0 T)}{T^2}.$$

De noemer in de uitdrukking voor a is altijd positief, maar de teller kan positief, nul of negatief zijn. Eigenlijk is alleen het geval van een negatieve teller hier interessant. Als $d \geq v_0 T$, zijn we nog zo ver van het verkeerslicht verwijderd dat we niet hoeven te reageren: we kunnen dan gewoon onze snelheid aanhouden. Dat hadden we natuurlijk vooraf ook al kunnen bedenken. Bij de volgende scenario's zullen we dat geval meteen buiten beschouwing laten.

De snelheid neemt volgens een eerstegraadsfunctie af van v_0 tot een 'eindsnelheid' $v(T)$ die gegeven wordt door

$$v(T) = v_0 + aT = v_0 + \frac{2(d - v_0 T)}{T} = \frac{2d}{T} - v_0.$$

Ook de formule voor de eindsnelheid moeten we even van naderbij bekijken. Als $v_0 > 2d/T$, is de eindsnelheid negatief! Wat moeten we ons daar bij voorstellen? De snelheid neemt volgens een eerstegraadsfunctie af van v_0 tot een negatieve waarde. De auto komt dus op een bepaald tijdstip (vóór T) tot stilstand en rijdt vervolgens achteruit. Met andere woorden: we rijden het verkeerslicht voorbij, stoppen een eind verder en rijden dan achteruit tot we op tijdstip T achteruitrijdend het verkeerslicht opnieuw passeren. Dit zouden we beter niet programmeren in onze chip... Toen ik het probleem tijdens de kerstvakantie oploste, had ik deze complicatie eerst niet opgemerkt. De relatief hoge abstractiegraad (algemene d, T en v_0) speelde hier zeker een rol in.

De slotsom van het verhaal is dat dit eerste scenario alleen gevolgd kan worden als $d/T < v_0 \leq 2d/T$ of, equivalent, als $v_0 T/2 \leq d < v_0 T$. En in deze gevallen is het zeker niet duidelijk dat dit beter zou zijn dan wat mensen spontaan doen als het licht op oranje springt.

Een tweede scenario

Onze reactie op het oranje licht moet dus iets gesofisticeerder zijn. De volgende kandidaat was: eerst gedurende een zekere tijd afremmen (met een constante vertraging) en dan verder rijden met constante snelheid tot aan het verkeerslicht. Het geval $d \geq v_0 T$, waarin we niet hoeven af te remmen, liet ik onmiddellijk buiten beschouwing. Aan dit scenario heb ik een tijdje abstract gerekend. Voor een geoefend rekenaar waren de berekeningen nog goed te doen, maar de interpretatie van de resultaten werd in een abstracte setting al gauw heel lastig. Voor leerlingen zou dat zeker niet haalbaar zijn. Daarom vond ik het beter om hier concreter te gaan werken. Ik moest dus op zoek naar meer informatie.

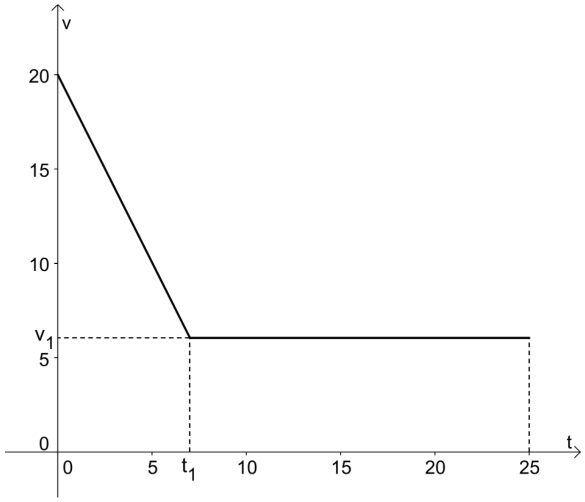
Voor de beginsnelheid was ik er al snel uit: ik zou 20 m/s nemen, dat wil zeggen ongeveer 70 km/u. Dat komt goed overeen met een auto op kruissnelheid op een gewone grote weg buiten het centrum. Nu op zoek naar een goede waarde voor *T*. Een korte jacht naar informatie op het internet leverde me de volgende buit:

– Een verkeerslicht is gemiddeld 10 à 30 seconden rood (*De Standaard Online*, 06/02/09).
– Het oranje licht brandt gedurende 3 à 5 seconden (Belgisch verkeersreglement, artikel 3).

Op basis daarvan nam ik $T = 25$ s. Gezien de beperking op de afstand tot het verkeerslicht, moest ik dus enkel afstanden kleiner dan 500 meter onderzoeken. In eerste instantie besloot ik te onderzoeken wat deze manier van rijden zou geven voor $d = 200$ m, maar met de bedoeling om de afstand d achteraf al snel weer variabel te maken.

Planning

Laat me eerst alles nog eens op een rijtje zetten. In dit scenario remmen we af met een constante (negatieve) versnelling a van tijdstip 0 tot een tijdstip t_1 dat we niet vooraf vastleggen. Onze snelheid daalt tot een snelheid v_1. Daarna rijden we met constante snelheid v_1 verder.



We moeten a en t_1 zo kiezen dat we het verkeerslicht na exact 25 seconden voorbijrijden. Omdat er twee veranderlijken zijn en (voorlopig) slechts één voorwaarde, zullen er veel oplossingen zijn. We zullen deze vrijheid gebruiken om een 'optimale' waarde voor a en t_1 te zoeken. We zullen streven naar een zo hoog mogelijke waarde voor v_1. We moeten dan immers zo weinig mogelijk acceleren om onze kruissnelheid te herwinnen voorbij het verkeerslicht. Hieronder volgt de uitwerking.

Aan het werk

Tussen tijdstip 0 en tijdstip v_1 worden snelheid en positie gegeven door

$$v = 20 + at \text{ en } x = 20t + \frac{at^2}{2}.$$

Op tijdstip t_1 is de snelheid gedaald tot

$$v_1 = 20 + at_1$$

en de positie wordt gegeven door

$$x_1 = 20t_1 + \frac{at_1^2}{2}.$$

Die snelheid houden we aan tijdens het tweede deel. De positie wordt dan gegeven door

$$x = x_1 + v_1(t - t_1).$$

We drukken uit dat we na 25 seconden 200 m afgelegd (moeten) hebben:

$$200 = x_1 + v_1(25 - t_1) = 20t_1 + \frac{at_1^2}{2} + (20 + at_1)(25 - t_1)$$

Deze vergelijking geeft een verband tussen a en t_1. Dus kunnen we a uitdrukken in functie van t_1:

$$a = \frac{600}{t_1(t_1 - 50)}.$$

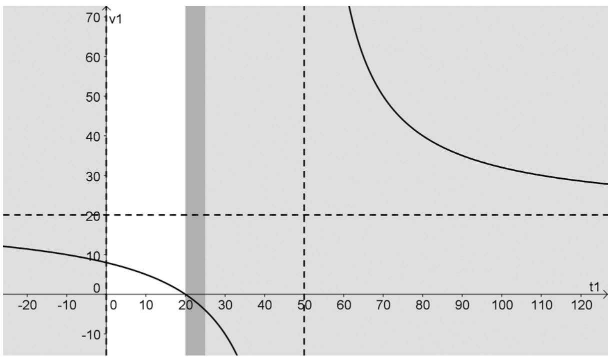
Deze formule legt een verband tussen hoe lang we afremmen en de sterkte waarmee we afremmen. Als we ons aan deze versnelling houden, zijn we net bij het verkeerslicht op het ogenblik dat het groen wordt. Er zijn veel mogelijkheden om dat te realiseren. Voor elke waarde van t_1 is er een bijbehorende waarde van *a*. Het komt er nu op aan de optimale waarde voor t_1 (en bijgevolg ook voor a) te vinden, dat wil zeggen de waarde van t_1 waarvoor v_1 zo groot mogelijk is.

De snelheid als functie van t_1

Voor de snelheid tijdens het tweede deel vinden we

$$v_1 = 20 + \frac{600}{t_1 - 50}.$$

De onderstaande figuur toont de grafiek van de (homografische) functie $v_1(t_1)$ en haar asymptoten.



Slechts een klein deeltje van de grafiek is van belang voor ons. t_1 moet immers tussen 0 en 25 s liggen. Daarom staat de rest van de grafiek tegen een lichtgrijze achtergrond. We merken dat we voor $t_1 = 20$ s uitkomen op $v_1 = 0$: we remmen dan 20 seconden lang af en komen tot stilstand bij het verkeerslicht, waar we nog 5 seconden blijven staan. Als $20 < t_1 \leq 25$, is v_1 negatief. We rijden hier dus weer het verkeerslicht voorbij en keren dan terug... We zullen ons daarom verder beperken tot waarden van t_1 die tussen 0 en 20 s liggen en we maken dus nog een deel van de tekening grijs.

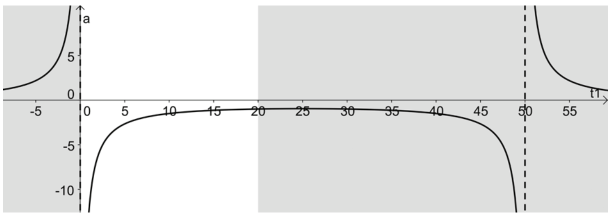
Op zoek naar de optimale waarde voor t_1, een parcours met hindernissen

We moeten de waarde van t_1 zoeken waarvoor v_1 zo groot mogelijk is. Op de grafiek lezen we af dat $t_1 = 0$ de grootste waarde oplevert voor v_1 , namelijk 8 m/s. Is dat niet vreemd?

Als we de berekeningen opnieuw doorlopen, zien we een wiskundige slordigheid: in de uitdrukking voor a staat een factor t_1 in de noemer, die verdwijnt bij het opstellen van de uitdrukking voor v_1. De waarde 0 is voor t_1 dus niet toegelaten.

Maar dat lost ons probleem niet op. In plaats van een *onverwachte* waarde voor t_1 is er nu *geen* waarde van t_1 die een maximum voor v_1 geeft. Hoe dichter t_1 bij 0 ligt, hoe hoger v_1. Hoe moeten we dit begrijpen?

Misschien moeten we het verband tussen a en t_1 maar eens wat nader onderzoeken. De onderstaande figuur toont de grafiek van a in functie van t_1. Ook hier zijn we enkel geïnteresseerd in de waarden van t_1 die tussen 0 en 20 s liggen (maar we tekenen de grafiek over een groter gebied zodat we het verloop van de rationale functie als geheel beter kunnen zien).



We merken dat waarden van t_1 die dicht bij 0 liggen, corresponderen met waarden van a die negatief zijn en een grote absolute waarde hebben. Blijkbaar moeten we in die gevallen gedurende een zeer korte tijd zeer sterk afremmen en dan met constante snelheid verder rijden. Hoe korter en sterker het afremmen, des te beter. Het allerbeste zou zijn dat we onze snelheid 'ogenblikkelijk' terugbrengen van 20 m/s tot 8 m/s en dat we dan 25 seconden lang met 8 m/s verder rijden. Maar dat kan in de realiteit natuurlijk niet, want in werkelijkheid ligt er een beperking op de vertraging. Dat is meteen de sleutel tot de oplossing: de beperking op de remkracht zorgt ervoor dat de remtijd niet onder een bepaalde grens kan zakken.

Ook nu moeten we dus het internet op om wat informatie te zoeken. Daar vonden we dat rijden met 70 km/u een remweg van 25 m geeft (zonder reactietijd en op een droog wegdek). Dat komt overeen met een versnelling van -7,56 m/s² of, afgerond, -8 m/s². We moeten wel bedenken dat dit de versnelling (of vertraging) is bij een noodstop. In de praktijk zullen we de remmen natuurlijk niet dichtgooien als we zien dat het oranje wordt, maar zullen we beschaafder afremmen. Nu is het wat lastig om te weten te komen met welke vertraging 'beschaafd afremmen' overeenkomt: op het internet vind je dat niet en experimenteren op onze drukke wegen is ook niet aangewezen. Maar met een versnelling (vertraging) van bijvoorbeeld -4 m/s² kunnen we er nooit heel ver naast zitten. En voorlopig gaat het tenslotte toch vooral om het principe. Wanneer het definitieve ontwerp van onze chip dichterbij komt, zullen we proeven doen op een afgesloten circuit.

Om de grens voor t_1 te vinden, gebruiken we de formule

$$a = \frac{600}{t_1(t_1 - 50)},$$

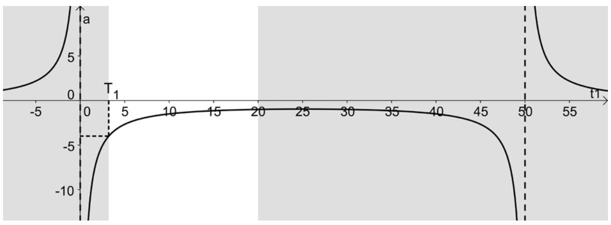
die het verband geeft tussen t_1 (hoe lang we afremmen) en a (de sterkte waarmee we afremmen). De beperking $a \geq -4 \text{ m/s}^2$ leidt tot een beperking op t_1. We zoeken eerst t_1 zo dat $a = -4 \text{ m/s}^2$, dat wil zeggen zo dat

$$-4 = \frac{600}{t_1(t_1 - 50)}.$$

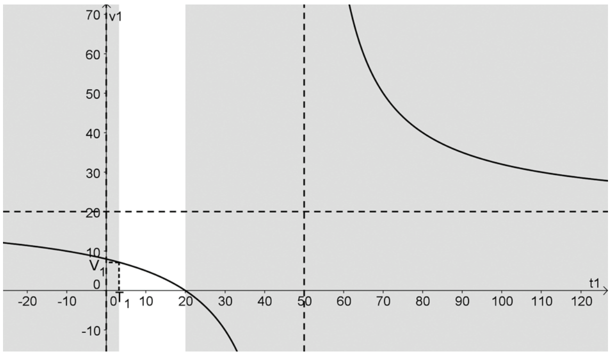
Dit geeft $t_1 = 25 \pm 5\sqrt{19}$ s. Het is de oplossing met het minteken die voor ons belangrijk is. We zien dat t_1 groter dan of gelijk aan

$$T_1 = 25 - 5\sqrt{19} = 3,205505\ldots \approx 3,21 \text{ s}$$

moet zijn.



Tijd om alles nog eens op een rijtje te zetten. We zoeken de waarde van t_1 tussen T_1 (afgerond 3,21 s) en 20 s waarvoor v_1 maximaal is.

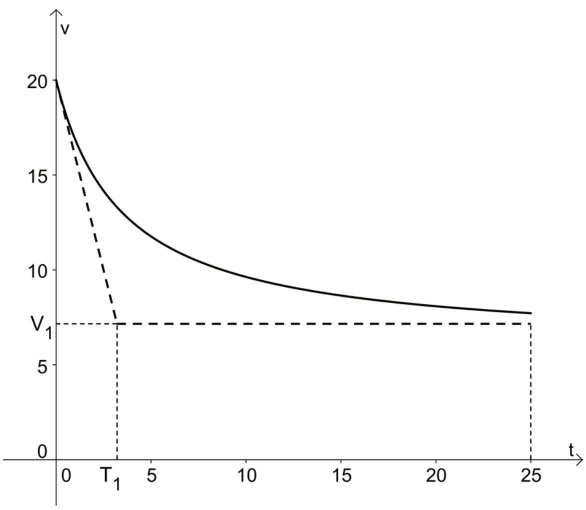


Het is nu duidelijk dat de optimale waarde voor t_1 gelijk is aan T_1. De beste handelswijze is dus dat we gedurende T_1 seconden afremmen met een versnelling van -4 m/s². De snelheid vermindert daardoor tot $V_1 = 20 - 4T_1$ (afgerond 7,16 m/s, iets meer dan 25 km/h). We hebben dan een afstand $20T_1 - 2T_1^2$ afgelegd (afgerond 43,59 meter). De snelheid V_1 houden we dan aan tot het verkeerslicht.

Kan het nog beter?

Zijn er creatievere manieren van rijden (bijvoorbeeld met een versnelling die niet constant is) die tot een beter resultaat leiden? Het duurde een hele tijd eer ik merkte dat het verrassend eenvoudig is om aan te tonen dat dit niet het geval is (als we ons houden aan de beperking dat we nooit harder vertragen dan -4 m/s²). Hier werd ik nog maar eens geconfronteerd met het belang van een geschikte grafische voorstelling: met een (v, t)-diagram is de redenering namelijk zeer eenvoudig, terwijl ik tot dan toe hoofdzakelijk met een (x, t)-diagram gewerkt had (en daar niet veel zinnigs uit had kunnen afleiden).

De stippellijn in de onderstaande figuur toont het (v, t)-diagram voor de handelswijze die we hierboven beschreven hebben: tot tijdstip T_1 vertragen met een constante versnelling van -4 m/s² tot een snelheid V_1 en daarna verder rijden met deze snelheid V_1.



De *versnelling* zien we in dit diagram als de helling van de grafiek. De *positie* na 25 seconden is de oppervlakte onder de grafiek. De helling van de dalende rechte is dus -4 en de oppervlakte onder de grafiek is 200.

Veronderstel nu dat we een andere manier van rijden zouden hebben. Als die minstens even goed moet zijn, mag de snelheid nergens lager dan V_1 zijn. Bovendien is de beginsnelheid 20 m/s en houden we ons aan de beperking dat de versnelling nooit lager mag zijn dan -4 m/s². De grafiek van $v(t)$ voor deze andere manier van rijden, zou er bijvoorbeeld kunnen uitzien zoals de volle lijn in de figuur.

Voor onze redenering verdelen we het tijdsinterval in twee stukken, met T_1 als grens.

We tonen eerst aan dat de volle lijn nergens onder de stippellijn kan liggen. Voor het tijdsinterval van T_1 tot 25 s volgt dit onmiddellijk uit het gegeven dat de snelheid nooit lager is dan V_1. Voor het tijdsinterval van 0 tot T_1 moeten we gebruik maken van een ander argument. De grafiek in stippellijn heeft hier helling -4. Omdat de helling van de volle lijn (dat wil zeggen de versnelling) nooit lager dan -4 is en beide op dezelfde hoogte starten, kan de volle lijn ook in het interval van 0 tot T_1 niet onder de stippellijn komen.

De oppervlakte onder de grafiek bepaalt de positie na 25 seconden. Omdat de volle lijn nergens onder de stippellijn kan komen, is de oppervlakte onder de volle lijn minstens even groot als de oppervlakte onder de stippellijn, dat wil zeggen 200. Bovendien is de oppervlakte strikt groter dan 200 tenzij de volle lijn volledig samenvalt met de stippellijn. Met andere woorden: als de volle lijn niet samenvalt met de stippellijn, bevinden we ons na 25 seconden voorbij het verkeerslicht.

De afstand tot het verkeerslicht variëren

We drijven de abstractiegraad nu een klein beetje op: we geven de afstand tot het verkeerslicht geen concrete waarde meer, maar beschouwen die nu als een parameter d. We hebben er eerder al op gewezen dat we in het geval $d \geq 500$ m gewoon verder kunnen doorrijden, omdat het verkeerlicht op groen springt vóór we bij het verkeerslicht zijn. Ook het geval dat de afstand tot het verkeerslicht te klein is, moeten we apart bekijken. Als we met een snelheid van 20 m/s rijden, bedraagt de remweg (met een versnelling van -8 m/s²) 25 meter. Als $d < 25$ s, moeten we dus gewoon doorrijden. Met onze meer comfortabele versnelling van -4 m/s², hebben we 50 meter nodig om te stoppen. Ook als $25 < d \leq 50$ zouden we ervoor kunnen kiezen om door te rijden. We hebben daar immers maximaal 2,5 seconden voor nodig, terwijl het 3 à 5 seconden oranje blijft. We kunnen echter ook remmen.

De handelswijze die we hierboven besproken hebben voor het concrete geval dat $d = 200$ m, kunnen we zonder veel moeite veralgemenen naar het geval dat $50 < d < 500$: eerst afremmen met een versnelling van -4 m/s^2 en daarna verder rijden met een constante snelheid. Voor de volledigheid geven we de algemene formules. Het verband tussen a en t_1 wordt nu gegeven door

$$a = \frac{2(500 - d)}{t_1(t_1 - 50)}.$$

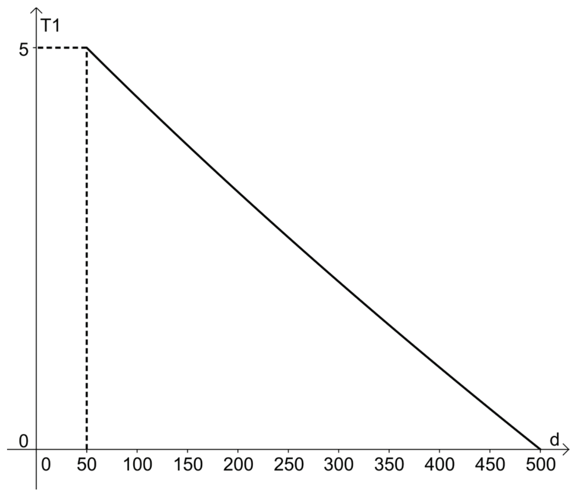
De duur T_1 van het remmen wordt gegeven door

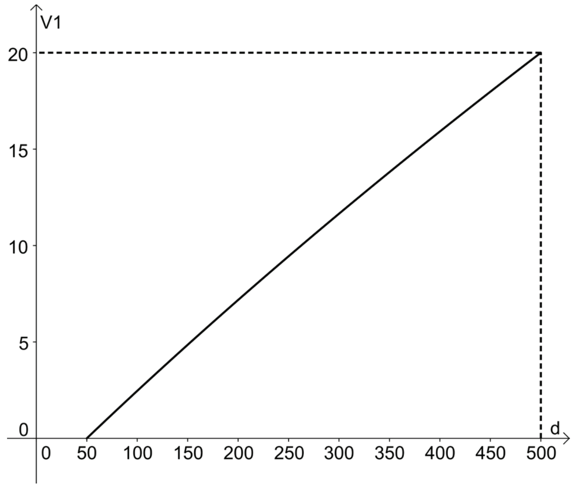
$$T_1 = 25 - \frac{\sqrt{1500 + 2d}}{2},$$

de waarde van t_1 die overeenkomt met a = -4 m/s^2 in de bovenstaande formule. De snelheid zakt tot

$$V_1 = 20 - 4T_1 = -80 + 2\sqrt{1500 + 2d}.$$

Hieronder vind je de grafieken van T_1 en V_1 in functie van d. Beide grafieken lijken recht, maar zijn het niet.



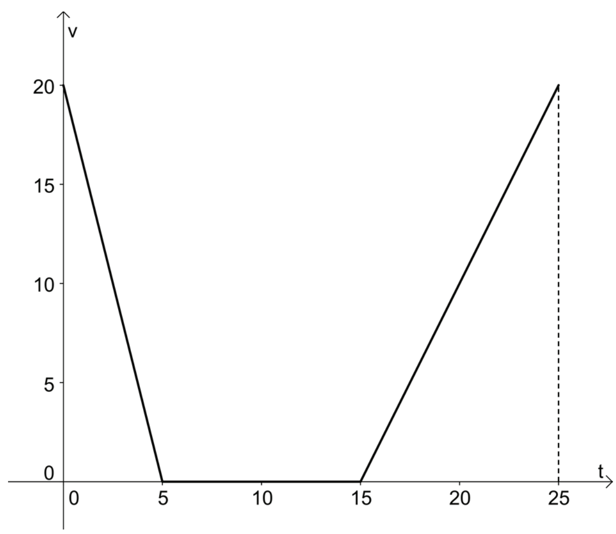


De beste manier?

Enkele bladzijden geleden hebben we ontkennend geantwoord op de vraag of het beter kan. En nu wordt de vraag hier opnieuw gesteld...

Tot nu toe hebben we 'de beste manier' spontaan als volgt geïnterpreteerd: we geven zo weinig mogelijk snelheid prijs, zodat we voorbij het verkeerslicht zo weinig mogelijk moeten accelereren. In meer wiskundige termen: we hebben de minimale snelheid tijdens het tijdsinterval van 0 tot 25 seconden proberen te maximaliseren. Maar je kunt ook van andere criteria uitgaan. Je zou bijvoorbeeld als doel kunnen stellen dat je zo weinig mogelijk tijd verliest omwille van het verkeerslicht. Dan zorg je er (nog altijd) voor dat je net aan het verkeerslicht aankomt op het ogenblik dat het op groen springt en streef je naar een zo hoog mogelijke snelheid bij het passeren van het verkeerslicht, met andere woorden je probeert de snelheid op tijdstip 25 s te maximaliseren (zonder de maximumsnelheid van 20 m/s te overschrijden). Zou dit tot een ander resultaat leiden? Hieronder laten we aan de hand van een voorbeeld zien dat dit wel degelijk het geval is.

Neem bijvoorbeeld $d = 150$ m en $v = 20$ m/s. Rem eerst af met een versnelling van -4 m/s^2 tot je stilstaat. Dat vereist 50 meter en duurt 5 seconden. Wacht dan 10 seconden (gelukkig hebben we aangenomen dat we alleen op de weg zijn...), en trek daarna op met een versnelling van 2 m/s^2 tot je weer een snelheid van 20 m/s haalt. Je beschikt daarvoor over de benodigde afstand (100 m) en tijd (10 seconden). De onderstaande grafiek toont het (v, t)-diagram.



Het cijfer voor de versnelling is gebaseerd op informatie die we op de website van Renault vonden voor de Renault Mégane Grandtour 1.4 16V. Deze doorsneewagen accelereert van 0 tot 100 km/h in 13,1 seconden, wat een versnelling van 2,12... m/s^2 geeft.

Met de oorspronkelijke interpretatie zouden we minder lang afremmen (3,79 in plaats van 5 seconden) en een snelheid van (afgerond) 4,85 m/s aanhouden tot aan het verkeerslicht. Omdat we voorbij het verkeerslicht dan nog terug moeten optrekken, verliezen we meer tijd. Anderzijds besparen we brandstof omdat we minder hoeven op te trekken.

Het verkeerslichtenprobleem als onderzoeksopdracht voor de leerlingen

Nu we uitgebreid kennisgemaakt hebben met het verkeerslichtenprobleem, vragen we ons af hoe we leerlingenmateriaal rond dit probleem kunnen maken. We hebben al eerder aangegeven dat we het probleem in eerste instantie aanbevelen als een onderzoeksopdracht. Hieronder zie je hoe we de opdracht voor de leerlingen formuleren. We kunnen natuurlijk niet voorspellen tot welke antwoorden leerlingen zullen komen. Maar bij het beoordelen van hun antwoord (en ook bij het begeleiden van de leerlingen) zal onze oplossing uit het eerste deel van de tekst ongetwijfeld van nut zijn.

Een verkeerslicht naderen

Op een lange rechte weg nader je met de fiets of met de wagen een verkeerslicht. Het springt op oranje. Wat doe je? Als je dicht bij het verkeerslicht bent, moet je natuurlijk stevig afremmen of zelfs gewoon doorrijden. Maar als het nog wat verderaf is? Ontkoppel je dan zodat je eerst een tijdje stilaan vaart mindert om dan wat later zachtjes af te remmen tot je voor het verkeerslicht tot stilstand komt? Dat is wat de meeste mensen doen. Maar zou het ook anders (en beter) kunnen?

Veronderstel dat je een ingenieur bent die een chip moet ontwerpen die ingebouwd zal worden in een auto. De chip ontvangt informatie die uitgezonden wordt door het verkeerslicht: de afstand van de auto tot het verkeerslicht en het tijdstip waarop het verkeerslicht weer op groen zal springen. Op basis daarvan moet de chip de snelheid van de auto regelen. Moet de auto gewoon doorrijden of afremmen? Hoe sterk? Hoe lang? Moet de auto ook stilstaan? ...

Jij moet dus onderzoeken welke snelheidsregeling de chip zou moeten opleggen als reactie op de informatie die hij binnenkrijgt.

Het ontwikkelingsproces moet nog helemaal starten. Daarom hoef je het probleem niet in zijn meest algemene vorm aan te pakken en mag je een aantal vereenvoudigingen doorvoeren. Ga ervan uit dat je de enige auto op de weg bent. Rekening houden met de reacties van andere chauffeurs is werk voor een latere stap in het ontwerpproces. Verder mag je ervan uitgaan dat het 25 seconden duurt eer het verkeerslicht op groen springt en dat je komt aangereden met een snelheid van 20 m/s (ongeveer 70 km/h, tevens de maximumsnelheid op de weg in kwestie).

Bij het oplossen van dit probleem zul je nu en dan informatie moeten opzoeken. Verder kun je al raden dat je zult moeten steunen op je kennis i.v.m. eenparig rechtlijnige beweging, eenparig versnelde rechtlijnige beweging en meer algemene rechtlijnige bewegingen uit de lessen fysica. Maar je zult vooral zelf creatief moeten zijn en mogelijke oplossingen moeten bedenken en doorrekenen. Het is een goede strategie om te beginnen met eenvoudige bewegingen, bijvoorbeeld eerst met een eenparig versnelde beweging alleen, daarna met een combinatie van eenparig rechtlijnige beweging en eenparig versnelde rechtlijnige beweging en gaandeweg te evolueren naar complexere mogelijkheden. Vergeet ook niet dat grafische voorstellingen vaak goede diensten kunnen bewijzen. Misschien zal je vinden dat er meerdere mogelijkheden zijn om de snelheid te regelen. Probeer er dan de beste mogelijkheid uit te kiezen (waarbij je zelf een goede invulling geeft voor 'de beste').

Maak een tekst waarin je je oplossing(en) beschrijft en met de nodige berekeningen en argumenten onderbouwt. Zorg ervoor dat je tekst begrepen kan worden door je medeleerlingen.

Johan Deprez
Instituut voor Onderwijs- en Informatiewetenschappen, Universiteit Antwerpen
Faculteit Economie en Management, Hogeschool-Universiteit Brussel
Lerarenopleiding wiskunde, Katholieke Universiteit Leuven

Deze tekst verscheen eerder als onderdeel van het artikel 'Wiskunde en verkeer' in Uitwiskeling:

Deprez, J., & Eggermont, H. (2009). Wiskunde en verkeer, *Uitwiskeling, 25*(3), 14-54.