Truus Dekker en **Martin Kindt** hebben de bundel *Oefenen met breuken* samengesteld. In onderstaand artikel beschrijven zij de keuzes die daarbij gemaakt zijn en lichten die toe met een aantal voorbeelden. De bundel zelf is te downloaden van de website van het Freudenthal Instituut.

Productief oefenen met breuken

De voorgeschiedenis

Alweer een aantal jaren geleden publiceerden wij, Martin Kindt en Truus Dekker, een artikel in de *Nieuwe Wiskrant* met de titel 'Wat doen we (niet) met breuken?' (2006), een eerste verkenning van de breukenproblematiek in het voortgezet onderwijs. In dat artikel pleitten we onder andere voor een doorgaande leerlijn breuken, van basisschool naar voortgezet onderwijs. Vooral voor de (toekomstige) HAVO- en VWO-leerlingen, vroegen we bovendien om meer aandacht voor het werken met letterbreuken. De overgang van rekenen naar algebra maakt het formuleren van algemene regels immers noodzakelijk. We schreven:

> De structuur van de operaties met breuken komt duidelijker naar voren als er met variabelen in teller en/of noemer wordt gewerkt. Het lijkt daarbij verstandig om het domein voor de variabelen in teller en noemer aanvankelijk te beperken tot de natuurlijke getallen. In een later stadium, wanneer er sprake is van eenvoudige gebroken functies met hun grafieken, is uitbreiding van dit domein naar de rationale en de reële getallen gewenst.

Hoewel we allebei de nodige ervaring hebben opgedaan met de weelderige cultuur van het werken met ingewikkelde breukvormen uit de praktijk van zo'n vijftig jaar geleden, verlangen we daar echt niet naar terug. Maar onze analyse van de gangbare lesmethoden in het voortgezet onderwijs leerde dat de aandacht voor het formaliseren van de bewerkingen met breuken nu wel erg lang werd uitgesteld, soms zelfs tot klas 4 of 5 van het voortgezet onderwijs, en dat oefenen met de bewerkingen met breuken, met of zonder variabelen in teller en noemer, weinig werd benadrukt. Niet alle leerlingen die worden toegelaten tot een HAVO- of VWO-brugklas hebben de formele rekenregels voor het rekenen met breuken geleerd op de basisschool. Daar zal een docent in het voortgezet onderwijs natuurlijk rekening mee houden, maar voor deze leerlingen gaat het in de praktijk allemaal erg snel. Twee tot drie pagina's in het lesboek, dat is het wel ongeveer. En als je dan ook nog de rekenmachine mag gebruiken voor het rekenen met breuken...

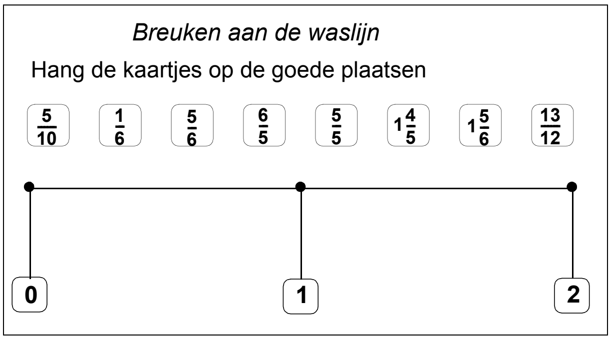
Het Wiskrantartikel kwam nog vaak ter sprake wanneer we lezingen hielden of werkgroepen begeleidden voor docenten uit het basis- en voortgezet onderwijs. Het ging ons dan vooral om de overgang van het ene schooltype naar het andere; met aanvankelijk onderwijs in breuken hebben we geen ervaring. Heel vaak werd er na afloop van lezingen tegen ons gezegd: "Waarom doen jullie er eigenlijk zelf niets aan? Je kunt wel zeggen dat wat er nu gebeurt op school onvoldoende is, maar wat moeten we dan? Hoe kun je werken met (letter)breuken goed voorbereiden en productief laten oefenen zonder te vervallen in eindeloze rijtjes met hetzelfde type sommen? En wat kunnen we aan het eind van de basisschool laten doen door de leerlingen die daarna naar een HAVO- of VWO-brugklas zullen gaan? We willen best differentiëren aan het eind van groep 8, maar dan moeten we wel materiaal hebben om dat te doen! En we willen best extra oefeningen geven aan de leerlingen in de brugklas maar wat is dan geschikt?"

Dat hebben we ons aangetrokken en inmiddels is bij het Freudenthal Instituut het boek *Oefenen met breuken* te koop. Voor een elektronische versie van het materiaal in het leerlingboek, kunt u de website van het Freudenthal Instituut raadplegen. We hebben niet alleen gezocht naar oefenopgaven met breuken, maar ook naar uitdagende problemen voor de leerlingen die meer kunnen. Voor leerlingen die zich voorbereiden op het beroep van leerkracht in het basisonderwijs is de bundel ook geschikt, hoewel we ons niet speciaal op deze doelgroep hebben gericht.

De breukenbundel van het IOWO

Sommigen van u zullen zich nog de oefenbundel *Breuken* herinneren die in de periode 1975–1980 werd uitgegeven door het IOWO, de voorloper van het Freudenthal Instituut. De hoofdauteur ervan was Ger Jansen. De opgaven werden veel gebruikt in de brugklas, ook van het VMBO, dat toen uiteraard nog niet zo heette. Voor veel leerlingen, en heus niet alleen voor zwakke leerlingen, was deze manier van oefenen met de breuken een verademing. Al was het alleen maar vanwege de breuken-in-plaatjes. Een heruitgave van dit pakketje was echter niet voldoende voor ons doel; veel opgaven eruit zijn in de loop van de jaren immers al op de een of andere manier in de schoolboeken terecht gekomen. Bovendien was in het IOWO-pakket geen plaats ingeruimd voor de vier hoofdbewerkingen met breuken, en letterbreuken komen er evenmin in voor. Die zijn voor VMBO-leerlingen ook niet zo interessant; volgens hun examenprogramma mogen alle bewerkingen met breuken, voor zover ze al voorkomen, met behulp van de rekenmachine worden uitgevoerd. Bewerkingen met letterbreuken komen in hun programma niet voor. Dat is ook logisch, want in het dagelijks leven of bij het uitoefenen van een beroep komt het rekenen met breuken zelden voor. In de contextopgaven waaruit de VMBO-examens bestaan, zul je ze dus ook bijna nooit aantreffen. Ons doel was het maken van een bundel voor leerlingen uit groep 8 die zich voorbereiden op de brugklas HAVO-VWO en voor de leerlingen uit HAVO-VWO-brugklassen tot en met klas 2. Voor hen zijn de bewerkingen met (letter)breuken wel belangrijk, vooral bij het werken met gebroken functies.

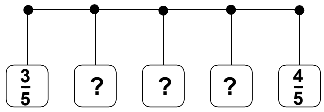
In *Oefenen met breuken* zijn om bovengenoemde redenen enige opgaven letterlijk overgenomen uit het oude IOWO-materiaal, andere zijn bewerkt, en er zijn nieuwe opgaven toegevoegd. Samen vormen ze deel A van de nieuwe bundel, met als titel *Breuken vergelijken*. Zo'n oude opgave is bijvoorbeeld:



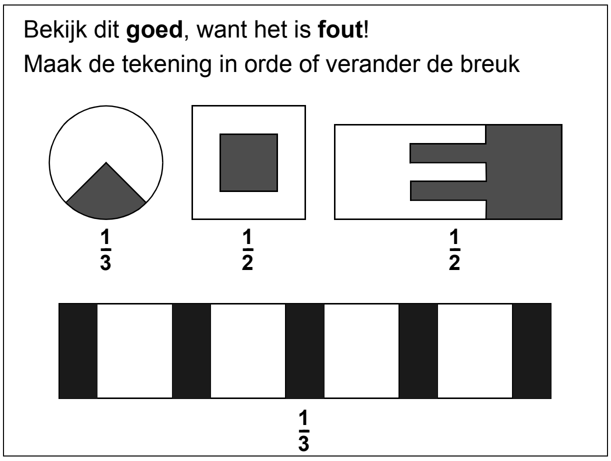
Het mooiste is natuurlijk om een echte waslijn in het lokaal op te hangen en de leerlingen kaartjes op de goede plaats aan die lijn te laten hangen. Zo gebeurde het in de les van een collega en daarbij werd de verdeling van die waslijn regelmatig aangepast, van 0 tot 1, van 0 tot 10, van $\frac{1}{2}$ tot $\frac{3}{4}$, en werden er nieuwe kaartjes opgehangen.

De waslijn hielp ook om vragen te beantwoorden zoals: "Welke breuk is groter, $\frac{1}{2}$ of $\frac{1}{4}$?", "Is er een breuk die het allerallerdichtste bij nul komt? Welke zou dat dan moeten zijn volgens jou?", "Hoeveel breuken zouden er passen tussen 0 en 1?"

Een andere uitbreiding van het waslijnidee is om een interval tussen twee breuken in een aantal gelijke delen te verdelen en de daarbij passende tussenbreuken te laten ophangen of de bijbehorende kaartjes in te vullen.



Een van onze favorieten uit de 'oude' breukenbundel was de volgende opgave die nu in deel A van *Oefenen met breuken* is opgenomen.



De opzet van de bundel *Oefenen met breuken*

Allereerst een opmerking over wat er *niet* in de oefenbundel staat. Er staat geen uitleg over de theorie in, dat past immers niet bij oefenen. We gebruiken geen tiendelige breuken (decimale getallen) en ook de relatie met verhoudingen komt niet aan de orde. Verder beperken we ons tot positieve getallen. Ons doel was om de stof van de basisschool samen te vatten door middel van goed gekozen oefenopgaven, deze stof uit te breiden met letterbreuken en de hoofdbewerkingen ruim aandacht te geven. De oefenbundel bestaat uit vier delen:

A. Breuken vergelijken

B. Breuken optellen en aftrekken

C. Breuken vermenigvuldigen en delen

D. Breuken en algebra

Ieder deel, twintig pagina's A4, bestaat uit een serie oefenopgaven die gaandeweg moeilijker worden. In elk van de delen A, B en C wordt steeds al voorzichtig begonnen met de overgang van rekenen naar algebra, als voorbereiding op deel D dat helemaal aan de letterbreuken gewijd is. Elk deel bevat een pagina met ware en niet-ware uitspraken, waaraan de leerlingen er zelf een aantal moeten toevoegen. We vinden dergelijke eigen producties belangrijk, niet alleen omdat de leerlingen zo kunnen laten zien of ze het voorgaande begrepen hebben, maar ook omdat we hen zo de kans geven te laten zien wat ze nog meer kunnen. Soms gebruiken leerlingen in hun eigen producties getallen en breuken die wij niet zo snel zouden toepassen; ze dagen zichzelf uit door de opgave extra moeilijk te maken.

We eindigen elk deel met een samenvatting, 'Alles bij elkaar' en een toets, 'Alles door elkaar'. Een voorbeeld van een toetsopgave uit deel B:

> 5. Schrijf bij elke uitspraak of deze *waar* of *onwaar* is. Leg uit waarom dat zo is.
>
> a. $1\frac{7}{8} - \frac{27}{32}$ is minder dan 1.
>
> b. $\frac{2}{9}$ en $\frac{3}{10}$ zijn samen meer dan een half.
>
> c. Als $\frac{2}{n} + \frac{3}{n} = \frac{1}{2}$, dan is n gelijk aan 10.

De docent die de oefenbundel in de klas gebruikt, kan natuurlijk zelf aanvullingen maken en extra vragen stellen. Leerlingen kunnen de opgaven vaak zelfstandig maken, maar een nabespreking met de hele klas of per groep is beslist noodzakelijk. Sommige opgaven hebben meer dan een oplossingsmethode en het is goed dat leerlingen ook de uitwerking van anderen zien. Het geven van een mondelinge toelichting bij de uitwerking dwingt leerlingen ertoe om voor zichzelf duidelijk te formuleren hoe ze gedacht hebben. Sommige docenten maken een overzicht van verschillende uitwerkingen (uiteraard zonder de naam van de leerling erbij) en bespreken later met de hele klas welke antwoorden goed en welke fout zijn, en vooral ook *waarom* dat zo is.

Om een voorbeeld te geven, de volgende vraag die we aan twee leerlingen uit groep 8 van verschillende basisscholen voorlegden:

"Welke breuk is groter, $\frac{1}{8}$ of $\frac{1}{9}$? Waarom?"

Fraukje had duidelijk geleerd dat je de breuken gelijknamig moet maken om te zien welke groter is. $\frac{1}{8}$ is gelijk aan $\frac{9}{72}$ en $\frac{1}{9}$ is gelijk aan $\frac{8}{72}$, dus $\frac{1}{8}$ is groter.

Susan had kennelijk meer met het pizzamodel gewerkt. Zij redeneerde dat wanneer je een pizza in acht stukken verdeelt, iedereen meer krijgt dan wanneer je diezelfde pizza in negen gelijke stukken verdeelt.

Allebei prima, natuurlijk. Maar nu de vervolgvraag. "Je weet niet hoe groot n is, het is een getal uit de telrij 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...enzovoort. Toch kun je wel zeggen welke groter is, $\frac{1}{n}$ of $\frac{1}{n+1}$. Welke is dat?"

Nu kon Fraukje niets met haar oplossingsmethode, maar Susan wel. Als je het aantal stukken waarin je de pizza verdeelt eentje groter maakt, wordt elk stukje kleiner, dus $\frac{1}{n}$ is de grootste van de twee. Tijdens een bespreking met de groep komen dergelijke voorbeelden tevoorschijn en ze leiden soms tot heftige discussies tussen de leerlingen.

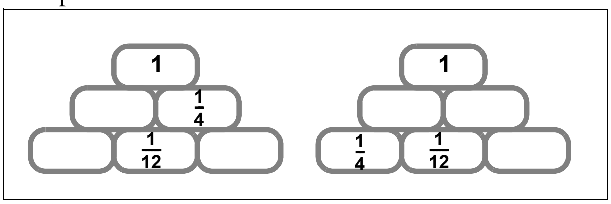
Voorbeelden uit de vier onderdelen

Deel A gaat in eerste instantie vooral over een breuk als *deel van een geheel*. Ook voor HAVO- en VWO-leerlingen is het niet meteen vanzelfsprekend dat $\frac{1}{8}$ deel van iets niet altijd evenveel hoeft te zijn, maar afhankelijk is van wat het geheel is. Bij het vergelijken van breuken speelt gelijkwaardigheid (equivalentie) van breuken een belangrijke rol. Een minder bekend type opdracht hierbij is de volgende:

> Schrijf de volgende breuk met een zo klein mogelijke teller en noemer.
>
> $$\frac{37 + 37}{37 + 37 + 37}$$
>
> Neem nu voor 37 op vijf plaatsen een ander getal, maar wel steeds hetzelfde.
> Verandert de breuk hierdoor van waarde?

Door het variëren van het voorkomende getal (hier 37) wordt er wat vooruitgelopen op de 'breukenalgebra' die vooral in deel D aan bod komt en waarvan wij vinden dat die in de huidige methoden te lang wordt uitgesteld en/of onvoldoende wordt beoefend.

In deel B komen optellen en aftrekken aan de orde. Een (oefen)opgave uit het begin van deel B laat *breukenmuurtjes* zien. De getallen op twee 'buurstenen' worden opgeteld en het antwoord komt op de steen die op die twee stenen rust.



De breukenmuurtjes lenen zich uitstekend voor het maken van eigen producties. Geef jezelf een opdracht; kies bijvoorbeeld een ander geheel getal in de bovenste steen.

Egyptische stambreuken zijn op zichzelf niet belangrijk, maar ze leiden wel tot allerlei ontdekkingen over splitsen van breuken. Een pittige opdracht hierbij is om het rijtje:

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}\ ,\ \frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}\ ,\ \frac{2}{21} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}\ ,\ \frac{2}{27} = \frac{1}{18} + \frac{1}{54}$$

voort te zetten met behoud van regelmaat. Deze rij staat in de papyrus Rhind als onderdeel van een lange lijst splitsingen van breuken met teller 2 en oneven noemer.

Deel C gaat over het vermenigvuldigen en delen van en door breuken. Het delen door breuken kan op verschillende wijzen worden uitgevoerd. Dat bijvoorbeeld $2\frac{1}{2}$ even vaak in 60 gaat als 5 in 120, leidt tot

$60 : 2\frac{1}{2} = 24$.

Begripsmatig verdient de regel dat je breuken met verschillende noemers op elkaar kunt delen door ze eerst gelijknamig te maken en daarna de tellers op elkaar te delen, misschien wel de voorkeur boven de bekende regel over het omkeren van de breuk waardoor je deelt. Bijvoorbeeld:

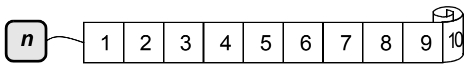
$$\frac{3}{7} : \frac{1}{6} = \frac{18}{42} : \frac{7}{42} = \frac{18}{7} = 2\frac{4}{7}$$

Bij leraren schijnt dit niet algemeen bekend te zijn, want het is wel gebeurd dat leerlingen zelf met deze methode kwamen en de docent dit afkeurde omdat ‘je alleen mag vermenigvuldigen met het omgekeerde’.

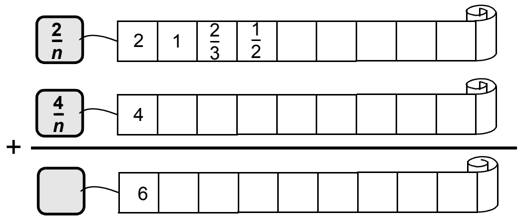
Bij vermenigvuldigen van breuken gebruiken we verschillende modellen, waaronder het rechthoeksmodel. Hopelijk kennen de leerlingen dit model al van het vermenigvuldigen met gehele getallen, bijvoorbeeld om te laten zien waarom $14 \times 14 = 100 + 16 = 116$ echt fout is.

	10	4
10	100	**40**
4	**40**	16

In deel D tenslotte gaat het vooral om de overgang naar algebra. Vereenvoudigen van letterbreuken komt in de lesboeken wel voor, maar rekenen met ‘letterbreuken’ niet. Dat krijgt hier dan ook veel aandacht, waarbij steeds het verband met het rekenen met ‘getalbreuken’ wordt benadrukt. Bij dit laatste spelen rijen, gepresenteerd als stroken, een belangrijke rol. Voorbeeld van zo’n opgave met stroken:



Vul passende breuken (zo eenvoudig mogelijk) of helen in de vakjes in:



Wat kun je op het etiket van de ‘optelstrook’ schrijven?

Die stroken met invulopdrachten komen ook hier en daar in de drie eerdere deeltjes voor.

Zoals bekend kan er met letterbreuken nog veel meer misgaan dan met getalbreuken. Het is van belang om leerlingen van tijd tot tijd met miskleunen te confronteren. Een voorbeeld uit deel D:

Jeffrey denkt dat $\frac{a+b+c+d}{4a+3b+2c+d}$ gelijk is aan

$$\frac{a}{4a} + \frac{b}{3b} + \frac{c}{2c} + \frac{d}{d}$$

Wat vind jij? Leg uit waarom je dat vindt.

Productief versus reproductief

De discussie over (het ontbreken van) algebraïsche vaardigheden heeft eigenlijk nooit aan actualiteit ingeboet.

Wel is die de afgelopen jaren sterk verhevigd. Dat is overigens een internationaal verschijnsel waar niet iedere criticaster van het vigerende onderwijs van op de hoogte schijnt te zijn, maar dit terzijde.

Een gevolg van de ontstane commotie is wel dat er weer veel meer oefeningen in de methoden verschijnen. Daar is uiteraard niets op tegen. De vraag is echter of die rijtjes, waarbij de nadruk veelal ligt op *reproductie* van geleerde rekenregels of algoritmen, het gewenste effect op lange termijn zullen hebben.

Wij menen dat dit twijfelachtig is. In het boek ‘*Wat a is, kun je niet weten*’ (Drijvers, 2006) staat in het hoofdstuk over oefenen deze alinea:

> Oefenen is noodzakelijk om door inzicht verworven vaardigheden te verankeren. Het effect van oefeningen zal voor de meeste leerlingen groter zijn naarmate de opdrachten meer van het denkvermogen vragen, meer eigen inbreng van de leerling uitlokken en meer mogelijkheden tot reflectie bieden. Kortom, naarmate zij meer een *productief* karakter hebben.

In onze bundel hebben we er bewust naar gestreefd om productieve oefeningen te ontwerpen. Daarbij hebben we ons laten leiden door de volgende aandachtspunten:

- variatie van oefenvormen
- uitdaging tot redeneren
- uitdaging tot generaliseren
- integratie van technieken
- aandacht voor de wiskundetaal
- uitdaging tot eigen producties.

De laatste vraag uit 'Alles door elkaar' van deel B luidt: *Bedenk zelf een vraag of opdracht die in dit deel* (B) *van het boek zou passen. Schrijf ook de oplossing op.*

Dit is de meest radicale vorm van wat in het bovenstaande lijstje een 'eigen productie' heet. Het is een expliciete poging om de leerling aan te zetten tot reflectie over wat hij geleerd en geoefend heeft in de voorgaande lessen.

Tenslotte dit....

Bent u nieuwsgierig geworden en wilt u met uw klas aan de gang? Het leerlingboek van *Oefenen met breuken* is te vinden op de website van het Freudenthal Instituut (www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/7244.pdf). Het boek plus uitgebreide docentenhandleiding is ook te koop via datzelfde Freudenthal Instituut: (www.fi.uu.nl/nl →instituut →winkel).

Wij zijn benieuwd naar uw reacties en eventuele ervaringen. Met welke leerlingen hebt u het boek gebruikt, basisschool, voortgezet onderwijs of nog anders? Waar is volgens u meer oefening nodig of wat ontbreekt in het oefenboek? Hebt u de leerlingen zelfstandig laten werken (bijvoorbeeld tijdens vervangingsuren) en hebt u de antwoorden besproken? Liet u de toetsen door de leerlingen zelf nakijken of hebt u dat gedaan en er een cijfer voor gegeven? Laat het ons vooral weten!

Truus Dekker, t.dekker@fi.uu.nl,
Martin Kindt, m.kindt@fi.uu.nl,
Freudenthal Instituut

Literatuur

Dekker, T., & Kindt, M. (2006). Wat doen we (niet) met breuken?, *Nieuwe Wiskrant, 26*(2), 6-10.

Drijvers, P.(red.) (2006). *Wat a is, dat kun je niet weten, een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school.* Utrecht: Freudenthal Instituut.