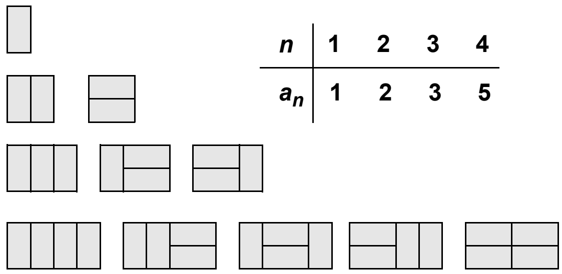
Wat te bewijzen is (45)

Rubriek

Combinatorische telproblemen zijn vaak onderhoudend. Een voor menig lezer misschien bekend, maar daardoor niet minder aardig probleem, is het volgende. Hoeveel verschillende 'straatjes' van 2 bij n dm (n = 1, 2, 3, 4, ...) kunnen met straatstenen van 1 bij 2 dm worden gelegd? Ik noem het gevraagde aantal a_n en kom door systematisch neerleggen tot het volgende begin:



n	1	2	3	4
a_n	1	2	3	5

Voor n = 5 zijn er acht straatjes te leggen, voor n = 6 zijn dat er dertien, voor n = 7 eenentwintig, enzovoort.
Dat smaakt naar Fibonacci en vraagt om een redenering. Neem het geval n = 5:

– als het patroon links begint met een verticaal gelegde steen, zijn er voor het vervolg nog a_4 (= 5) mogelijkheden;
– bij een begin met twee horizontale stenen zijn er voor het vervolg nog a_3 (= 3) mogelijkheden;
– conclusie: $a_5 = a_3 + a_4 = 8$

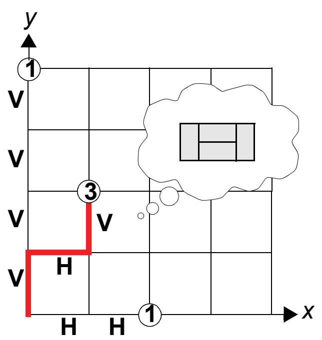
Voor n = 6 vind ik volgens dezelfde gedachtegang $a_6 = a_4 + a_5 = 5 + 8 = 13$. En zo verder.

Dit staaltje van inductief rekenen laat zich vertalen in één (recursie)formule. Omdat elk straatje links met óf een verticale steen, óf met twee horizontale stenen begint, geldt inderdaad:

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \text{ voor } n = 3, 4, 5, \ldots$$

Zo is Fibonacci dan gelegitimeerd!

Met een code naar het stadsplan



Een andere telstrategie is om de straatjes binair te coderen, bijvoorbeeld met de letters V en H (respectievelijk voor één verticale steen en een horizontaal koppel).
Zo worden de straatjes met lengte 4 gecodeerd door

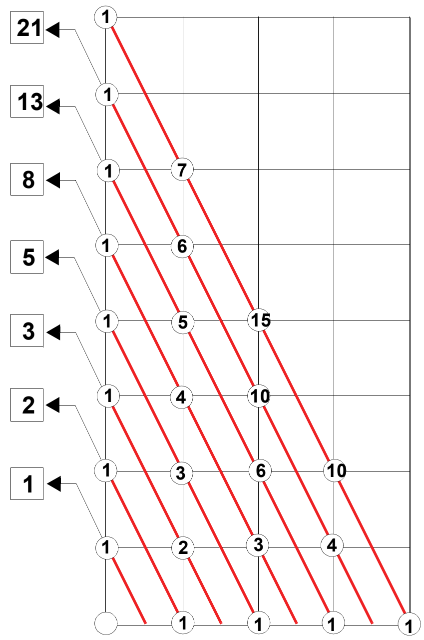
VVVV, VVH, VHV, HVV, HH.

Elke V,H code (dus elk straatje) correspondeert eenduidig met een kortste route in het 'stadsplan van Manhattan' (zie voorgaande figuur).
Elk kruispunt in dat stadsplan heeft twee natuurlijke coördinaten. Het aantal kortste 'Manhattan-routes' naar het punt (x, y) noteer ik hier als $M(x, y)$. Het voorlaatste punt van zo'n route is óf $(x - 1, y)$ óf $(x, y - 1)$, en dus geldt de recursieve betrekking:

$$M(x, y) = M(x - 1, y) + M(x, y - 1).$$

Omdat $M(0, 1) = M(1, 0) = 1$ omtstaat, na notering van de aantallen bij de kruispunten, de driehoek van Pascal.
Het totale aantal straatjes met lengte n wordt dan gevonden door optellen van de getallen uit die driehoek die op de lijn $2x + y = n$ liggen (n = 1, 2, 3. ...)..
Bijvoorbeeld het geval n = 4:

$$a_4 = M(0, 4) + M(1, 2) + M(2,0) = 1 + 3 + 1 = 5$$



Enige andere gevallen zijn af te lezen in bovenstaand plaatje: de rij van Fibonacci figureert aldus in de driehoek van Pascal! Kort en goed:

$$a_n = \sum_{2x+y=n} M(x, y)$$

Of met gebruik van kennis over binomiaalcoëfficiënten:

$$a_n = \sum_{2x+y=n} \frac{(x+y)!}{x!\,y!}$$

Formele machtreeksen

Een nog andere aanpak verloopt via zogenaamde *formele machtreeksen*. Een formele machtreeks is niets meer en niets minder dan een handige representatie van een rij reële getallen. De rij $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ wordt genoteerd als:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$$

Als vanaf een zeker rangnummer alle termen van de rij nul zijn, kan de rij worden voorgesteld door een eindig polynoom in x. Zo wordt de rij 1, −1, −1, 0 , 0 , 0 , 0, ... gerepresenteerd door de vorm $1 - x - x^2$.
Een voordeel van de machtreeksnotatie is dat de gebruikelijke vermenigvulding van rijen vertrouwd oogt.
Het product van twee rijen, zeg $A = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ en $B = (b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots)$ wordt namelijk geconstrueerd via:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots) \times (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots) =$$
$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots$$

Vervolgens kan bij een rij A zijn omgekeerde A^{-1} worden gedefinieerd als de rij die vermengvuldigd met a de rij 1 (dat wil zeggen de rij 1, 0, 0, 0, ...) oplevert.
Zo leidt bijvoorbeeld

$$(1 - x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots) = 1$$

tot $a_0 = 1$, $a_1 - a_0 = 0$, $a_2 - a_1 = 0$, $a_3 - a_2 = 0$, ...
kortom:

$$(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Dit leerden we vroeger in klas 4 van de HBS, maar dan moest er de convergentievoorwaarde $-1 < x < 1$ bij gedacht worden. Bij het werken met formele machtreeksen speelt convergentie geen enkele rol: het is puur een formeel opereren met (oneindige) rijen.
De rij van Fibonacci nu blijkt een eenvoudige polynoomvoorstelling te hebben, te weten $(1 - x - x^2)^{-1}$.
Immers uit

$$(1 - x - x^2)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots) = 1$$

volgt om te beginnen $a_0 = 1$ en via $a_1 - a_0 = 0$ ook $a_1 = 1$
Verder is voor $n > 1$ de coëfficiënt van x^n enerzijds gelijk aan $a_n - a_{n-1} - a_{n-2}$ en anderzijds gelijk aan nul, waaruit dan volgt $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$.

Een belangrijke algebraïsche activiteit, die helaas op school (te) weinig wordt bedreven, is wat Freudenthal ooit betitelde als *formele substitutie*. Bij vervanging van iedere x in een formele machtreeks door een (al of niet eindige) machtreeks, ontstaat een nieuwe machtreeks.
Substitutie van $x + x^2$ voor x in

$$(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

levert op:

$$(1 - x - x^2)^{-1} = 1 + (x + x^2) + (x + x^2)^2 + (x + x^2)^3 + \ldots$$

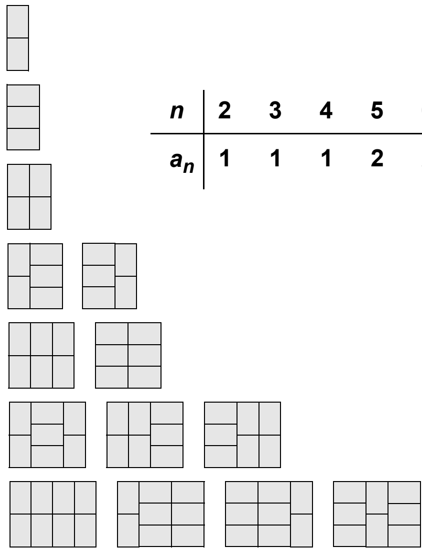
Het rechterlid laat zich verder uitwerken met behulp van de driehoek van Pascal.

$$\begin{array}{rcl}
1 & \longleftarrow & 1 \\
x & \longleftarrow & x + x^2 \\
2x^2 & \longleftarrow & x^2 + 2x^3 + x^4 \\
3x^3 & \longleftarrow & x^3 + 3x^4 + 3x^5 + x^6 \\
5x^4 & \longleftarrow & x^4 + 4x^5 + 6x^6 + 4x^7 + x^8 \\
8x^5 & \longleftarrow & x^5 + 5x^6 + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \\
13x^6 & \longleftarrow & x^6 + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots
\end{array}$$

Nu is opnieuw te zien hoe een familie diagonalen in de Pascaldriehoek de rij van Fibonacci genereert en hoe de coëfficiënt a_n van x^n in wordt opgebouwd uit de aantallen verschillende typen *H-V*-rijtjes.

Andere straatstenen

Als variant van het straatjesprobleem neem ik nu stenen met andere afmetingen, bijvoorbeeld van 2 bij 3 dm. Daarmee kunnen straatjes van 6 bij n dm (n = 2, 3, 4, ...) worden gelegd.



n	2	3	4	5	6	7	8
a_n	1	1	1	2	2	3	4

Het aantal straatjes met gegeven lengte kan weer langs de weg van inductie worden gevonden. Een patroon met lengte n begint óf met twee verticaal gelegde stenen (lengte 2) of met drie horizontaal gelegde stenen (lengte 3) en dat leidt tot de recursieformule

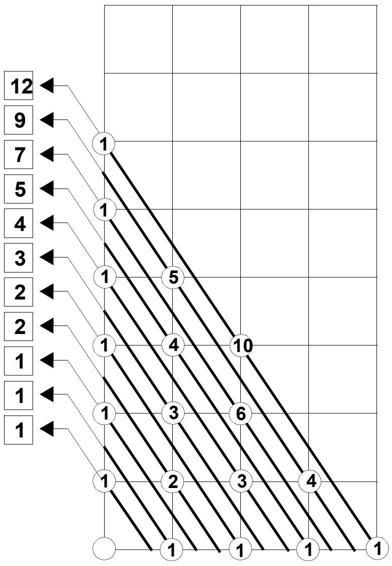
$$a_n = a_{n-3} + a_{n-2} \quad \text{voor } n = 4, 5, 6, \ldots$$

De rij a-waarden uit bovenstaand plaatje kan via deze formule vlot worden uitgebreid:

1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, **5, 7, 9, 12, 16, ...**

Het zal de lezer niet verbazen dat ook hierbij de twee andere werkwijzen (stratenplan en formele machtreeksen) met vrucht kunnen worden toegepast.

Bij de Manhattan-aanpak moet nu worden gelet op de kruispunten op de lijnen $3x + 2y = n$ met n = 2, 3, 4, ...



De formele machtreeks bij de rij 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, ... laat zich schrijven als:

$$(1 - x^2 - x^3)^{-1}$$

ofwel

$$1 + (x^2 + x^3) + (x^2 + x^3)^2 + (x^2 + x^3)^3 + \dots$$

en dat levert het driehoekige schema

$$\begin{array}{c}
1 \\
x^2 + x^3 \\
x^4 + 2x^5 + x^6 \\
x^6 + 3x^7 + 3x^8 + x^9 \\
x^8 + 4x^9 + 6x^{10} + 4x^{11} + x^{12} \\
x^{10} + 5x^{11} + 10x^{12} + \dots + \dots + \dots \\
x^{12} + 6x^{13} + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots
\end{array}$$

Daaruit kan bijvoorbeeld worden afgelezen dat de coëfficiënt van x^{11} in de machtreeks gelijk is aan 4 + 5 = 9, zodat er ngen verschillende straatjes met lengte 11 kunnen wordn gelegd.

Generalisatie

Wiskunde zou geen wiskunde zijn als er niet kon worden gegeneraliseerd. Daarom veronderstel ik dat k en m onderling ondeelbaar zijn en dat de breedte van de straatjes gelijk is aan hun kleinste gemene veelvoud, dus aan km. Gelet op het voorgaande, kan ik vermoeden dat:

$$a_n = \sum_{kx + my = n} \frac{(x + y)!}{x!y!}$$

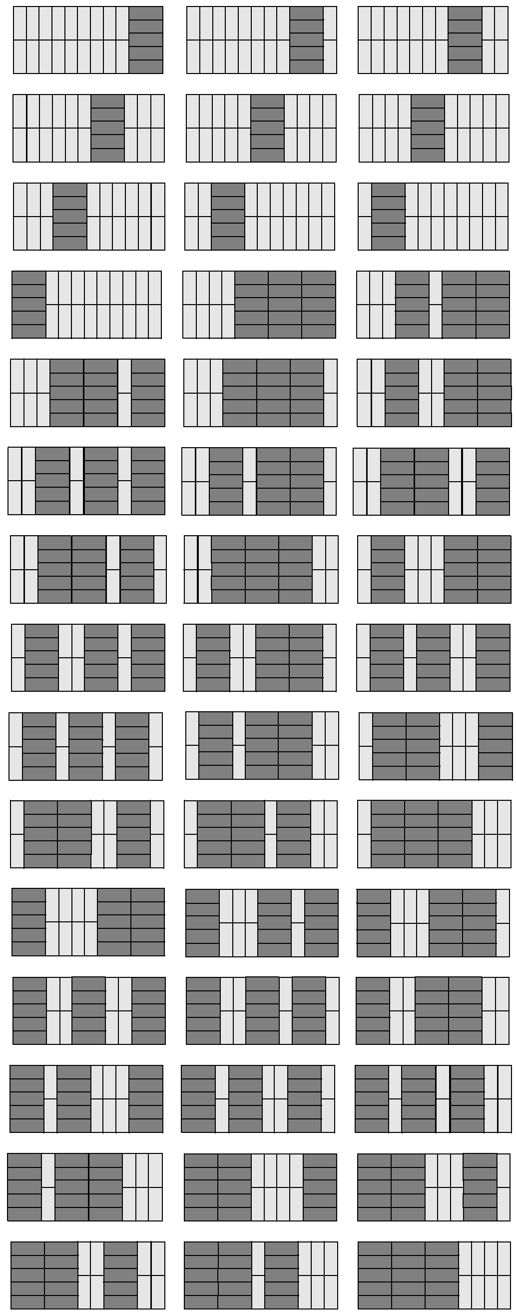
en dat de formele machtreeks die deze aantallen a_n genereert, gelijk is aan: $(1 - x^k - x^m)^{-1}$ ofwel

$$1 + (x^k + x^m) + (x^k + x^m)^2 + (x^k + x^m)^3 + \dots$$

Het bewijs van dit alles verloopt via de recursie:

$$a_n = a_{n-k} + a_{n-m} \quad \text{voor } n \geq \max(k,m).$$

Ter illustratie: het aantal straatjes van 10 bij 23 dm dat met tegels van 2 bij 5 dm kan worden gelegd is (niet toevallig) gelijk aan het nummer van deze rubriek.



Ter verificatie: de lijn $2x + 5y = 23$ bevat uitgerekend twee roosterpunten met niet-negatieve coördinaten, te weten (9, 1) en (4, 3) en

$$\binom{10}{1} + \binom{7}{4} = 10 + 35 = 45$$

En dat de coëfficiënt van x^{23} in de ontwikkeling van

$$1 + (x^2 + x^5) + (x^2 + x^5)^2 + (x^2 + x^5)^3 + \dots$$

gelijk is aan 45, kan desgewenst met computeralgebra worden gecontroleerd.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl