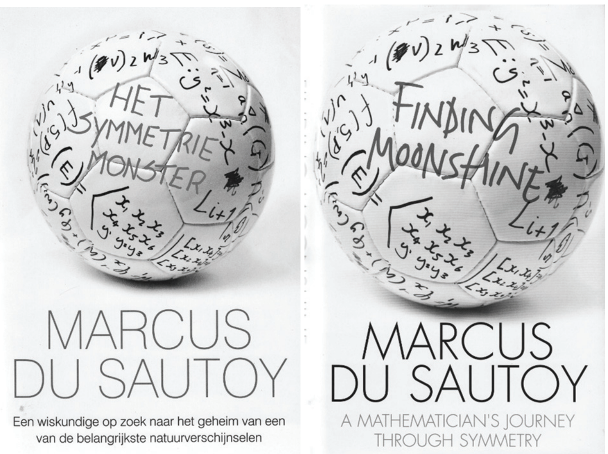
Afgelopen zomer heeft **Hans Krabbendam** het *Symmetriemonster* mee genomen naar Schotland, met als gevolg dat hij daar voortdurend symmetrieën tegenkwam en fotografeerde. Maar het leverde ook een fraaie analyse op van het boek, de schrijver en de benodigde wiskundige voorkennis om optimaal van het boek te kunnen genieten.

Op zoek naar het monster

Titel:	Het Symmetriemonster, een wiskundige op zoek naar het geheim van een van de belangrijkste natuurverschijnselen
Auteur:	Marcus Du Sautoy
Uitgever:	Uitgeverij Nieuwezijds, Amsterdam, 2009
ISBN:	9789057122866
Prijs:	€ 24,95



Inleiding

Het boek dat hier besproken wordt, is de Nederlandse vertaling van het boek *Finding Moonshine, A Mathematician's Journey through Symmetry* van Marcus du Sautoy, zie ook het interview. Die titel samen met de subtitel vind ik wat beter en poëtischer dan de Nederlandse titel, *Het Symmetriemonster, een wiskundige op zoek naar het geheim van een van de belangrijkste natuurverschijnselen*, omdat niet alleen het Monster verwondering en wiskundige weerbarstigheid teweeg brengt maar vooral ook de onverklaarbare, raadselachtige verbindingen van het Monster met allerlei andere niet vermoede gebieden van binnen en ook buiten de wiskunde. Zo liggen er verbanden met de getaltheorie en met de snaartheorie bijvoorbeeld. Maar genoeg hierover, we komen er op terug.

Het onderwerp symmetrie

Symmetrie is een fascinerend verschijnsel, waaraan je niet kunt ontkomen als je om je heen kijkt. Je ziet dan hoe met name de door mensen gemaakte objecten een verrassende neiging tot symmetrie vertonen. Iets beter gekeken, levert ook de (micro)natuur die dwingende neiging tot symmetrie op. Darwin heeft die neiging een van de belangrijkste survivalelementen van de evolutie genoemd. Er zijn vele publicaties die wijzen op de alom aanwezigheid van symmetrie, en een van de beroemdste daarvan is wel die van Weyl (1952). Hij heeft met name in het eerste hoofdstuk van zijn *Symmetry* prachtige voorbeelden gegeven van symmetrie in de natuur en in door mensen gemaakte objecten, bijvoorbeeld in de kunst. Fascinerend, maar vooral ook verrassend, is vervolgens dat wiskundigen op zoek gaan naar de overeenkomsten en verschillen in de verschillende soorten symmetrie en een bovenliggende structuur vinden, de symmetriegroepen. Zo heeft bijvoorbeeldeen gelijkzijdige driehoek drie draaisymmetrieën en drie spiegelsymmetrieën en die transformaties vormen bij elkaar de symmetrieën van de gelijkzijdige driehoek. De drie draaisymmetrieën blijken overeen te komen met de elementen van de cyclische groep C(3), waarbij cyclisch zoveel betekent dat ze na een paar van die transformaties 'opnieuw' beginnen en samen met de spiegelsymmetrieën vormen ze de diëdergroep D(3); en zo komen we met de symmetrieën in abstracte structuren, de groepentheorie, terecht, want er zijn meer objecten die een verschijningsvorm van de diëdergroep D(3) zijn. Het beschouwen van de gemeenschappelijkheid in symmetrieën komt dus neer op het beschouwen van symmetriegroepen. Er op die abstracte manier naar kijken, resulteert in overeenkomstige patronen die visueel gezien helemaal niet op elkaar lijken. Zo kom je dan op zeven mogelijke symmetrische randversieringen en zeventien regelmatige vlakversieringen, ook wel behangpatronen (wallpapergroups) genoemd. Dat is verrassend, en moeilijk te vatten omdat op het eerste gezicht al die afbeeldingen er verschillend uitzien, maar bij nadere bestudering kunnen ze toch bij dezelfde groep horen. Een mooi voorbeeld van een dergelijk, in dit geval Keltisch, patroon kwam ik afgelopen zomervakantie in Schotland tegen (zie figuur 1). Het is, als je er een vlakvulling mee maakt, een voorbeeld van een P4M. Een ander voorbeeld van diezelfde groep zie je in figuur 2. Veel van die Keltische patronen vallen in die groep. Er zijn goede determinatieschema's die je snel naar de bijbehorende groep leiden, zie bijvoorbeeld J. van de Craats[1] of [2], een mooi artikel met mooie voorbeelden.

fig. 1 Voorbeeeld van behangpatroon P4M

Natuurlijk, en dat is weer zo'n wiskundige activiteit, kun je deze classificatie uitbreiden naar meer dimensies. Zo worden de symmetrieën van de kubus beschreven in de zogenaamde octaëdergroep die 24 elementen bevat en die overeenkomt met de permutatiegroep P(4), de groep van de verwisselingen van vier elementen. Wat zijn die 24 symmetrieën van de kubus dan? Welnu door de middelpunten van overstaande zijvlakken gaan viertallige rotatieassen, er zijn drie van die assen en dus zijn er in totaal negen rotaties, de identiteit doet nu even niet mee. De vier diagonalen zijn drietallige rotatieassen, wat acht rotaties oplevert. Door de middens van de overstaande ribben gaan tweetallige assen, zes in totaal en dus zes draaiingen. Er zijn nu 23 echte draaiingen en samen met de identiteit kom je op 24. Voila! En hier ligt de structuur voor de symmetrieën. Omgekeerd kun je je natuurlijk afvragen of er bij elke permutatiegroep ook een object te vinden of te construeren is dat overeenkomstige symmetrieën heeft. Met andere woorden: welk object hoort er bijvoorbeeld bij de groep met zestig elementen? – dat is de icosaëdergroep, de groep die hoort bij het twaalfvlak en het twintigvlak. Dat nu brengt ons bij het Monster, een symmetriegroep waarvan het aantal symmetrieën een getal is met 54 cijfers, dat slechts 'voor het eerst' zichtbaar is in een ruimte van 196.883 dimensies.

Symmetriegroepen, ook wel kristallografiegroepen genoemd, spelen een zeer belangrijke rol bij de classificatie en onderzoek van kristallen. Vandaar dat het Monster ook wel wordt vergeleken met een gigantische sneeuwvlok, maar dan niet in drie dimensies. Is het Monster de bouwsteen van het heelal?

fig. 2

Het boek

De lange inleiding was nodig om een klein beetje in hele grote lijnen te vertellen waar het boek van Du Sautoy inhoudelijk over gaat. Het beschrijft de zoektocht naar symmetrische objecten, waarvan het Monster de grootste is. Bij die zoektocht komen allerlei gebieden van de wiskunde in beeld. De groepentheorie bijvoorbeeld, zoals gezegd. Die groepentheorie is onder meer ontwikkeld door het zoeken naar de oplossingen van vijfdegraadsvergelijkingen. Dus wil je iets over groepentheorie vertellen, kom je vanzelf bij vergelijkingen terecht. En zo wordt maar weer duidelijk dat in de wiskunde alles met alles samenhangt. Het boek start dan ook met de Babyloniërs die tweedegraadsvergelijkingen konden oplossen op een receptmatige manier. De wiskunde zoekt verder naar algemeen geldende recepten. Het gaat dan even misschien niet meer om de praktische toepassingen, maar om de generalisaties. Du Sautoy's grote inspiratiebron daarbij is Hardy[3], een beroemde wiskundige die vooral bepleitte om wiskunde te bedrijven om de wiskunde zelf en niet vanuit een wens om praktische toepassingen te vinden. Du Sautoy nuanceert dat voor zichzelf overigens duidelijk, want volgens hem moet er wel degelijk een soort harmonisch samengaan zijn tussen wiskunde en zijn toepassingen. Daar zijn ook vele voorbeelden van, zoals we ook in dit boek met name aan het eind zien. Wat er in het boek allemaal gebeurt, is teveel om op te noemen. Vanaf de Babyloniërs wordt het oplossen van vergelijkingen besproken en komen als vanzelf Al-Kwarizmi, met zijn meetkundige interpretatie van de tweedegraadsvergelijkingen, de dichter en wiskundige Omar Khayyam met bepaalde typen van de derdegraads-, Tartaglia en Cardano met hun conflict rond de voortzetting van het oplossen van de derdegraads-, Cardano en Ferrari met de vierdegraads- en Abel en Galois met de vijfdegraadsvergelijkingen naar voren. Een mooie geschiedkundige bespreking die soms wat geromantiseerd en gedramatiseerd lijkt, maar dat is niet zo erg in een dergelijk boek. Du Sautoy heeft een sprekend, zij het wat wollig taalgebruik en dat gaat al gauw over in superlatieven. Maar niettemin een mooi overzicht, het lezen waard, omdat het leest als een roman. Natuurlijk komen moderne ontwikkelingen in de wiskunde ook aan de orde, want het boek gaat ergens heen natuurlijk. Het classificeren van groepen is een belangrijke activiteit in de negentiende en twintigste eeuw en er worden door bijvoorbeeld Sophus Lie belangrijke vorderingen gemaakt. Liegroepen zijn groepen van continue transformaties, die eindig gemaakt kunnen worden door een soort van modulorekenen, waardoor het uiteindelijk gaat om het classificeren van eindige groepen, en om het vinden van wat Du Sautoy de atomen van de symmetrie noemt. Vele symmetriegroepen zijn namelijk samen te stellen uit kleinere groepen, met als orde een priemgetal. Dat noem je een ondeelbare groep en dat zijn dus de bouwstenen van de symmetrie. Daar is men naar op zoek. Aanvankelijk had men het idee dat een groep alleen maar ondeelbaar was als het aantal symmetrieën een priemgetal was. Dat bleek met name door de inspanningen van Galois niet helemaal zo te zijn. De icosaëdergroep bijvoorbeeld heeft zestig symmetrieen, maar is wel ondeelbaar. Deelbaar betekent dat de symmetrieën van een vijftienhoek bijvoorbeeld zijn op te splitsen in rotaties van een vijfhoek en van een driehoek, een samenstel daarvan levert altijd een symmetrie van een vijftienhoek. Die is dus deelbaar. Deelbaar wil dus zeggen dat je hem uit elkaar kan leggen in andere groepen die weer een symmetriegroep zijn. Het vinden van de ondeelbare symmetriegroepen daar ging het dus om. En zo'n zoektocht naar de oplossing van een onopgelost probleem levert in korte tijd vaak heel veel mooie nieuwe wiskunde op.

Uiteindelijk kwam men tot een voorlopige conclusie dat de bouwstenen zouden moeten bestaan uit priemzijdige vormen, de alternerende groepen, dat zijn de even permutatiegroepen van Galois plus de dertien die Lie had gevonden. Alle eindige symmetriegroepen werden ondergebracht in een soort periodiek systeem, waarin de bouwstenen dus stonden. Men dacht dat men er was, maar dat was toch wat te voorbarig; stukje bij beetje werden, vooral in de zeventiger jaren, uitzonderingen gevonden, de sporadische groepen genoemd die die eigenschappen niet hadden en toch ondeelbaar waren. Er kwamen ten slotte, met de dertien van Lie en die van Mathieu, Janko en Conway en anderen, 26 waarmee nu wel alle uitzonderingen lijken te zijn gevonden. De laatste, de grootste, wordt het Monster genoemd. Bij al die 'bedachte' groepen werden ook objecten geconstrueerd waarvan het aantal symmetrieën overeenkwam met die van de onderliggende groep. Het Monster lukte in 1980, na vele pogingen waarbij je er allerlei voorwaarden aan verbindt. Aan dat succes is vooral de naam van John Conway verbonden, die uiteindelijk ook de *Atlas of Finite Groups* heeft gepubliceerd, waarin alle objecten met alle karakteristieken zijn beschreven. Het object van het Monster is een object dat pas niet triviaal in 196.883 dimensies voorkomt, wiskundig gezien niet veel anders dan drie dimensies, maar voorstelbaar is het niet meer natuurlijk. Door die zoektocht zijn er verbanden gevonden van het monster met de getaltheorie. Een vreemde overeenkomst met de coëfficiënten van de *j*-functie die McKay opviel, deed de aandacht voor het Monster weer oplaaien. Door het construeren van het object in vele dimensies, kwam men in aanraking met de snaartheorie, en vooralsnog lijkt het monster een belangrijk resultaat in de snaartheorie, die verbindingen legt tussen algemene relativiteitstheorie en de kwantumtheorie. Vandaar de naam Moonshine, een vreemde verlichting op iets waarvan de bron nog moet worden gevonden. Kun je aan het resultaat de eigenschappen van de bron terugvinden?

Inhoud

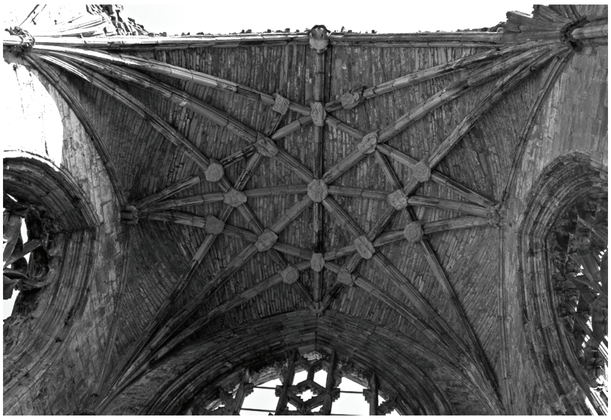
Omdat Du Sautoy alles met alles verbindt – zo is er ook een uitvoerig hoofdstuk over de symmetrie in de muziek van Bach – gaat het boek inhoudelijk niet zo diep op de symmetrie en de groepen in. Daar gaat het hem eigenlijk ook niet zozeer om. Du Sautoy is hoogleraar met als speciale opdracht het populariseren van de wiskunde. Hij is onder meer Charles Simonyi Professor for the public understanding of science. Zijn opdracht is dus om moeilijke wiskundige vorderingen toegankelijk te maken voor het publiek. Hij gaat daarbij in tegen zijn grote leermeester Hardy die dat verwerpelijk vond. Hij doet dat heel goed, zoals ook eerder in zijn boek *Music of the Primes* (2003), waarin hij heel leesbaar beschrijft hoe het vermoeden van Riemann ontstond en verder werd uitgewekt. Hij maakt de wiskunde levend, verrassend en dynamisch, en geeft vooral aan hoe ontdekkingen tot stand komen en dat het een vakgebied in beweging is. Het spreekt vanzelf dat hij daarbij met de inhoud niet tot het gaatje gaat; want een eenvoudig gebied is het niet.

Meerdere lijnen

Hij schrijft zijn boek langs meerdere lijnen. Het gaat om de wiskunde, de wiskundige en zijn activiteiten en de geschiedenis van de wiskunde. Door de opzet van zijn boek, het is opgedeeld in twaalf hoofdstukken, die de maanden van het jaar symboliseren, kan hij in elke maand zijn eigen ervaringen als wiskundige koppelen aan elementen van de zoektocht naar het monster. Hij laat daarmee zien hoe een wiskundige zijn vak uitoefent, welke inspiratiebronnen daarbij een rol spelen en hoe eigen denkkracht en overleg met collega's uiteindelijk leiden tot nieuwe vindingen. Fraai is bijvoorbeeld zijn zoektocht naar de zeventien behangpatronen in het Alhambra, samen met zijn zoontje Tomer. In het Alhambra zijn verrassend genoeg al die zeventien patronen ook te vinden, natuurlijk zonder dat de Moren die classificatie kenden. Hij laat dus ook veel zien van de anekdotes die rond wiskundigen in het algemeen spelen en komt tot de impliciete conclusie dat er rare vogels zijn onder Gods gesternte. Hij spaart zichzelf daarbij niet: "Net als de meeste wiskundigen ben ik van nature behoorlijk verlegen. Ik heb een bloedhekel aan feestjes en ben als de dood voor de telefoon". Dat soort typeringen maakt het boek soms wat karikaturaal, omdat het precies laat zien wat men in het algemeen voor vooroordelen heeft over wiskundigen, maar storend is het niet. Het geeft juist heel mooi een inzicht in de passie, de bevlogenheid en de onthechting van wiskundigen die op de toppen van hun tenen met hun wiskunde bezig zijn. Topsport is het en topsporters zijn ook weleens wat merkwaardig.

Wat vooral daarbij steeds terugkeert, is de wiskundige flits, de plotselinge wending, blikwisseling, die een nieuwe weg blootlegt; Sautoy noemt dat serendipiteit, dat volgens Van Dale betekent: 'de gave om door toevalligheden en intelligentie iets te ontdekken waar men niet naar op zoek was'. Inderdaad, daar gaat het in het boek om.

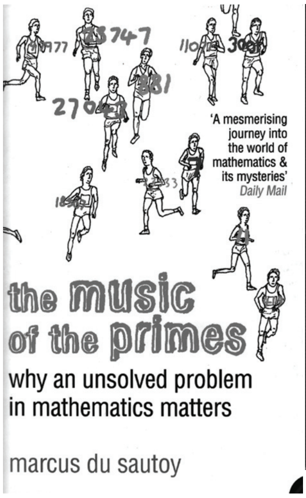
Over de geschiedenislijn heb ik het al gehad. Fascinerend beschreven hoe zo'n proces van zoeken zich in de geschiedenis van zo'n 5000 jaar ontwikkelt. Mooi beschreven, romantisch, en dan bedoel ik als een roman.

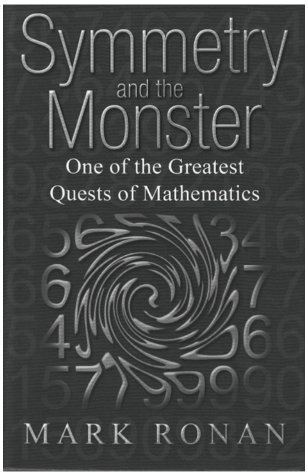


Over Du Sautoy

Waar Du Sautoy (1965) zelf mee bezig is, wordt in het boek niet zo expliciet gemaakt. Hij probeert onder meer te voorspellen hoe het aantal symmetrische objecten van bijvoorbeeld driehoeken groeit naarmate er meer driehoeken worden toegevoegd. Hij probeert een patroon te vinden in de rij getallen 1, 2, 5, 15, 67, 504, 9310,… wat de rij van aantallen objecten voorstelt bij 3^0, 3^1, 3^2, 3^3,…. symmetrieën. Door zijn werkzaamheden komt hij daar niet zoveel meer aan toe, en hij klaagt wel dat er veel afleidingen van zijn werk zijn en dat dat wellicht een van de redenen is waarom de Fieldsmedaille, de hoogste internationale wiskundeprijs, aan hem voorbij gegaan is. Hij speelt dus niet echt zelf een (hoofd)rol in de zoektocht naar het Monster, dat zich vooral in de eindfase tijdens de jaren tachtig afspeelde, toen Du Sautoy nog geen twintig was, maar wel in de nasleep ervan. Hij is gespecialiseerd in de zeta-functie die weer onvermoede verbanden heeft met de getaltheorie en het tellen van priemgetallen bijvoorbeeld. Het is soms wat verwarrend in het boek, omdat het voortdurend lijkt alsof hij deelgenoot is van het hele proces, maar dat kan bijna niet. In de vakantie las ik een boek van Mark Ronan uit 2006, dat vrijwel identiek is als het gaat om het wiskundig onderwerp. Ronan is ouder, hij is emeritus en heeft de tijd van Conway, de grote man achter het Monster en bijvoorbeeld ook de uitvinder van het patroonspel 'game of life' dat in de zeventiger jaren immens populair was onder wiskundestudenten (weet ik nog) van nabij meegemaakt. Het boek van Ronan over het Monster is ook prachtig en wordt ook door Conway zelf uitstekend genoemd. Het is helder geschreven, maar blijft wel veel dichter bij de wiskunde van het Monster, de symmetriegroepen en de wiskundige zoektocht, dan het boek van Du Sautoy. Daardoor is het wiskundiger van aard en lastiger te volgen. Du Sautoy ontmoette Conway pas in 1985 toen hij bijna al in Princeton zat en toen de *Atlas of Finite Groups* net van de persen rolde.

Merkwaardig is overigens dat Du Sautoy het boek van Ronan nergens noemt, niet in de noten en niet in de literatuurlijst. Overigens noemt ook Ronan Du Sautoy nergens. Ronan bespreekt het boek van Du Sautoy wel redelijk positief in *Nature* in februari 2008, maar wijst hem dan ook wel even fijntjes op enkele foutjes. Zijn ze elkaar ooit tegengekomen?





Nederlandse vertaling

Het is een goede, zij het wat letterlijke, vertaling, waardoor soms wat stugge zinnen ontstaan, maar over het algemeen leest het zeer gemakkelijk. Knap is dat er weinig fouten in staan. Al wordt 'polygons' nog een keer vertaald met 'veelvlakken', en wordt 'herkend' enkele malen als 'herkent' geschreven. Wel krijg ik altijd lichtelijk kippenvel als ik lees over 'irrationele getallen' zoals een paar keer in het boek gebeurt. Maar misschien moet ik daar nu maar aan wennen. Vooruit, daar is mee te leven.

Conclusie

Het boek van Du Sautoy is een prachtig, speels boek. Een verademing om een dergelijk boek te lezen. Het gaat over wiskunde, geschiedenis en wiskundige passie en inspiratie. Die boeken zijn er natuurlijk wel, maar vertalingen zijn schaars en zo blijven we nogal eens verstoken van mooie boeken. Het verspreidingsgebied is natuurlijk klein en het getuigt van moed van een uitgeverij om zo'n boek te vertalen en uit te geven in Nederland. We kunnen er alleen maar blij mee zijn.

Knap is dat Du Sautoy zo'n moeilijk onderwerp zo naar voren kan brengen, deels door het concreet te maken, deels door de details te vermijden, maar wel de essentiële ontdekkingen als gebeurtenis te beschrijven. Het is inspirerend en goed te lezen met een redelijke wiskunde B-achtergrond. Hij zegt zelf dat moeilijke stukken kunnen worden overgeslagen, het verhaal gaat enkele bladzijden later wel weer verder.

Al met al hulde! Een aanwinst voor de leestafel, of om van te genieten onder een boom aan een zonovergoten Loch Ness, in de hoop beide monsters te zullen zien. Jammer dat dat niet gelukt is. Maar één is ook mooi!

Hans Krabbendam,
Fontys Lerarenopleiding Tilburg

Literatuur

Du Sautoy, M. (2009). *Het Symmetriemonster, een wiskundige op zoek naar het geheim van een van de belangrijkste natuurverschijnselen.* Amsterdam: Uitgeverij Nieuwerzijds.

Du Sautoy, M. (2008). *Finding Moonshine, A mathematician's Journey through Symmetry.* London: Harper Collins Publishers.

Ronan, M. (2006). *Symmetry and The Monster, One of the Greatest Quests of Mathematics.* Oxford: Oxford University Press.

Weyl, H. (1952, renewed 1980). *Symmetry*, Princeton: Princeton University Press.

Lauwerier, H. (1988). *Symmetrie, Regelmatige structuren in de kunst.* Amsterdam: Aramith Uitgevers.

Du Sautoy, M. (2003). *The Music of the Primes, Why un unsolved Problem in Mathematics matters.* London: Harper Perennial.

Websites

http://www.math.uic.edu/~ronan/symmetry
http://people.maths.ox.ac.uk/~dusautoy/=

Noten

[1] http://staff.science.uva.nl/~craats/determinatieschemas.pdf
[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group
[3] Zie G. H. Hardy, A Mathematician's Apology, Cambridge University Press (1940).

De foto's in dit artikel, gemaakt door Hans Krabbendam zelf, zijn voorbeelden van symmetrieën die hij tegenkwam in Schotland.