Een brandende vraag, de komende zonnige weken, voor die survivallers die toevallig geen kompas bij zich hebben. **Piet Lemmens** wijst deze hard aan vakantie toe zijnde lezers de weg.

Is een horizontale zonnewijzer bruikbaar als kompas?

Inleiding

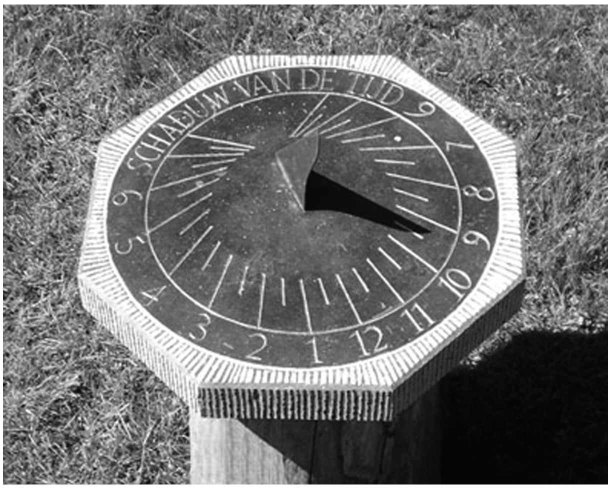

fig. 1 horizontale zonnewijzer (foto afkomstig van nl.wikipedia.org en gebruikt onder de Creative Commons License)

In de film *Adaptation* (2002) komt een scène voor waarin twee mensen bij een zoektocht naar orchideeën in de bush verdwalen. Een van hen stelt voor om een stok rechtop in de grond te plaatsen en na een paar minuten te kijken hoe de schaduw van die stok beweegt. Er wordt geen uitleg bij gegeven. Hij zegt letterlijk:

> I set this [de stok] up, we wait a few minutes and we will be able to tell which way the sun is moving. We should be heading south east.

Wat zou hier de redenering zijn? In dit artikel willen we nagaan hoe de richting naar het zuiden bepaald kan worden uit dit experiment.

Eerst maken we een aantal opmerkingen.

1. Als we tijd genoeg hebben, kunnen we 's ochtends de richting bepalen waarin de zon opkomt, en 's avonds die waarin de zon ondergaat. Halverwege daartussen hebben we dan de noord-zuid of zuid-noord richting tamelijk nauwkeurig te pakken, er mee rekening houdend dat opkomst en ondergang min of meer in oostelijke respectievelijk westelijke richting plaatsvinden.
2. Rond 21 maart en rond 22 september lijkt de zon zich ten opzichte van de aarde te bewegen in het equatorvlak, en de schaduw van de punt T van de stok beweegt zich langs de snijkromme van het naar T verschoven equatorvlak met het aardoppervlak. Dat komt omdat we voor praktische doeleinden aannemen dat de zon oneindig ver weg staat en de richting naar de zon onafhankelijk is van de plaats op aarde. Overigens is er nog een niet onaanzienlijke storing door breking van het licht in de atmosfeer, maar het effect daarvan zullen we niet meenemen.
   We nemen (ook in de rest van dit artikel) aan dat dit aardoppervlak ter plaatse het platte raakvlak is aan een bolvormige aarde. De snijkromme is dus een rechte lijn die exact de richting west-oost heeft, onafhankelijk van de positie van de zon aan de hemel.
   Brengen we een merkteken aan op de positie X van de schaduw van T, en doen we dat een paar minuten (Δt) later weer, nu op de positie X', dan wijst de vector XX' precies naar het oosten.
   Op andere datums is de schaduwkromme geen rechte lijn, maar een kegelsnede, zoals we verderop zullen zien.
3. Om 12.00 uur plaatselijke zonnetijd heeft de schaduw van de stok de kortste lengte, en ook dan wijst de vector XX' naar het oosten. Dit geldt voor elke datum.
   In het algemeen zal XX' om 12.00 uur niet *precies* naar het oosten wijzen. Hiervoor is nodig dat XX' evenwijdig is aan de raaklijn aan de schaduwkromme van T, in het punt waar de schaduw van T zich bevindt om 12.00 uur. Voor kleine Δt zal de afwijking echter praktisch verwaarloosbaar zijn. Theoretisch is het beter om de merktekens X en X' symmetrisch rond 12.00 uur aan te brengen: X iets vroeger dan 12.00 uur en X' evenveel later dan 12.00 uur.

Men zou kunnen denken dat de zon om 12.00 uur precies in het zuiden staat, maar dat is toch sterk afhankelijk van plaats en datum: de zon kan om 12.00 uur ook best in het noorden staan of in het zenit!

Er valt trouwens wat betreft plaatsafhankelijkheid ook nog wel het nodige af te dingen op opmerkingen (1) en (2). Denk maar eens aan de situatie in de buurt van de polen!

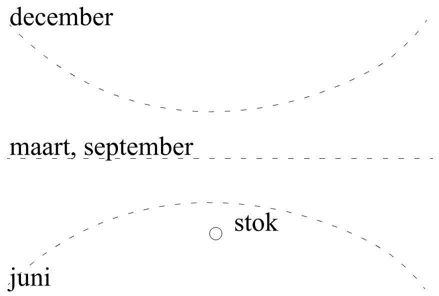

fig. 2 schaduwkrommen op 52° noorderbreedte

In het voorgaande hebben we aangegeven wanneer en hoe de horizontale zonnewijzer zeer goed bruikbaar is als kompas, zonder extra redeneringen. Nu willen we nagaan hoe we te werk kunnen gaan als de merktekens worden geplaatst op andere tijdstippen: niet speciaal rond 21 maart of 22 september of het middaguur.

Theoretische beschouwing

In het algemeen zal de richting naar de zon een hoek δ (de declinatiehoek) maken met het equatorvlak, variërend tussen -23,5° en 23,5°.

Zoals eerder nemen we aan dat de zon oneindig ver weg staat, en houden we geen rekening met de breking van het licht in de atmosfeer. Bovendien zullen we δ binnen het tijdsbestek van een dag constant veronderstellen.

De richtingen vanuit *T* naar de zon zijn dus die van de beschrijvenden van een omwentelingskegel met halve tophoek $90° - |\delta|$ graden. De as *a* van deze kegel is evenwijdig aan de draaias van de aarde, die door de polen gaat. We hebben dus ons doel bereikt als we *a* en daarop de richting naar het zuiden kunnen vinden. De schaduw van *T* beweegt zich langs de snijkromme van de 'achterkant' van de kegel vanuit *T* met het aardoppervlak. Zie appendix 1 voor de mogelijke vormen van de schaduwkromme.

Eerst bepalen we de as *a*. Dit zullen we doen door zijn snijpunt *A* met het aardoppervlak te bepalen.

Door het aanbrengen van twee merktekens *X* en *X'* zoals eerder beschreven, leggen we twee beschrijvenden vast, de ene door *T* en *X* en de andere door *T* en *X'* gaande. Omdat het een omwentelingskegel betreft, ligt *a* in het bissectricevlak *V* van de door deze twee beschrijvenden bepaalde halflijnen vanuit *T* door *X*, en door *X'*. De driehoek *XTX'* wordt door vlak *V* gesneden volgens de deellijn vanuit *T*. Vlak *V* bevat dus deze deellijn en de loodlijn in *T* op vlak *XTX'* en ligt daardoor vast. Bovendien ligt *A* op de snijlijn *s* van vlak *V* met het aardoppervlak. Hierdoor ligt *A* echter nog niet vast, maar als we nog twee merktekens plaatsen en daarvoor dezelfde procedure uitvoeren, krijgen we een andere snijlijn *s'*, en is *A* eenduidig bepaald als snijpunt van *s* met *s'*.

Uitvoering van het experiment

In theorie is het vinden van de as *a* nu opgelost, maar de hamvraag is hoe we de snijlijn *s praktisch* kunnen bepalen. Een cruciale randvoorwaarde daarbij is dat de top *T* van de stok strikt op een en dezelfde plaats moet blijven. De snijlijn *s* gaat door het snijpunt *S* van de bissectrice vanuit *T* met lijnstuk *XX'*, en uit de vlakke meetkunde weten we dat $|SX| : |SX'| = |TX| : |TX'|$, maar dat is niet goed bruikbaar wegens de genoemde randvoorwaarde (bovendien: wie heeft een centimeter op zak?). Daarom kiezen we ervoor om *X* en *X'* zo dicht mogelijk bij elkaar te nemen, zonder de controle over de lijn door *X* en *X'* te verliezen. Dat wil dus zeggen dat Δt klein is, zeg 5 minuten of zo mogelijk minder. Dan kunnen we voor *V* praktisch het vlak nemen dat wordt bepaald door de lijn *TX* en de loodlijn in *T* op vlak *XTX'*. We handelen dan alsof vlak *XTX'* het raakvlak aan de kegel is, bepaald door de beschrijvende *TX*. Zie figuur 3.

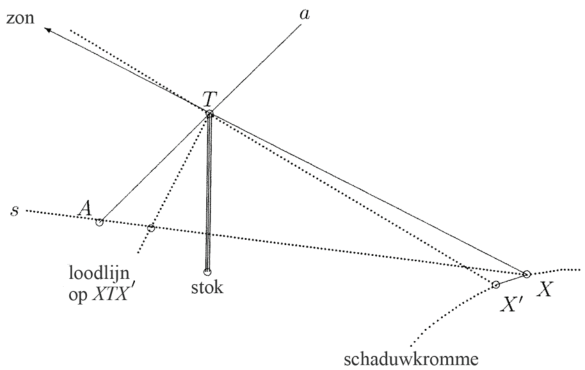

fig. 3 situatieschets

Vervolgens concentreren we ons op het bepalen van de snijlijn *s* van vlak *V* met het aardoppervlak. Door de keuze van vlak *V* weten we al dat *s* door merkteken *X* gaat.
Als we ons oog zo positioneren dat we *T* en *X* op elkaar zien vallen, zien we de twee vlakken *XTX'* en *V* als twee lijnen die loodrecht op elkaar schijnen te staan, immers ons oog bevindt zich dan op de snijlijn van die twee onderling loodrechte vlakken.
In het bijzonder schijnen de lijnen *XX'* en *s* vanuit een dergelijk oogpunt loodrecht op elkaar te staan in *X*. Bij een experiment heb ik gemerkt hoe moeilijk het is om zonder extra hulpmiddelen op het aardoppervlak een lijn *s* door *X* te bepalen die vanuit de zojuist besproken positie van het oog loodrecht op *XX'* wordt gezien. Onze hersenen 'corrigeren' voor de omgeving waarin de twee lijnen

lopen. Wanneer we door een klein gaatje tussen duim en wijsvinger over T naar X kijken, wordt het verband met de omgeving verbroken en gaat het al veel beter.

Een goed hulpmiddel is bijvoorbeeld een boek of iets dergelijks, zodat we twee echt haaks op elkaar staande lijnstukken HI en HJ hebben. Houden we het boek zo tussen het oog en T dat we, loodrecht op vlak IHJ kijkend, H en T en X zien samenvallen en HI langs XX' zien, dan zullen we HJ langs s moeten zien. Teken s dus zo dat hieraan voldaan is.

Deze methode werkt redelijk nauwkeurig, omdat het loodrecht kijken op vlak IHJ niet akelig precies hoeft te zijn: de maximale afwijking β van 90^o van de hoek die we zien tussen HI en HJ is van de tweede orde in de kleine hoek α die de kijkrichting eventueel maakt met de normaal op vlak IHJ, en voor $\alpha = 10^o$ is β kleiner dan 1^o. Zie appendix 2 voor de afleiding van een betrekking tussen α en β.

Omdat A niet afhangt van het tijdstip van de waarneming, kunnen we enige tijd later nog eens twee merktekens plaatsen en daarvoor snijlijn s' bepalen. A is dan het snijpunt van s en s'.

Wat nog resteert, is te bepalen welke de richting langs a naar het zuiden is. Hiervoor merken we op dat de draaiing van de zon om de aardas een rechtshandige kurkentrekker van noord naar zuid doet gaan.

In de praktijk zal de bovenbeschreven methode alleen een betrouwbaar resultaat opleveren als er ruim tijdsverschil is tussen het plaatsen van het eerste stel en het tweede stel merktekens, zodat s en s' niet te dicht bij elkaar liggen. Bij bovengenoemd experiment kreeg ik in De Bilt al een goed resultaat bij $\Delta t = 5$ minuten en een tijdsverschil van 30 minuten tussen de twee waarnemingen.

Aanvullende opmerkingen

We hebben het steeds gehad over de schaduw die valt op het aardoppervlak, maar dat is bij bovenstaande methode niet essentieel. Belangrijk is slechts dat de schaduw van T valt op een plat vlak (dat niet door T gaat).

Er is ook een aantal methoden te bedenken waarbij men genoeg heeft aan het plaatsen van één stel merktekens, maar dan dient men iets te weten over de plaats waar men zich bevindt en over de hoek die de richting naar de zon maakt met de aardas. Zo'n situatie doet zich bijvoorbeeld voor in de buurt van de evenaar. Daar is de as a praktisch evenwijdig aan het aardoppervlak en zal dus vrijwel evenwijdig zijn aan de ene snijlijn s.

In alle gevallen komen de methoden neer op het bepalen van vlak V en het verloop van a daarin.

Appendix 1: de vorm van de schaduwkromme

De schaduwkromme van de punt T van de stok is, zoals reeds opgemerkt, de doorsnijding met het aardoppervlak van een omwentelingskegel met halve tophoek $90° - |\delta|$ graden, rond een as die evenwijdig is aan de draaias van de aarde. De schaduwkromme is dus een kegelsnede waarvan de vorm afhangt van de geografische breedte θ en de declinatiehoek δ. Als $\delta = 0$ is het woord 'kegel' minder toepasselijk, want dan liggen de richtingen naar de zon in een vlak en is de snijkromme een rechte lijn. Opdat de zon boven de horizon kan komen, is $|\delta - \theta| < 90^o$ vereist.

Voor de vorm van de schaduwkromme krijgen we:

een hyperbool	als $|\delta + \theta| < 90^o$ en $\delta \neq 0$ en $|\delta - \theta| < 90^o$,
een rechte lijn	als $\delta = 0$ en $|\theta| < 90^o$,
een parabool	als $|\delta + \theta| = 90^o$ en $|\theta| < 90^o$,
een ellips	als $|\delta + \theta| > 90^o$ en $|\theta| < 90^o$,
een cirkel	als $\delta > 0$ en $\theta = 90^o$, of $\delta < 0$ en $\theta = -90^o$.

Merk op dat parabool, ellips en cirkel alleen kunnen optreden binnen de poolcirkels ($|\theta| \geq 66,5^o$). Zie figuur 2 voor een breedte van 52^o.

Appendix 2: de hoek die men ziet tussen haakse lijnen

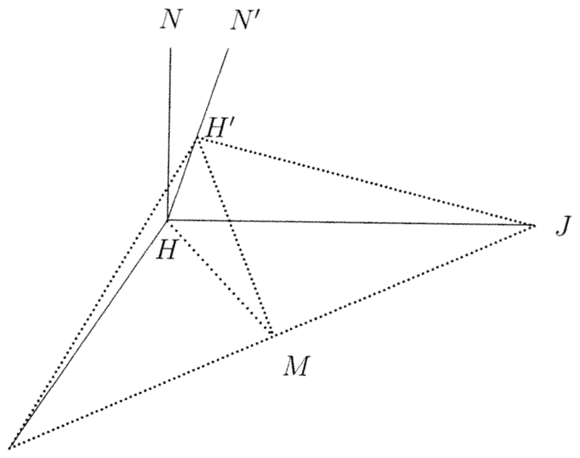

fig. 4 hoek tussen haakse lijnen

Welke hoek $90 + \beta$ ziet men tussen de vectoren (1,0,0) en (0,1,0), kijkend naar de oorsprong in de richting van $(\cos(\varphi)\sin(\alpha), \sin(\varphi)\sin(\alpha), \cos(\alpha))$ met $0 \leq \alpha < 90^o$? Met enige lineaire algebra en goniometrische formules vond ik de betrekking

$$\tan(\beta) = \tfrac{1}{2}\sin(2\varphi)\tan(\alpha)\sin(\alpha) \text{ waarin } -90^o < \beta < 90^o.$$

Graag laat ik deze formule als opgave voor de lezer, want de volgende redenering vind ik veel aardiger.

Zie figuur 4. We nemen $|HI| = |HJ|$, $\angle IHJ = 90^{o}$ en HN is de normaal op vlak IHJ. Kijkend langs deze normaal zien we HI en HJ loodrecht op elkaar staan. De maximale afwijking β_{max} van 90^{o} waaronder we $\angle IHJ$ zien als we naar H kijken langs HN' onder een hoek α met HN, treedt op als HN' in het bissectricevlak van HI en HJ ligt. Dan snijdt vlak NHN' het lijnstuk IJ loodrecht in het midden M.

De loodrechte projecties van I en J op HN' vallen daarop samen in H'. Langs HN' zien we de hoek tussen HI en HJ als $\angle IH'J$. Dus hebben we:

$$\angle IH'J = 2 \cdot \angle MH'J = 90 + \beta_{max},$$
$$\angle HMH' = \angle NHN' = \alpha,$$
$$\angle HH'M = \angle H'MJ = 90^{o},$$
$$|MH| = |MJ|,$$

en aldus krijgen we de fraaie betrekking

$$\frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{|MH|}{|MH'|} = \frac{|MJ|}{|MH'|} = \tan\left(45 + \frac{\beta_{max}}{2}\right)$$

Hieruit produceert het rekenmachientje dat β_{max} nog net geen $0{,}88^{o}$ is bij $\alpha = 10^{o}$.

Tenslotte wil ik mijn dank uitspreken aan H. Keers. Zijn opmerkingen hebben geleid tot bovenstaande tekst, aanzienlijk beter leesbaar dan mijn oorspronkelijke werk.

Piet Lemmens
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht