De vorm van de cellen in een bijenraat combineert optimale stevigheid met minimaal materiaalgebruik. **Nicole Miéwis** laat zien hoe de mens wiskundig berekent wat de bij vanzelf doet.

De wiskunde van de honingbij

Zeshoekige cellen?

De cellen van een bijenraat worden door de werksters in was gebouwd om er honing, pollen, eieren en larven in op te slaan. Aristoteles (vierde eeuw v. C.) merkte op dat deze cellen de vorm hebben van zeshoekige prisma's. Pappos[1] legde uit wat het voordeel is van deze vorm: de oppervlakte, en dus de hoeveelheid bijenwas, is minimaal.

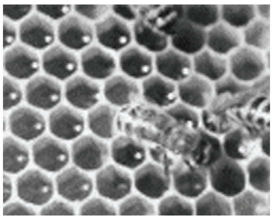


fig. 1 Zeshoekige cellen

De grootte van een cel wordt aangepast aan de afmetingen van de larve die zich erin moet ontwikkelen. Er wordt bespaard op de hoeveelheid was als de cellen netjes tegen elkaar aansluiten. Als we ervan uitgaan dat de grondvlakken regelmatige veelhoeken moeten zijn, kunnen de grondvlakken enkel gelijkzijdige driehoeken, vierkanten of regelmatige zeshoeken zijn. Alleen met deze regelmatige veelhoeken kan men het vlak betegelen zonder gaten of overlappingen.

fig. 2 Betegelingen: a) driehoeken b) vierkanten c) zeshoeken

Laten we eens onderzoeken welke van deze drie mogelijkheden de zuinigste is. Op het grondvlak worden zijmuren gebouwd bestaande uit drie, vier of zes rechthoeken. De hoogte van deze zijmuren is opgelegd door de afmetingen van de larve; de totale oppervlakte van deze zijmuren hangt dus enkel af van de omtrek van het grondvlak.

De vraag is nu welke van deze drie veelhoeken de kleinste omtrek heeft bij een gegeven oppervlakte of, wat op hetzelfde neerkomt, de grootste oppervlakte bij een gegeven omtrek. Noem z de zijde van het grondvlak. De omtrekken en oppervlakten worden in de tabel hieronder vergeleken.

grondvlak	omtrek P	oppervlakte A	A als functie van P
driehoek	$3z$	$\frac{\sqrt{3}}{4}z^2$	$A = \frac{\sqrt{3}}{36}P^2 \approx 0,04811P^2$
vierkant	$4z$	z^2	$A = \frac{1}{16}P^2 \approx 0,06250P^2$
zeshoek	$6z$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}z^2$	$A = \frac{\sqrt{3}}{24}P^2 \approx 0,07217P^2$

De zeshoekige betegeling leidt dus tot een minimaal verbruik aan was. Dat is wat Pappos in de derde eeuw na Christus had opgemerkt. De bijen bouwen de bodem, een laag van minder dan 0,3 mm dik, en hierop, aan weerskanten van de bodem, zeshoekige prisma's die een soort wafel in was vormen.

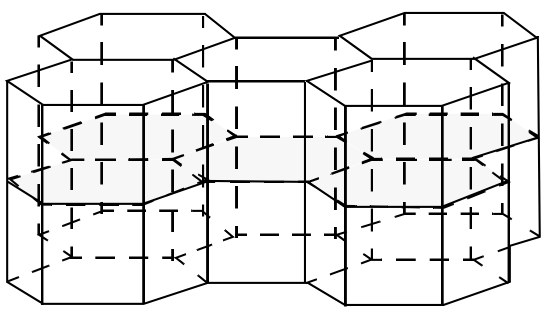


fig. 3 De 'wafel' volgens Pappos

Ja, maar...

In 1712 ontdekte de Frans-Italiaanse wis- en sterrenkundige Giacomo Filippo Maraldi (neef en medewerker van Jean-Dominique Cassini aan het Observatorium van Parijs) dat de bodem, in tegenstelling tot wat men dacht, niet vlak is. Een doorsnede van een cel loodrecht op de muren is wel degelijk een regelmatige zeshoek, maar de bodem is samengesteld uit drie ruiten die niet in één vlak liggen!

Maraldi bepaalde experimenteel één van de hoeken van deze ruiten en vond iets in de buurt van 70°. Hij stelde vast dat de prisma's van de twee lagen van de wafel tegen elkaar passen met deze ruiten als gemeenschappelijke grens (zie verderop).

Het zeshoekige grondvlak $ABCDEF$ van een cel met vlakke bodem kun je verdelen in drie congruente ruiten $ABCN$, $CDEN$ en $EFAN$.

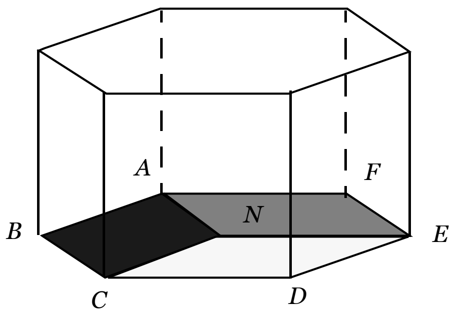


fig. 4 De drie ruiten in één vlak

We laten nu de ruit $ABCN$ kantelen rond zijn diagonaal AC. Tegelijkertijd wordt de ruit in de richting van de andere diagonaal uitgerekt, op zo'n manier dat B naar een punt B_1 glijdt op de opstaande ribbe door B; de diagonaal BN wordt B_1M. De ruit $AMCB_1$ is één van de ruiten waar Maraldi het over had.

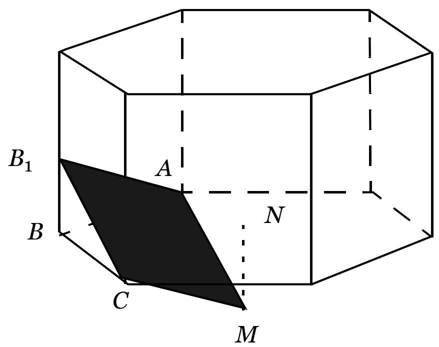


fig. 5 Eén van de drie 'uitgerekte' ruiten

De twee andere ruiten worden op dezelfde manier gekanteld en uitgerekt. Op die manier ontstaat de situatie van figuur 5. De ruit $CNED$ wordt de ruit $CMED_1$ en de ruit $ENAF$ wordt de ruit $EMAF_1$.

Deze drie ruiten $AMCB_1$, $CMED_1$ en $EMAF_1$ zijn congruent (de hele cel van figuur 5 wordt op zichzelf afgebeeld bij een draaiing over 120° rond een verticale as door M).

In tegenstelling tot wat Pappos dacht en tot de foutieve voorstelling van figuur 3, hebben de cellen een 'puntige' bodem en zijn de cellen van de twee lagen 'geschrankt'. Het onderste punt van een cel van de bovenste laag komt uit waar verkorte ribben van drie cellen van de onderste laag samenkomen (figuur 6).

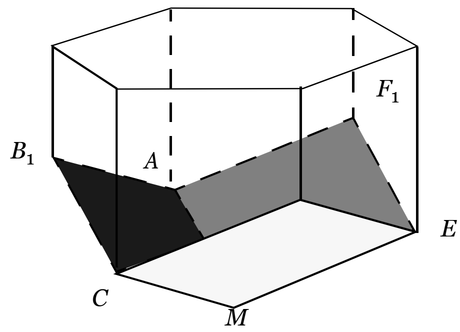


fig. 6 De drie ruiten

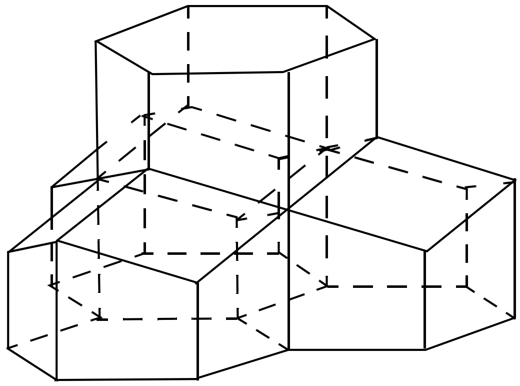


fig. 7 Hoe de echte cellen tegen elkaar passen

Is het volume van een cel veranderd? Neen, want je kunt gemakkelijk aantonen dat de twee piramides $ACBB_1$ en $ACNM$ hetzelfde volume hebben (zie figuur 7).

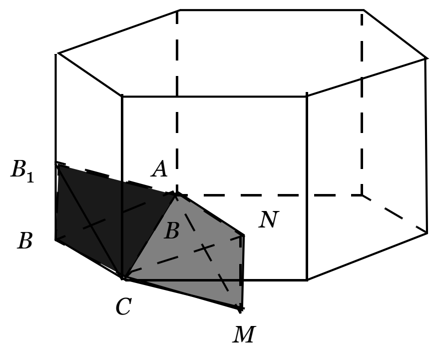


fig. 8 De piramides

Probleemstelling

Hebben de bijen er voordeel bij om dergelijke 'puntige' cellen te bouwen? Is er evenveel was nodig om een zeshoekige cel met een vlakke bodem (figuur 8) of met een 'puntige' bodem (figuur 9) te bouwen?

Dit is een mooie onderzoeksopdracht om voor te leggen aan leerlingen van de derde graad.

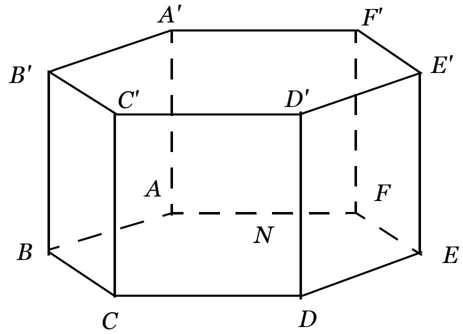


fig. 9 Zeshoekige cel met vlakke bodem

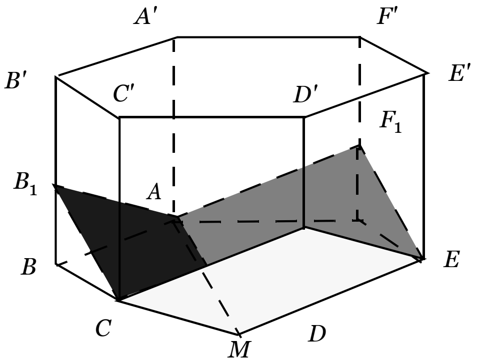


fig. 10 Zeshoekige cel met 'puntige' bodem

Een eerste moeilijkheid, na het begrijpen van het probleem zelf, is de keuze van de geschikte variabele(n). Het variëren van de vorm van de ruiten zal waarschijnlijk een verandering van de oppervlakte van de cel met zich meebrengen.

De leerkracht kan het onderzoek vereenvoudigen door erop te wijzen dat de hoogte van de cel en de grootte van de regelmatige zeshoek die de bovenste rand van de cel vormt, niet belangrijk zijn voor wat we willen onderzoeken. Door er constante waarden aan toe te kennen, doet men geen afbreuk aan de algemeenheid van het probleem.

Verschillende 'variabelen' zijn mogelijk. Een natuurlijke keuze is één van de twee hoeken van de ruit. Een andere keuze is de hoek $B\hat{S}B_1$ van figuur 7 (voor een uitwerking met deze keuze, zie Villers, 2002). In dit artikel willen we zo dicht mogelijk aansluiten bij de idee van de 'uitrekking' van de zeshoeken door de verplaatsing van B naar B_1. We willen de verandering van de oppervlakte bestuderen in functie van deze verplaatsing.

Gegevens

De regelmatige zeshoeken die de bovenvlakken vormen voor de twee typen cellen zijn ingeschreven in een cirkel met 10 mm diameter. Idem voor de zeshoeken van de cellen met vlakke bodem. De hoogte van de ribben van het zeshoekige prisma (cel met vlakke bodem) is ook 10 mm. De afstand in mm tussen de punten B en B_1, D en D_1, F en F_1 van figuur 9 noemen we x.

Deelproblemen

- Druk het verschil uit tussen de totale oppervlakten van beide soorten cellen. Is dit verschil constant?
- Als dit verschil variabel is, kun je dan een waarde van x vinden waarvoor dit verschil maximaal (of minimaal) is?
- Wat zijn dan de afmetingen van de cel?

Het opstellen van een functievoorschrift

We willen het verschil tussen de oppervlakte van een cel met vlakke bodem en de oppervlakte van een cel met 'puntige bodem' uitdrukken in een functie van x.

Stap 1

Wat is het gemeenschappelijke deel van beide soorten cellen?

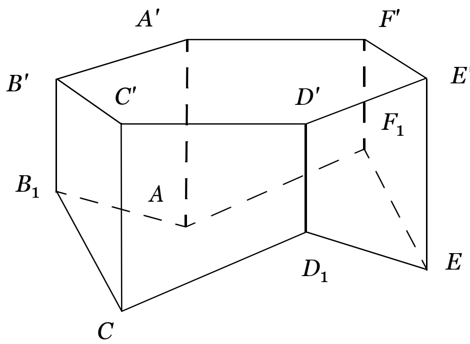


fig. 11 Gemeenschappelijk deel van beide soorten cellen

Het gemeenschappelijk deel bestaat uit zes congruente trapezia: $AA'B'B_1$, $B_1B'C'C$, $CC'D'D_1$, $D_1D'E'E$, $EE'F'F_1$ en $F_1F'A'A$. Vermits we geïnteresseerd zijn in het verschil tussen beide typen, hoeven we de oppervlakte van dit stuk niet te berekenen.

Stap 2

Wat moet worden toegevoegd aan het gemeenschappelijke deel om een cel met vlakke bodem te verkrijgen?

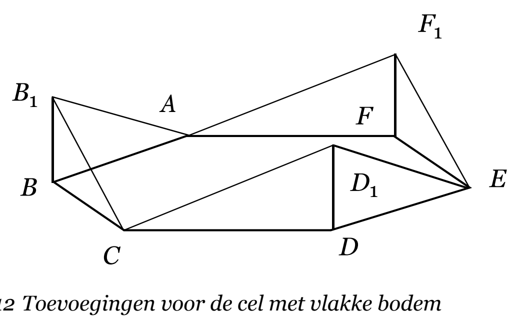


fig. 12 Toevoegingen voor de cel met vlakke bodem

Er komen zes congruente driehoeken bij, namelijk BB_1A, BB_1C, DD_1C, DD_1E, FF_1E en FF_1A, en de zeshoek $ABCDEF$ (zie figuur 11).

We berekenen eerst de oppervlakte van één zo'n driehoek. De zijde $[AB]$ is een zijde van de regelmatige zeshoek ingeschreven in een cirkel met diameter 10. We weten dat de zijden van de zeshoek gelijk zijn aan de straal van de cirkel. De oppervlakte van een van de driehoek (zie figuur 12) is dus $\frac{5x}{2}$ en de oppervlakte van de zes driehoeken samen is $\varsigma_1 = 15x$.

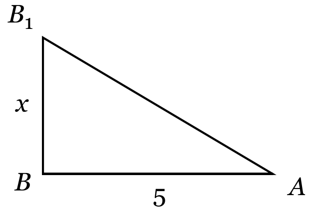


fig. 13 De driehoek ABB_1

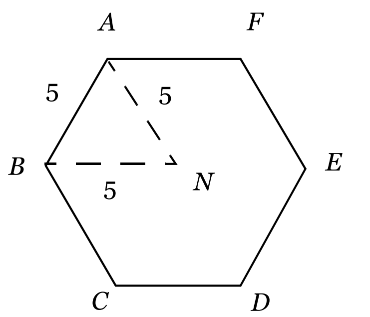


fig. 14 De zeshoek ABCDEF

We berekenen nu de oppervlakte van de zeshoek. De zeshoek bestaat uit zes gelijkzijdige driehoeken met dezelfde oppervlakte. De lengte van de zijden is 5. De oppervlakte van één gelijkzijdige driehoek is dus

$$\frac{5 \cdot 5 \cdot \sin 60°}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}.$$

De oppervlakte van de zeshoek (zie figuur 13) is

$$\varsigma_2 = 6 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{2}$$

Stap 3

Wat moet worden toegevoegd aan het gemeenschappelijk deel om de cel met 'puntige' bodem te verkrijgen?

Er komen drie congruente ruiten bij (zie figuur 14): $AMCB_1$, $CMED_1$ en $EMAF_1$. We berekenen de oppervlakte van één zo'n ruit. We stellen vast (zie figuren 12 en 13) dat $[AB_1]$ de schuine zijde is van de rechthoekige driehoek ABB_1.

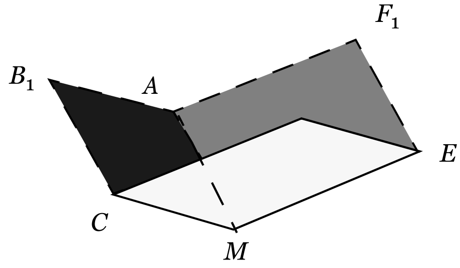


fig. 15 Toevoegingen van de cel met 'puntige' bodem

De lengte is dus $|AB_1| = \sqrt{25 + x^2}$.

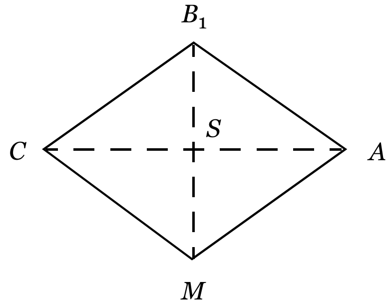


fig. 16 De ruit $AMCB_1$

Op figuur 13 zien we dat $[AS]$ de helft is van de diagonaal $[AC]$ van de zeshoek $ABCDEF$. De hoek $A\hat{B}C$ is 120°, dus kunnen we $|AC|$ vinden met de stelling van de Iraanse wiskundige Jamshid Al-Kashi (vijftiende-eeuwse grondlegger van de driehoeksmeting), ook gekend als cosinusregel:

$$|AC|^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 120° = 75$$
$$|AC| = 5\sqrt{3}$$

In de driehoek ASB_1 passen we de stelling van Pythagoras toe:

$$|SB_1|^2 = |AB_1|^2 - |AS|^2 = 25 + x^2 - \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + x^2.$$

Nu zijn de lengten van beide diagonalen van de ruit bekend (zie figuur 15): $|AC| = 5\sqrt{3}$.

en $|MB_1| = 2|SB_1| = \sqrt{25 + 4x^2}$.

De oppervlakte van de ruit $AMCB_1$ is dus

$$\frac{5\sqrt{3}\sqrt{25 + 4x^2}}{2}.$$

De oppervlakte van de drie ruiten samen is dan

$$\varsigma_3 = \frac{15\sqrt{3}\sqrt{25 + 4x^2}}{2}.$$

Het verschil tussen de totale oppervlakte van de cel met vlakke bodem en de totale oppervlakte van de cel met 'puntige' bodem is $\varsigma_1 + \varsigma_2 - \varsigma_3$. Deze verschilfunctie noemen we f. Dus:

$$f(x) = \frac{75\sqrt{3}}{2} + 15x - \frac{15\sqrt{3}\sqrt{25+4x^2}}{2}$$

waarbij x varieert van 0 tot 10, uitgedrukt in mm. De formule is nu opgesteld. Dit is duidelijk geen constante functie. Het verschil tussen beide totale oppervlakten varieert in functie van x; de hoeveelheid was die de bijen nodig hebben is dus variabel.

Maximum? Minimum?

De hoeveelheid was bereikt een minimum als er een x-waarde bestaat waarvoor het verschil zo groot mogelijk is. Verschillende methodes zijn mogelijk.

Tabel 1 laat zien dat de functie een maximum bereikt in de buurt van $x = 2$. Met tabel 2 zien we dat het in de buurt van $x = 1,8$ is; met tabel 3 in de buurt van $x = 1,77$ en met tabel 4 in de buurt van $x = 1,768$ (steeds in mm). Dit proces kan worden voortgezet als we een nog grotere nauwkeurigheid wensen.

Met een tabel

x	f(x)
0	0,0000000
1	9,9965624
2	11,7728815
3	8,4937858
4	2,4008955
5	-5,2849702
6	-13,9230485
7	-23,1639926
8	-32,8065618
9	-42,7284400
10	-52,8516608

Tab. 1

x	f(x)
1	9,9965624
1,1	10,4906482
1,2	10,9050455
1,3	11,2432992
1,4	11,5089741
1,5	11,7056182
1,6	11,8367317
1,7	11,9057405
1,8	11,9159759
1,9	11,8706574
2	11,7728815
2,1	11,6256122
2,2	11,4316764
2,3	11,1937612
2,4	10,9144131
2,5	10,5960399
2,6	10,2409134
2,7	9,8511731
2,8	9,4288311
2,9	8,9757775
3	8,4937858

Tab. 2

x	f(x)
1,7	11,9057405
1,71	11,9093548
1,72	11,9123847
1,73	11,9148336
1,74	11,9167045
1,75	11,9180009
1,76	11,9187258
1,77	11,9188826
1,78	11,9184744
1,79	11,9175044
1,8	11,9159759
1,81	11,9138918
1,82	11,9112555
1,83	11,9080701
1,84	11,9043387
1,85	11,9000643
1,86	11,8952502
1,87	11,8898994
1,88	11,8840149
1,89	11,8775999
1,9	11,8706574

Tab. 3

x	f(x)
1,76	11,9187258
1,761	11,9187670
1,762	11,9188025
1,763	11,9188324
1,764	11,9188565
1,765	11,9188750
1,766	11,9188879
1,767	11,9188950
1,768	11,9188965
1,769	11,9188924
1,77	11,9188826
1,771	11,9188671
1,772	11,9188461
1,773	11,9188193
1,774	11,9187869
1,775	11,9187489
1,776	11,9187053
1,777	11,9186560
1,778	11,9186011
1,779	11,9185406
1,78	11,9184744

Tab. 4

Met een grafische rekenmachine

We voeren de functie in en we gebruiken de toets om een maximum te zoeken. We vinden dat het maximum bereikt wordt voor $x \approx 1,7677$ (in mm).

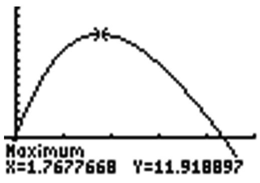


fig. 17 Grafisch scherm

Met de afgeleide

We kunnen de functie schrijven als

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(75\sqrt{3} + 30x - 15\sqrt{3}\sqrt{25+4x^2}\right) = \frac{1}{2}g(x)$$

De extrema van de functies f en g worden bereikt bij dezelfde x-waarden. We leiden dus de functie g af.

$$g'(x) = 30 - 15\sqrt{3}\frac{4x}{\sqrt{25+4x^2}} = \frac{30\sqrt{25+4x^2} - 60\sqrt{3}x}{\sqrt{25+4x^2}}$$

De afgeleide $g'(x)$ wordt nul wanneer

$$30\sqrt{25+4x^2} = 60\sqrt{3}x$$

$$25 + 4x^2 = 12x^2$$

$$x^2 = \frac{25}{8}$$

Alleen de positieve waarde heeft hier betekenis, dus $x = 1,768$ (in mm).

Merk op dat de Schotse wiskundige Colin Mac Laurin (1698-1751), leerling van Newton en bekend om zijn reeksontwikkelingen, in 1739 een afgeleide gebruikte om het gebruik van ruiten door de bijen te 'verantwoorden'. Hij was het ook die de exacte hoek van deze ruiten berekende.

Afmetingen van de cellen

Wat zijn nu de afmetingen van de ruiten die, bij de configuratie van de cellen met 'puntige' bodem, ervoor zorgen dat er zo weinig mogelijk was wordt verbruikt? De ruit is voorgesteld in figuur 15. Bepaalde afmetingen werden al berekend in stap 3:

$$|AS| = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ (in mm);}$$

$$|AB_1| = \sqrt{25 + \frac{25}{8}} = \frac{15}{2\sqrt{2}} \text{ (in mm).}$$

Hieruit volgt:

$$\cos S\hat{A}B_1 = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\frac{15}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$S\hat{A}B_1 = 35°15'52''.$$

De hoeken van de ruit zijn dus

$$M\hat{A}B_1 = 2 \cdot 35°15'52'' = 70°31'44''$$

en $A\hat{B_1}C = 180° - 70°31'44'' = 109°28'16''$.

De eerste hoek komt overeen met de hoek die Maraldi experimenteel gevonden had (zie paragraaf 2). De tweede hoek is in de chemie bekend als de hoek van de bindingen H – C – H in een methaanmolecule.

Ten slotte merken we op dat

$$\cos M\hat{A}B_1 = 2\cos^2 S\hat{A}B_1 - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 - 1 = \frac{1}{3}$$

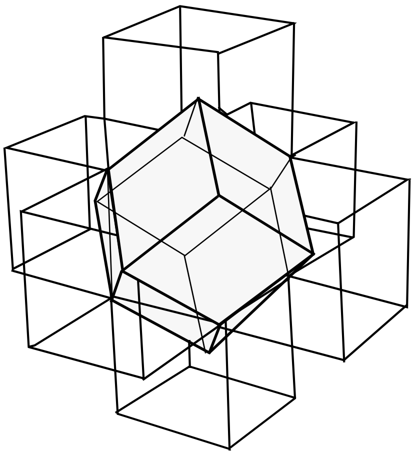
en

$$\cos A\hat{B}_1C = \cos(180° - M\hat{A}B_1) = -\frac{1}{3}.$$

Nicole Miéwis
Collège Saint Louis, Liège

Dit artikel verscheen in het tweede nummer van *Losanges*, het nieuwe tijdschrift van de SBPMef (Société Belge des Professeurs de Mathématiques d'expression Française) dat in de plaats is gekomen van *Mathématique et Pédagogie en Maths-Jeunes*. Vertaling uit het Frans: Michel Roelens.

Noot van de vertaler



De bodem van een cel is ook terug te vinden in een 'ruitentwaalfvlak'. Een ruitentwaalfvlak ontstaat door de acht hoekpunten van een kubus te verbinden met de middelpunten van de zes 'buurkubussen' gebouwd op de zijvlakken van de centrale kubus (zie bovenstaande figuur).

De hoeken van deze twaalf ruiten zijn gelijk zijn aan de hoeken tussen de ruimtediagonalen van een kubus. Deze ruiten hebben dus dezelfde vorm als die van een cel van een bijenraat. De bodem van een cel is een stuk van het ruitentwaalfvlak, namelijk drie ruiten rond een hoekpunt waar drie zijvlakken samenkomen (met andere woorden rond een hoekpunt van de centrale kubus).

Het bewijs!

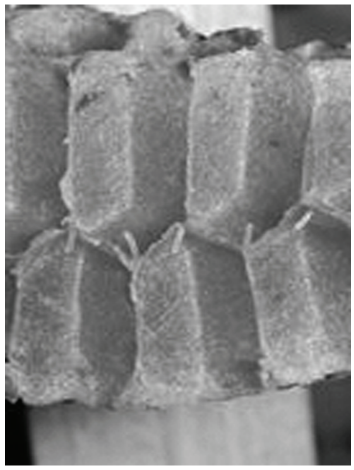


fig. 18 En bovendien is het nog waar ook...

Djebbar, A. (2005). *L'algèbre arabe*. Paris: Vuibert.

Miéwis, N. (2008). La mathématique de l'abeille, *Losanges, 2*, 12-20.

Mison, G., & Gauthier, R. *Le problème des alvéoles*, www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/apmep/regionale/gerardmer/atelJM22.htm.

Villers, C. (2002). La mathématique au quotidien. Le goût du miel. *Math-Jeunes 100S*, 42-45.

Noot

[1] Pappos van Alexandrië (rond 300 n.C.) schreef de Wiskundige collecties (acht boeken waarvan zes bewaard). Hij is onze beste getuige van de Griekse wiskunde. Hij vatte Euclides, Archimedes, Apollonius en Ptolemaios samen en voegde er eigen werk aan toe. Hij wordt beschouwd als de laatste Griekse meetkundige; met hem vangt de tijd van de commentatoren aan.