

In het kader van haar stage vanuit de lerarenopleiding heeft **Daniëlle Remmelzwaan** onderzoek gedaan naar de beheersing van de algebraïsche vaardigheden en naar de aanwezigheid van *symbol sense* van wiskunde B-leerlingen in 5 HAVO en 5 VWO. In dit artikel worden de resultaten van dat onderzoek beschreven en een aantal aanbevelingen geformuleerd.

## The A-files

### Beheersing van algebraïsche vaardigheden in de vijfde klas

#### Inleiding

Twee jaar geleden is de nieuwe tweede fase van start gegaan. Een van de grote veranderingen in het wiskundeprogramma was het vastleggen van algebraïsche vaardigheden in de eindtermen voor het centraal schriftelijk examen.

Om inzicht te krijgen in hoe de nieuwe tweede faseleerlingen algebraïsche vaardigheden beheersen, is er een oproep gedaan aan *Getal & Ruimte*- en *Moderne Wiskunde*-docenten, om hun 5 HAVO- en 5 VWO- wiskunde B-klassen voor dit onderzoek beschikbaar te stellen.

Deze oproep was niet zonder resultaat: tussen februari en april dit jaar hebben over heel Nederland verspreid, 862 leerlingen uit vijfde klas wiskunde B-groepen deelgenomen aan dit onderzoek.

De beheersing van algebraïsche vaardigheden wordt vaak onderverdeeld in de beheersing van basisvaardigheden en het bezit van *symbol sense* (Drijvers, Goddijn & Kindt, 2006). De beheersing van basisvaardigheden is het kennen van de algebraïsche rekenregels en het kunnen toepassen hiervan, ofwel de procedurele kennis. *Symbol sense* is het bezit van strategische kennis en uit zich onder andere in het kunnen bepalen van de juiste oplossingsstrategie, het begrip van functiestructuren en het vermogen te bepalen of een gegeven antwoord juist kan zijn.

Dit onderzoek heeft de beheersing van de basisvaardigheden en *symbol sense* in kaart willen brengen door een algebra-toets af te nemen onder leerlingen die de methoden *Getal & Ruimte* of *Moderne Wiskunde* gebruiken en les krijgen op HAVO- of VWO-niveau. De verschillen tussen deze groepen en de verklaringen voor deze verschillen hebben mede antwoord gegeven op de vraag in hoeverre 5 HAVO- en 5 VWO-wiskunde B leerlingen hun algebraïsche vaardigheden beheersen.

#### De toetsinstrumenten

Naast de toets die de leerlingen hebben gemaakt, is er ook een vragenlijst opgesteld voor de docenten. De antwoorden hebben inzicht gegeven of er andere factoren zijn dan de lesmethode, die invloed kunnen hebben op de prestaties van de leerlingen. Zo is de docent gevraagd naar het gebruik van ICT-middelen bij het aanleren en onderhouden van algebraïsche vaardigheden, maar ook of naast de lesmethode nog extra algebramateriaal is behandeld.



fig. 1 De ingezonden toetsen

De docenten is tevens gevraagd om, voordat de leerlingen de toets maakten, een schatting van het klassen-gemiddelde te geven.

De toets was gebaseerd op de algebraïsche vaardigheden die verplicht zijn gesteld voor de HAVO-examenkandidaten van 2009. De toets bestond uit twee delen die samen veertig minuten in beslag namen. In het eerste deel van de toets, waar leerlingen 35 minuten de tijd voor hebben gekregen, werden door middel van kale en contextopgaven zowel basisvaardigheden als *symbol sense* getest. Alle opgaven in het eerste toetsdeel konden worden opgelost met behulp van de basisvaardigheden, maar een aantal was gemakkelijker op te

lossen wanneer leerlingen de handige ‘truc’ zagen. Een voorbeeld van een dergelijke opgave is te zien in figuur 2, waarbij leerlingen de opdracht kregen deze twee breuken bij elkaar op te tellen. Bij deze opgave is het handig om niet de standaardmethode te gebruiken voor het gelijknamig maken van de breuken, maar om de eerste breuk te vermenigvuldigen met  $c/c$ .

Het bezit van symbol sense test of leerlingen beseffen dat dit handiger is. De beheersing van basisvaardigheden test of leerlingen de kennis hebben hoe je breuken gelijknamig maakt, of hoe je deze op mag tellen wanneer ze gelijknamig zijn. Opgaven waarbij alleen maar standaardregels gebruikt hoefden te worden, testten dus enkel basisvaardigheden.

$$\frac{2c}{b^2} + \frac{3b}{b^2c}$$

fig. 2 Deel 1, opgave 1b

Het tweede toetsdeel nam maar vijf minuten in beslag en had als doel om alleen symbol sense te testen. Leerlingen moesten voor een zevental vergelijkingen aangeven welke van de tien gegeven rekenregels het handigste was voor het oplossen van de vergelijking. Hierbij hoefden leerlingen dus niets te berekenen.

$$(2x - 7)(2x + 7) = 0$$

fig. 3 Deel 2, vergelijking 3

In figuur 3 is een voorbeeld uit het tweede toetsdeel gegeven. Het gewenste resultaat zou zijn dat leerlingen niet de rekenregel  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$  als handigste oplossingsmethode aangeven, maar de rekenregel  $A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$ . De leerlingen kregen maar vijf minuten de tijd voor dit deel van de toets, om te testen of ze de meest handige oplossingsmethode ook in één oogopslag zagen.

## De resultaten

Uit de vragenlijsten is gebleken dat, van de 48 deelnemende klassen, tien klassen met ICT-middelen ter bevordering van de algebraïsche vaardigheden werkten. Hierbij ging het voornamelijk om het gebruik van applets. Er waren ook tien klassen die in de onderen/of bovenbouw extra materiaal kregen op het gebied van reken- en algebraïsche vaardigheden. Voor de rest van de klassen is aangegeven dat er op het gebied van algebraïsche vaardigheden geen extra middelen zijn ingezet.

De verwachtingen van de docenten waren zeer uiteenlopend. Zo heeft een docent zijn HAVO-klas voor het tweede toetsdeel op een 2 geschat, terwijl een andere

docent zijn VWO-klas op ditzelfde deel een 9 gaf. In tabel 1 zijn de gemiddelde verwachtingen van de docenten te zien.

Sommige docenten hebben ingevuld dat hun leerlingen het eerste toetsdeel minder goed zouden maken dan het tweede toetsdeel, maar zoals in tabel 1 te zien is, was de verwachting van de meeste docenten het tegenovergestelde. Docenten die een onderbouwing bij hun cijferverwachtingen hebben geschreven, gaven aan dat leerlingen het tweede toetsdeel waarschijnlijk slecht zouden maken omdat ze nog nooit opgaven van deze vorm hebben gemaakt.

Tabel 1: Gemiddelde verwachting van de docenten

Deel	HAVO		VWO	
	Getal & Ruimte	Moderne Wiskunde	Getal & Ruimte	Moderne Wiskunde
1	5.51	4.17	6.28	5.40
2	5.40	5.14	5.96	5.30

Ook was de verwachting van de docenten dat de HAVO-leerlingen het minder goed zouden maken dan de VWO-leerlingen, maar dat het verschil klein zou zijn. Wat tevens opvalt, is dat *Moderne Wiskunde*-docenten hun leerlingen op zowel HAVO als VWO lager inschatten dan hun collega's die *Getal & Ruimte* gebruiken.

In tabel 2 zijn de gemiddelde cijfers weergegeven die de leerlingen uiteindelijk hebben gehaald. De cijfers van het eerste deel zijn tot stand gekomen door voor iedere opgave apart een cijfer uit te rekenen en vervolgens het cijfergemiddelde van de vier opgaven te nemen.

Tabel 2: Gemiddelde cijfers van de leerlingen

Deel	HAVO		VWO	
	Getal & Ruimte	Moderne Wiskunde	Getal & Ruimte	Moderne Wiskunde
1	3,68	3,84	6,55	6,34
2	3,19	3,90	4,97	5,15

In tabel 2 is te zien dat de verwachting van de docenten niet geheel overeenkwam met de cijfers van de leerlingen. Het verschil tussen HAVO- en VWO-leerlingen blijkt vele malen groter te zijn dan de docenten hadden verwacht. Dit komt voornamelijk doordat de docenten veel hogere verwachtingen van de HAVO-leerlingen hadden, dan de feitelijke resultaten aangeven.

## De verschillen

### Tussen de methoden

Zoals te zien is in de eindcijfers, zijn er prestatieverschillen tussen de methoden gevonden. In de analyse

van de resultaten is per opgave gekeken of de verschillen tussen de methoden significant waren op een niveau van 5%. Hieruit bleek dat op de HAVO op zes van de tien opgaven in het eerste toetsdeel het verschil in prestaties van de *Getal & Ruimte*- en *Moderne Wiskunde*-leerlingen significant was, waarvan vijf in het voordeel van *Moderne Wiskunde*. Op het VWO is bij drie opgaven een significant verschil gevonden, ieder in het voordeel van *Getal & Ruimte*.

Wanneer op deze opgaven wordt ingezoomd, blijkt dat op de HAVO *Moderne Wiskunde*-leerlingen beter zijn in het werken met breukvormen en exponenten en *Getal & Ruimte*-leerlingen in het oplossen van tweede-graadsvergelijkingen.

Wanneer de lesboeken ernaast worden gelegd, blijkt dat de vaardigheden in opgaven waarop een methode beter scoort in dezelfde vorm recent zijn behandeld. In de HAVO-boeken van *Getal & Ruimte* komen de vaardigheden rondom breuken, in de vorm zoals deze getoetst zijn, niet voor in de vierde klas, maar pas in het laatste hoofdstuk in de vijfde klas. Ten tijde van de toetsafname was dit hoofdstuk nog niet door de leerlingen behandeld, terwijl de leerlingen die gebruik maakten van *Moderne Wiskunde* maximaal een maand eerder een vaardigheidshoofdstuk over breuken hadden behandeld. De verschillen op het VWO kunnen op dezelfde manier worden verklaard.

Wat hieruit te leren valt is dat er op het gebied van algebraïsche vaardigheden geen 'betere' methode is. De prestatieverschillen die gevonden zijn tussen de methoden hebben meer met timing dan met inhoud te maken.

#### Tussen de niveaus

Los van de verschillen tussen de methoden behaalden de HAVO-leerlingen zeer lage cijfers. De leerlingen scoorden bij een bepaalde methode soms dus wel iets hoger, maar niet goed. De VWO-leerlingen scoren zo'n 1,5 tot 2 keer zo hoge cijfers als de HAVO-leerlingen. Deze grote verschillen in cijfers zijn deels ontstaan doordat de HAVO-leerlingen vaak niet weten welke rekenregel ze toe moeten passen. Daarnaast worden de technieken van de rekenregels wel juist toegepast, maar niet binnen het juiste geheel. In figuur 4 is bijvoorbeeld te zien dat de leerling kan werken met de technieken van de rekenregel kruislings vermenigvuldigen, maar dat hij niet begrijpt dat deze rekenregel niet op dit moment uitgevoerd mag worden, omdat hij te maken heeft met een expressie in plaats van een vergelijking. Na het kruislings vermenigvuldigen, verzint hij er ook ter plekke een nieuwe rekenregel bij.

Handwritten student work for problem 1b. The student starts with the expression  $\frac{2c}{b^2} + \frac{3b}{b^2c}$ . They then perform several incorrect steps:  $2c \cdot b^2c = 2b^2c^2$ ,  $\frac{3b^3}{2b^2c^2} = \frac{1}{2}bc^2$ , and  $b^2 \cdot 3b = 3b^3$ .

fig. 4 Voorbeeld uit leerlingwerk van opgave 1b

Een extremer voorbeeld van zelf ontworpen rekenregels is te zien in figuur 5. Hier wordt door een leerlinge tot driemaal toe een niet bestaande rekenregel toegepast. Ten eerste telt ze breuken met ongelijke noemers op door de tellers bij de tellers en de noemers bij de noemers op te tellen. Vervolgens deelt ze willekeurig twee gelijke termen weg en als klap op de vuurpijl kan  $b^2$  en  $b$  zonder probleem worden opgeteld tot  $b^3$ . Natuurlijk heeft niet iedere leerling zulke uitwerkingen gegeven, maar al deze misconcepties kwamen los van elkaar veel voor. Wat dit voorbeeld zo mooi illustreert, is dat het onbegrip van veel HAVO-leerlingen, wanneer het gaat om de inhoud van dit soort expressies, zo duidelijk te zien is. Het is niet alleen zo dat deze leerling het stappenplan noemers gelijk maken en dan tellers optellen niet kent, maar de leerling voert ook een aantal operaties uit waarbij het besef ontbreekt dat ze pure onzin opschrijft.

Handwritten student work for problem 1b. The student starts with  $\frac{2c}{b^2} + \frac{3b}{b^2c}$ . They incorrectly add numerators and denominators:  $\frac{2c+3}{b^2+b^2c}$ , then  $\frac{2+3}{b^2+b}$ , and finally  $\frac{5}{b^3}$ .

fig. 5 Voorbeeld uit leerlingwerk van opgave 1b

Ten slotte nog een voorbeeld dat te vinden is in figuur 6. Dit is weer een heel ander probleem. Hierin is te zien dat de leerling de oplossingsmethode voor het optellen en aftrekken van breuken tot in de puntjes beheerst. Helaas gaat hij hier de mist in door deze toe te passen op het product van twee breuken.

Handwritten student work for problem 2a. The student starts with  $\frac{4a^2}{b} \cdot \frac{2}{ac}$  and  $\frac{4a^2}{ac} \cdot \frac{2b}{acb}$ . They then incorrectly combine them into  $\frac{8a^3cb}{acb}$ , labeled (A1).

fig. 6 Voorbeeld uit leerlingwerk van opgave 2a

Wat dit voorbeeld illustreert, is het belang van het begrip van de rekenregels en expressies voor het juist kunnen uitvoeren van de basisvaardigheden. De leerling beheerst namelijk wel de basisvaardigheid breuken optellen, maar begrijpt niet waarom deze hier niet mag worden toegepast.

Er wordt voornamelijk over HAVO-leerlingen gesproken, maar het is niet zo dat deze misconcepties niet voorkwamen in het leerlingwerk van VWO-leerlingen. In principe kwamen alle gevonden fouten voor bij beide methoden en beide niveaus, alleen in veel grotere mate bij de HAVO-leerlingen.

Net als bij de opgaven in het eerste toetsdeel, is er bij het tweede toetsdeel ook een groot verschil tussen HAVO- en VWO-leerlingen geconstateerd. Omdat dit toetsdeel enkel het symbol sense van de leerlingen testte, kan worden geconcludeerd dat het symbol sense van VWO-leerlingen beter ontwikkeld is. Uit de matige score op het tweede toetsdeel, in combinatie met het veelvoudig toepassen van incorrecte rekenregels, kan worden geconcludeerd dat de HAVO-leerlingen maar een beperkt ontwikkeld symbol sense hebben.

#### Tussen wel en geen gebruik van extra materiaal

Zowel bij de HAVO- als de VWO-klassen heeft een aantal docenten aangegeven dat ze hun leerlingen met ICT-middelen zoals applets laten werken. Wanneer alle *Getal & Ruimte* HAVO-leerlingen naar ICT-gebruik in groepen worden ingedeeld, blijkt dat er geen prestatieverschillen zijn tussen deze groepen. Ook bij de *Moderne Wiskunde*-groepen zijn er maar weinig verschillen gevonden. Dit betekent dat de gebruikte middelen geen blijvend leereffect hebben opgeleverd. Het vermoeden is dat dit komt door het gevonden gebrek aan symbol sense bij HAVO-leerlingen. Wanneer de leerlingen niet begrijpen wat ze doen, zullen ze kennis die elders geleerd is, niet toe kunnen passen in hun huidige oplossingstechnieken. Het is ook mogelijk dat leerlingen het leereffect onbewust belemmeren door hun mentaliteit. Bij HAVO-leerlingen leeft vaak de gedachte, dat wanneer er geen cijfer wordt gegeven, het materiaal niet relevant is om te onthouden. Het kan zijn dat de leerlingen die de ICT-les enkel als een leuk uitstapje zien, de nieuw verworven stof niet op de juiste manier verwerken en opslaan.

Bij de VWO-leerlingen zijn wel significante verschillen in het voordeel van ICT-gebruik gevonden, hoewel de verschillen wel groter waren bij de leerlingen die *Getal & Ruimte* gebruikten. Dit gevonden leereffect ligt in de lijn van de eerdere verklaring dat VWO-leerlingen een aardig symbol sense bezitten. Wanneer leerlingen begrijpen hoe functies in elkaar zitten en op welke

manieren deze opgelost kunnen worden, zou een andere benadering, zoals het werken met applets, bij kunnen dragen aan de verdere ontwikkeling van de algebraïsche vaardigheden. Het opmerkelijke is dat de applets het meeste leereffect lieten zien bij het tweede toetsdeel. Applets dragen dus voor VWO-leerlingen bij aan de ontwikkeling van de strategische vaardigheden.

Voor het aanbieden van extra reken- en/of algebra-materiaal ontstaat eigenlijk hetzelfde beeld. Bij de HAVO-leerlingen is er geen tot matig leereffect gevonden, terwijl bij de VWO-leerlingen juist een duidelijk leereffect te zien is. In figuur 7 is een grafiek weergegeven waarin de scores per opgave van *Getal & Ruimte* VWO-leerlingen staan weergegeven die zijn ingedeeld in de groepen: geen extra materiaal, extra rekenmateriaal in de onderbouw en extra algebra-materiaal in de onderbouw. Omdat het maximaal te behalen punten verschillend was per opgave, zijn alle gemiddelde scores door de maximaal te behalen score gedeeld. In dit figuur is goed te zien dat het extra materiaal bij veel opgaven een behoorlijk leereffect heeft opgeleverd.

Scores G&R VWO naar extra materiaal

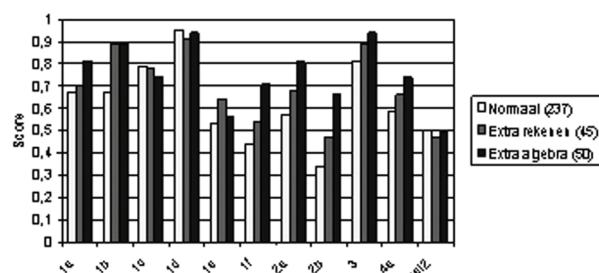


fig. 7 Invloed extra materiaal in de onderbouw

#### Conclusie

Dit onderzoek heeft inzicht gegeven in de beheersing van algebraïsche vaardigheden bij vijfde klas wiskunde B-leerlingen. Een van de opvallende resultaten was de gebrekkige beheersing van de vaardigheden door de HAVO-leerlingen. Deze gebrekkige beheersing is verklaard met het feit dat HAVO-leerlingen te weinig symbol sense bezitten. De methoden leren de vaardigheden voornamelijk middels rijtjes kale opgaven aan. Er wordt dus voornamelijk aandacht besteed aan de training van basisvaardigheden. Uit het feit dat er een gebrek aan symbol sense is gevonden, zou kunnen worden geconcludeerd dat de training van basisvaardigheden onvoldoende bijdraagt aan de ontwikkeling van symbol sense, dit terwijl de ontwikkeling van symbol sense heel belangrijk is. Bij een gebrek aan symbol sense begrijpen de leerlingen de rekenregels niet goed en hebben ze geen begrip voor functiestructuren. Hierdoor hebben ze veel moeite met het kiezen van de juiste oplossingsstrategie en het juist toepassen en



onthouden van de rekenregels. Mijn advies aan docenten zou zijn om in de lessen aandacht te besteden aan de inhoud van de regels. Van een aantal rekenregels is gemakkelijk duidelijk te maken waarom deze juist zijn. Denk hierbij aan het uittekenen van een opgedeeld vierkant om aan te tonen dat  $(x+3)^2$  gelijk moet zijn aan  $x^2+6x+9$  in plaats van  $x^2+9$ .

Ook is gebleken dat het inzetten van extra algebramateriaal of ICT-middelen geen noemingswaardig leereffect oplevert voor HAVO-leerlingen. Omdat niet met zekerheid kan worden gezegd wat de oorzaak hiervan is, zou ik op basis van deze resultaten willen aanraden om er in ieder geval niet vanuit te gaan dat bij HAVO-leerlingen het inzetten van extra materiaal per definitie een leereffect zal opleveren.

Voor de VWO-leerlingen daarentegen, raad ik sterk aan om ze meer met applets te laten werken. Uit dit onderzoek is gebleken dat het gebruik hiervan onder andere een bijdrage kan leveren in de ontwikkeling van symbol sense.

### Ten slotte

Dit onderzoek was niet mogelijk geweest zonder de hulp van mijn begeleider Michiel Doorman, de bijdrage van de leerlingen en de bereidheid van de docenten om de toets in hun klassen af te nemen. Hierbij dus mijn dank aan de scholen die hebben deelgenomen aan dit onderzoek:

- Anna van Rijn College, Nieuwegein
- Arentheem College, Arnhem
- CS Vincent van Gogh, Assen
- Da Vinci College, Purmerend
- De Populier, Den Haag

- Eerste Christelijk Lyceum, Haarlem
- Gomarus Scholengemeenschap, Gorinchem
- Het College Vos, Vlaardingen
- Het Nieuwe Lyceum, Bilthoven
- Ichthus College, Veenendaal
- Laar en Berg, Laren
- Leidsche Rijn College Utrecht
- Marnix College, Ede
- Montessori College Nijmegen, Nijmegen
- Rölingcollege afd Belcampo, Groningen
- RS Goeree-Overflakkee, Middelharnis
- Sint-Maartenscollege, Maastricht
- Sint-Maartenscollege, Voorburg
- Sint Michaël College, Zaandam
- St. Ludgercollege, Doetinchem
- Twents Carmel College, Oldenzaal
- Vrijzinnig-Christelijk Lyceum, Den Haag

Voor geïnteresseerden is de toets die is afgenomen online beschikbaar via de website van de *Nieuwe Wiskrant*. Hier kunt u ook een lijst vinden met de meest gemaakte fouten en misconcepties die in het leerlingwerk voorkwamen.

*Daniëlle Remmelzwaan*  
Freudenthal Instituut, Utrecht

Mocht u meer willen weten over dit onderzoek: [danielleremmelzwaan@hotmail.com](mailto:danielleremmelzwaan@hotmail.com)

### Literatuur

- Drijvers, P., Goddijn, A., & Kindt, M. (2006). Oriëntatie op de schoolalgebra. In P. Drijvers (Red.), *Wat a is kun je niet weten* (pp. 7-23). Utrecht: Freudenthal Instituut.

### Verschenen:



### Puzzelwandeling door Nijmegen.

Auteurs: Leon van den Broek en Lambert Kemerink

Verkrijgbaar bij de VVV en diverse boekhandels in Nijmegen.