Wat te bewijzen is (46)

Rubriek

In de oorspronkelijke VWO-programma's voor wiskunde B1 en B1,2 was een nogal prominente plaats ingeruimd voor wat wel 'discrete analyse' heet. De haastige spoed waarmee het studiehuis werd ingevoerd en waarmee de nieuwe leerlingteksten moesten worden geschreven, had tot gevolg dat dit onderdeel niet werkelijk uit de verf is gekomen in de gangbare schoolboeken. Onderwerpen uit de discrete wiskunde zijn niet makkelijker, maar wel vaak concreter en meer toegankelijk dan die uit de 'continue wiskunde' en verdienen alleen al daarom meer aandacht in de diverse programma's.

Leibniz (1646-1716), auteur van het eerste artikel over differentiaalrekening (1684), schreef twintig jaar nadien een retrospectief werk, *Historia et origo calculi differentialis*. Daarin zegt hij dat de inspiratie van zijn 'calculus' voortkwam uit zijn vroege werk over rijen, met name over het verband tussen som- en verschilrijen. Dat komt in het kort neer op het volgende.

Bij een gegeven rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ hoort de verschilrij

$$d_{k+1} = a_{k+1} - a_k \text{ voor } k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Er geldt dan: $d_0 + d_1 + \ldots + d_{n-1} = a_n - a_0$

Lezers die vertrouwd zijn met de differentiaal- en integraalrekening zullen de frappante overeenkomst tussen deze eenvoudig te verifiëren regel en de zogenaamde hoofdstelling van de integraalrekening herkennen. Leibniz was met zijn jeugdwerk *De arte combinatoria* (1672) dus eigenlijk ook de uitvinder van wat nu wel de differentierekening wordt genoemd.

Deze aflevering gaat nu verder over een paar analogieën tussen de discrete en de continue analyse. Ik gebruik daarbij de notatie Δa_k voor het 'vooruitkijkende' verschil $a_{k+1} - a_k$.

Ter illustratie een paar voorbeelden die gemakkelijk kunnen worden gecontroleerd

$\Delta k = 1$	$\Delta 1^k = 0$
$\Delta k^2 = 2k + 1$	$\Delta 2^k = 1 \cdot 2^k$
$\Delta k^3 = 3k^2 + 3k + 1$	$\Delta 3^k = 2 \cdot 3^k$
$\Delta k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$	$\Delta 4^k = 3 \cdot 4^k$
enzovoort	enzovoort

Het eerste rijtje stelt misschien teleur uit het oogpunt van analogie, maar dat geldt niet voor het tweede. Dat de verschilrij van een exponentiële rij een constante maal de oorspronkelijke rij is, lijkt als twee druppels water op 'de afgeleide van een exponentiële functie is een constante maal de oorspronkelijke functie'. Aan de analogie met machtsfuncties is nog wel wat te verhelpen, zoals blijkt uit het volgende.

Pseudomachten

In de continue analyse wordt de volgende differentieerregel gekoesterd:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^m = mx^{m-1} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Misschien wel mooier is:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^m}{m!}\right) = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$$

want daarmee is een rij functies bekend, namelijk:

$$x \to 1, x \to x, x \to \frac{x^2}{2!}, x \to \frac{x^3}{3!}, x \to \frac{x^4}{4!}, \ldots$$

met de eigenschap dat iedere functie van de rij juist de afgeleide is van zijn opvolger.

Dat leidt dan weer tot het idee dat de 'oneindige som' van deze functies zijn eigen afgeleide is en omdat die som voor $x = 0$ de waarde 1 heeft, ook tot de identiteit:

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Natuurlijk is deze laatste formule hiermee nog lang niet bewezen, maar voor wie gelooft in de sommeerbaarheid van deze oneindige rij machten en in de legitimiteit van termsgewijs differentiëren in zo'n geval, lijkt het toch aardig goed.

Hoe zit het nu met de discrete pendant? Kan ik ook een serie rijen construeren zó dat elke rij de verschilrij ('rij van differenties') van zijn opvolger is?

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Een even eenvoudige als fraaie constructie geeft de driehoek van Pascal. Hier zijn in die driehoek diagonaalrijen aangegeven door middel van rechte lijntjes. De eerste rij is constant 1. De tweede rij wordt gevormd door de partiële sommen van de eerste. De derde rij bestaat uit de partiële sommen van de tweede. Enzovoort.

Dit alles zit opgesloten in de wet volgens welke de driehoek is gebouwd: elk getal binnen de driehoek (dus $\neq 1$) is gelijk aan de som van zijn twee bovenburen.

Een uitspraak over somrijen kan worden omgebogen in een uitspraak over verschilrijen, zij het dat er aan het patroon nog wat nullen moeten worden toegevoegd.

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6
\end{array}
$$

Nu is de eerste diagonaalrij de rij van differenties van de tweede, die is weer de rij van differenties van de derde, die weer van de vierde, enzovoort.
Uit de combinatoriek is bekend hoe deze rijen stuk voor stuk met een formule kunnen worden beschreven, namelijk als:

$$n \to 1,\ n \to n,\ n \to \frac{n(n-1)}{2!},\ n \to \frac{n(n-1)(n-2)}{3!},\ \ldots$$

Kortom: de diagonaalrij k ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$) kan worden beschreven als:

$$n \to \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

Bedenk hierbij dat $\binom{n}{k} = 0$ als $n < k$.
De tellers (en noemers) van bovenstaande breuken hebben van doen met permutaties. Zo geldt:
$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) =$ *aantal rangschikkingen van k stuks uit n elementen.*

Hiervoor wordt wel eens de notatie: $n^{(k)}$ gebruikt, in de differentierekening een *pseudo-macht* genoemd.
Met deze notatie komt er:

$$\Delta n^{(k)} = k \cdot n^{(k-1)}$$

en ook:

$$\Delta\left(\frac{n^{(k)}}{k!}\right) = \frac{n^{(k-1)}}{(k-1)!}$$

Deze formules lijken sterk op de eerder genoemde 'continue regels' . En net als in de continue analyse is het interessant om de (oneindige) som

$$1 + n + \frac{n^{(2)}}{2!} + \frac{n^{(3)}}{3!} + \ldots$$

te bekijken.

Omwille van de analogie moet hier een rij uitkomen die gelijk is aan zijn differentierij en die de startwaarde 1 heeft. Zo'n rij is voorhanden, namelijk de rij van machten van 2, dus 1, 2, 4, 8, 16, ... ofwel: $n \to 2^n$.

Inderdaad blijkt:

$$2^n = 1 + n + \frac{n^{(2)}}{2!} + \frac{n^{(3)}}{3!} + \ldots$$

Dit kan worden verklaard uit een bekende eigenschap van de driehoek van Pascal: de som van de getallen op ieder 'horizontaal rijtje' is gelijk aan een macht van 2.

$$
\begin{array}{rcl}
1 & = & 1 \\
1 + 1 & = & 2 \\
1 + 2 + 1 & = & 4 \\
1 + 3 + 3 + 1 & = & 8 \\
1 + 4 + 6 + 4 + 1 & = & 16 \\
1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 & = & 32 \\
1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 & = & 64
\end{array}
$$

Deze eigenschap kan op verschillende manieren worden begrepen:
– uit de wet volgens welke de driehoek is gebouwd, volgt direct dat de som van elk horizontaal rijtje het dubbele is van de som van het voorafgaande rijtje; immers elk getal plant zich als het ware twee keer voort in de volgende regel.
– uit het binomium van Newton toegepast op $(1+1)^n$
– uit het feit dat het aantal deelverzamelingen-van-k-elementen bij een verzameling met n elementen $\binom{n}{k}$ bedraagt, terwijl het totaal aantal deelverzamelingen gelijk is aan $2n$, waarmee dan:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

De discrete zusjes van sinus en cosinus

Uit de reeksontwikkeling van de e-macht kunnen de reeksontwikkelingen voor de sinus en de cosinus worden gevonden. Dat gaat dan wel via een reisje door het complexe vlak.
Daarbij speelt de beroemde formule van Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

een sleutelrol.
Hoe kan die formule plausibel worden gemaakt? In het mooie en klassieke boek *What is mathematics?* van Courant en Robbins, vond ik de volgende uitleg.
Om te beginnen geldt (formule van de Moivre):

$$(\cos t + i\sin t)^n = \cos nt + i\sin nt$$

Meetkundige interpretatie: vermenigvuldigen van een complex getal met het getal $\cos t + i\sin t$ komt op hetzelfde neer als een rotatie om het punt 0 over een hoek t. Een aantal keren herhaling geeft een verveelvoudiging van de draaihoek. Stel nu $t = x/n$, dan:

$$\left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n = \cos x + i\sin x$$

Echter, voor grote waarden van n geldt:

$$\sin\frac{x}{n} \approx \frac{x}{n} \qquad \text{en} \qquad \cos\frac{x}{n} \approx 1$$

En dan ook:

$$\left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n \approx \left(1+\frac{ix}{n}\right)^n$$

Naar analogie van de reële limiet $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$ kan men raden:

$$\cos x + i\sin x = e^{ix}$$

Na dit intermezzo, dat is gebaseerd op het ‘permanentieprincipe’ en ook op de intuïtie van Euler, keer ik terug naar waar het om begonnen was, de reeksontwikkelingen van sinus en cosinus.
Neem, met toepassing van nog eens het permanentieprincipe, de reeksontwikkeling van e^{ix} :

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots \\ &= \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right] + i\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right] \end{aligned}$$

Omdat het reële deel van e^{ix} gelijk is aan $\cos x$ en het imaginaire deel gelijk is aan $\sin x$, hebben we nu:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Wat is nu de discrete pendant hiervan?
Het gaat dus bijvoorbeeld om de oneindige som:

$$1 - \frac{n^{(2)}}{2!} + \frac{n^{(4)}}{4!} - \frac{n^{(6)}}{6!} + \dots$$

Uit de driehoek van Pascal vind ik het begin van deze rij, te noemen $n \to c_n$:

1, 1, 0, -2, -4, -4, 0, 8,....

Als dit beginnetje mij niet bedriegt, lijkt het er op dat

$$c_{n+4} = (-4)c_n \quad \text{voor } n = 0, 1, 2, \dots$$

Zoiets als een periodiek-exponentieel proces. Wat zit daar achter?
Alvorens die vraag te beantwoorden, wil ik eerst nog kijken naar de rij $n \to s_n$ waarvan de termen worden gegeven door:

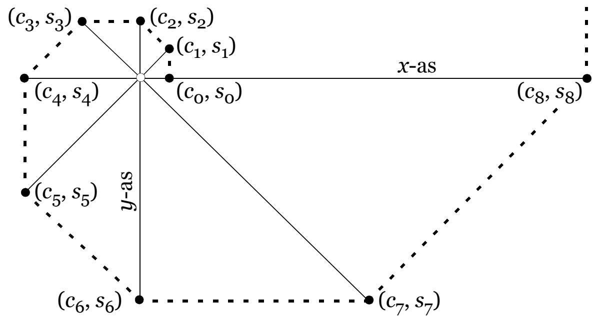
$$n - \frac{n^{(3)}}{3!} + \frac{n^{(5)}}{5!} - \frac{n^{(7)}}{7!} + \dots$$

Het begin daarvan is zó: 0, 1, 2, 2, 0, -4, -8, -8,.... , zodat het er ook op lijkt dat

$$s_{n+4} = (-4)s_n \quad \text{voor } n = 0, 1, 2, \dots$$

Zoals $(\cos x,\ \sin x)$ voor iedere waarde van x door een punt in het vlak kan worden voorgesteld, zo kunnen we ook de punten $(c_n,\ s_n)$ in het vlak aangeven.

In het continue geval komt de eenheidscirkel voor de dag, in het discrete geval lijkt het op een hoekige spiraal:



$$(c_0, s_0) \to (c_1, s_1) \to (c_2, s_2) \to (c_3, s_3) \to \dots$$

De wandeling kan tot stand worden gebracht via een herhaalde draaivermenigvuldiging (hoek 45°, factor $\sqrt{2}$), althans, dat is zo in het begin en dat zou zowel het periodieke als het exponentiële karakter verklaren.
Een draaivermenigvuldiging in het complexe vlak komt overeen met een vermenigvuldiging met een vaste complex factor; in dit geval moet dat het getal $1+i$ zijn.
De n-de macht hiervan laat zich ontwikkelen in:

$$(1+i)^n = 1 + \binom{n}{1}i + \binom{n}{2}i^2 + \binom{n}{3}i^3 + \dots$$

met als reëel deel

$$1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots$$

en als imaginair deel

$$n - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots$$

en die zijn inderdaad gelijk aan respectievelijk s_n en c_n. Het vermoeden was dus correct en de analogie is compleet!
De rijen $n \to s_n$ en $n \to c_n$ beschouw ik daarom als de discrete zusjes van de functies $x \to \sin x$ en $x \to \cos x$. Zo geldt bijvoorbeeld:

$$\begin{cases} \Delta s_n = c_n \\ \Delta c_n = -s_n \end{cases}$$

Daaruit volgt voor de ‘differentie van de differentie’:

$$\begin{cases} \Delta^2 s_n = -s_n \\ \Delta^2 c_n = -c_n \end{cases}$$

En net zoals $x \to \sin x$ en $x \to \cos x$ (en al hun lineaire combinaties) oplossingen zijn van de tweede-orde-differentiaalvergelijking:

$$y'' = -y$$

zijn $n \to s_n$ en $n \to c_n$ (en al hun lineaire combinaties) oplossingen van de tweede-orde-differentievergelijking:

$$\Delta^2 y_n = -y_n .$$

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl