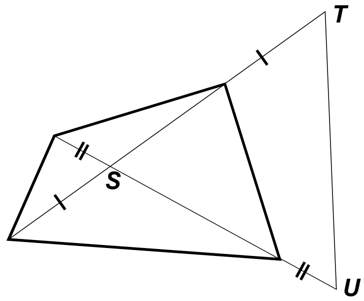
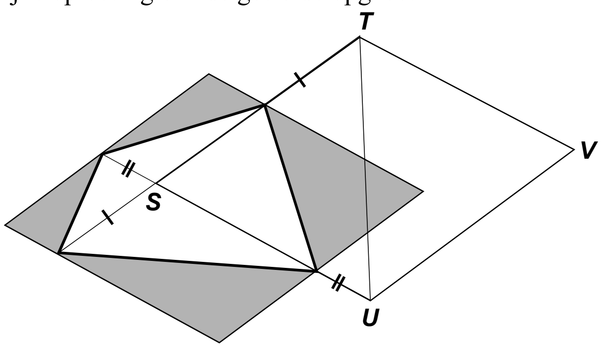
Wat te bewijzen is (44)

Rubriek

Bij het scheiden van de NVvW-jaarmarkt/studiedag in 2008 gaf de immer bevlogen Ton Lecluse mij zijn visitekaartje mee met op de achterkant een sommetje voor onderweg.

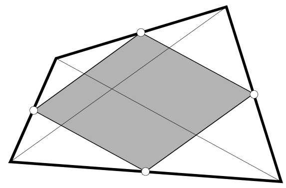


Opdracht: *bewijs dat de vierhoek* (in de figuur vet omlijnd) *dezelfde oppervlakte heeft als de driehoek STU* (de letters heb ik voor het gemak toegevoegd).
Zittend in de trein naar huis herinnerde ik me al gauw dat de oppervlakte van een vierhoek gelijk is aan het halve product van zijn diagonalen maal de sinus van de door die diagonalen ingesloten hoek en dan is het verder een eitje. Die formule kan eenvoudig worden begrepen door een parallellogram om de vierhoek te beschrijven, waarbij de zijden parallel zijn met de diagonalen van de vierhoek. Dat leidt dan meteen tot een even fraaie als aanschouwelijke oplossing van de gestelde opgave!



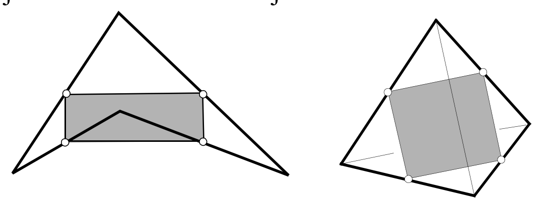
Het parallellogram *STVU* is congruent met het parallellogram om de gegeven vierhoek. Zowel de driehoek *STU* als die gegeven vierhoek zijn in oppervlakte juist de helft van dit parallellogram. Klaar.

Parallellogrammen bij een vierhoek
Op diezelfde studiedag passeerde in de mooie slotlezing van Michel Roelens (over bewijzen en redeneren in de onderbouw) het zogeheten parallellogram van Varignon. Teken een willekeurige vierhoek en verbind de middens van de naburige zijden en er ontstaat onherroepelijk een parallellogram. Dit is wat je noemt een schoolvoorbeeld van een situatie waarbij leerlingen worden uitgedaagd tot het geven van een bewijs. Vroeger liet ik mijn brugklassers elk op een los vel hun eigen vierhoek (met bijbehorende 'middenvierhoek') tekenen om daarna alle figuren in te zamelen en aan de muur te prikken. De hypothese dat de middenvierhoek steeds een parallellogram is, werd dan al gauw door de klas gemaakt en de daaropvolgende discussie over het waarom, ontstond bijna spontaan. Zonder dat ik al te veel hoefde voor te zeggen, rees dan het idee dat de diagonalen van de oorspronkelijke vierhoek richtingbepalend zijn voor de zijden van het parallellogram en dan was het verder een kwestie van het inzetten van de stelling van de middenparallel die toen nog tot het vaste repertoire behoorde.



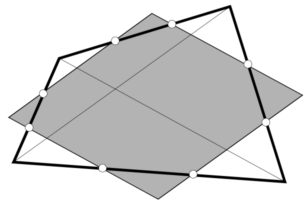
parallellogram van Varignon

Een natuurlijk vervolg is om te onderzoeken bij welke vierhoeken het Varignon-parallellogram een rechthoek dan wel een ruit is. Als ik nu leraar was, zou ik in zo'n les Cabri of Geocadabra willen gebruiken, en als ik dan ook nog over een 'smartboard' kon beschikken ...
Merk op dat het Varignon-parallellogram ook optreedt bij niet-convexe en zelfs bij niet-vlakke vierhoeken.



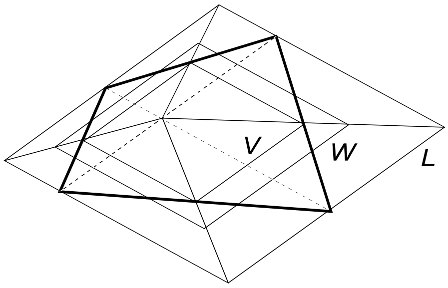
Vergelijking van het Varignon-parallellogram met het om de vierhoek beschreven parallellogram waarvan de zijden evenwijdig met de diagonalen zijn (ik noem dat hier voor het gemak het Lecluse-parallellogram) leert dat de oppervlakte van het eerste juist $\frac{1}{4}$ van het laatste is.
Gevolg: de oppervlakte van het Varignon-parallellogram is juist de helft van de oppervlakte van de vierhoek.

Minder bekend is het parallellogram van Wittenbauer. De zijden van de vette vierhoek zijn in drie gelijke delen verdeeld. De zijden van het grijze exemplaar gaan door de acht deelpunten en dat maakt dat die zijden twee aan twee evenwijdig aan de diagonalen van de vierhoek zijn.

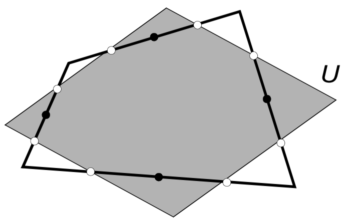


parallellogram van Wittenbauer

De zijden van dit parallellogram van Wittenbauer zijn $\frac{2}{3}$ keer zo lang als de diagonalen van de vierhoek en daarom is de oppervlakte iets kleiner dan de oppervlakte van de vette vierhoek, namelijk het $\frac{8}{9}$ $(= 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3})$ deel.
De drie parallellogrammen L, V en W (van Varignon, Wittenbauer en Lecluse) liggen *homothetisch* ten opzichte van elkaar. Het centrum daarbij is het snijpunt van de diagonalen van de oorspronkelijke vierthoek.

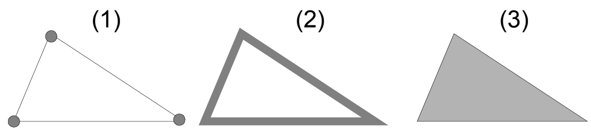


De serie van parallellogrammen kan gemakkelijk worden uitgebreid. Hieronder is het parallellogram U te zien dat past bij een vierendeling van de zijden van de vierhoek en daarvan is de oppervlakte iets groter dan die van de vierhoek, namelijk $\frac{9}{8}$ $(= 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4})$ keer zo groot.



Tussen U en W ligt er natuurlijk precies één parallellogram dat in oppervlakte precies even groot is als de oorspronkelijke vierhoek. Omdat $\frac{8}{9} \times \frac{9}{8} = 1$ moeten de zijden van dit parallellogram gelijk zijn aan het meetkundig gemiddelde van de zijden van U en W; ze zijn dus gelijk aan $\sqrt{\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}}$ $(= \frac{1}{2}\sqrt{2})$ maal de diagonalen van de vierhoek.

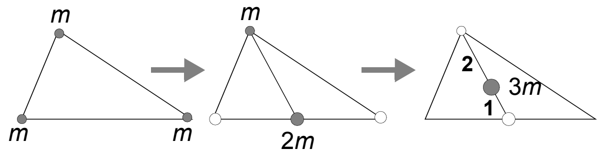
Zwaartepunten van een driehoek
De parallellogrammen van Varignon en Wittenbauer spelen een rol bij het construeren van het fysische zwaartepunt van een vierhoek. Voordat ik hier nader op in ga, bekijk ik eerst de ligging van het zwaartepunt van een driehoek in drie situaties:



1. de driehoek bestaat uit drie even grote zogenaamde ‘puntmassa’s’ in zijn hoekpunten;
2. de driehoek bestaat uit homogene stangen;
3. de driehoek is massief en homogeen.

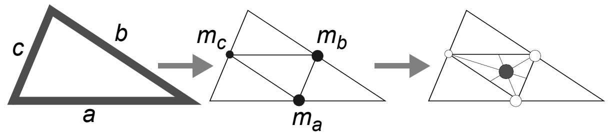
In geval (1) is het zwaartepunt van de drie massa’s het snijpunt van de drie zwaartelijnen en valt dus samen met het geometrische zwaartepunt.

Een bewijs zonder woorden.



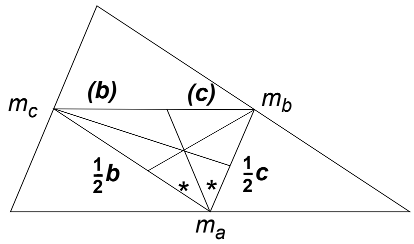
Pas de momentenstelling toe en weet dan dat het zwaartepunt op de lijn ligt, die de top verbindt met het midden van de basis en die lijn bovendien in stukken verdeelt met verhouding 2 : 1. Uiteraard kan elk hoekpunt de rol van top spelen en daaruit volgt nog dat de drie zwaartelijnen door één punt gaan.

In het geval van de stangendriehoek komt er een ander zwaartepunt.



$m_a : m_b : m_c = a : b : c$

De drie stangen worden vertegenwoordigd door drie puntmassa’s m_a, m_b en m_c in de middelpunten van de stangen, dus in de hoekpunten van de driehoek gevormd door de drie middenparallellen. Het zwaartepunt van de twee massa’s m_b en m_c verdeelt de bijbehorende middenparallel in stukken die zich verhouden als $c : b$ en is bijgevolg het voetpunt van een bissectrice van de middenparallelendriehoek. Immers de lijnstukken die m_a verbinden met m_b en m_c zijn gelijk aan $\frac{1}{2}c$ en $\frac{1}{2}b$. De bissectrice vanuit m_a in driehoek $m_a m_b m_c$ verdeelt die driehoek in twee delen waarvan de oppervlakten zich verhouden als de zijden vanuit m_a en dat is dus als $c : b$.

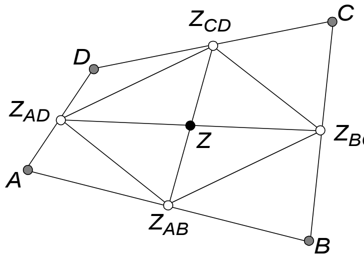


Het zwaartepunt van de stangendriehoek is blijkbaar het snijpunt van de drie bissectrices van de middenparallellendriehoek en dat valt in het algemeen niet samen met het geometrische zwaartepunt.

Het zwaartepunt van een massieve homogene driehoek valt wèl samen met het geometrische zwaartepunt. Denk aan de driehoek opgebouwd uit zeer dunne, steeds kortere staafjes, parallel met de basis en een puntmassa in de top. Het zwaartepunt van elk staafje is het midden van dat staafje en al die middens liggen op de zwaartelijn uit de top. Via een limietbeschouwing moet de conclusie zijn dat het zwaartepunt van de massieve driehoek op die zwaartelijn (en natuurlijk ook op de beide andere zwaartelijnen) ligt.

Zwaartepunten van een vierhoek

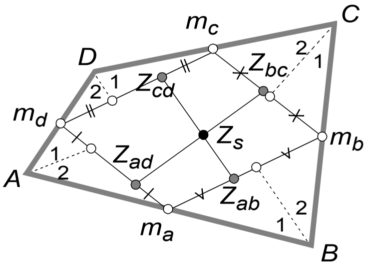
Net als bij de driehoek onderscheid ik drie gevallen. Eerst vier gelijke puntmassa's in de hoekpunten.



Het zwaartepunt van twee naburige puntmassa's is het midden van een zijde van de vierhoek. Het zwaartepunt van de vier massa's in *A, B, C* en *D* ligt dus op de bimediaan (= middenverbinder) van *AB* en *CD* en uiteraard ook op die van *BC* en *AD*.

Kortom: het zwaartepunt is het snijpunt van de diagonalen van het parallellogram van Varignon. Dit punt *Z* wordt ook gezien als het geometrische zwaartepunt van de vierhoek. Merk op dat de bimediaan van de diagonalen *AC* en *BD* ook door *Z* gaat en dat *Z* het midden is van de drie genoemde bimedianen.

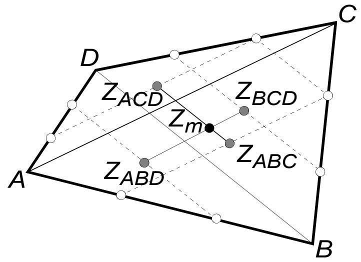
Nu de stangenvierhoek.



Noem de lengten van de stangen *AB, BC, CD* en *DA* achtereenvolgens *a, b, c* en *d*. Vervang de stangen door puntmassa's in de middens van die stangen (m_a enzovoort) en die zich verhouden als *a, b, c* en *d*. Het zwaartepunt van m_a en m_b verdeelt het lijnstuk m_am_b in stukken die zich verhouden als $b : a$. Dit deelpunt kan worden gevonden door de bissectrice van $\angle B$ te snijden met lijnstuk m_am_b. Het snijpunt verdeelt m_am_b in stukken die zich verhouden als $a : b$ en ik hoef dit punt slechts te spiegelen in het midden van m_am_b om het zwaartepunt Z_{ab} te vinden. Net zo kunnen Z_{bc}, Z_{cd} en Z_{ad} worden bepaald. Het zwaartepunt Z_s van de stangenvierhoek is nu het snijpunt van de verbindingslijnen $Z_{ab}Z_{cd}$ en $Z_{bc}Z_{ad}$ en verschilt normaliter van het middelpunt van het parallellogram van Varignon.

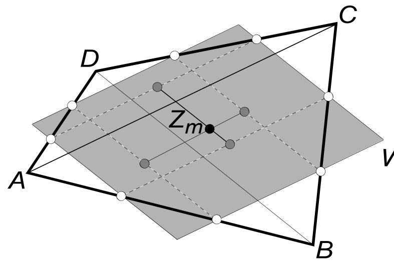
Bij de massieve vierhoek *ABCD* hoort nog een ander zwaartepunt. Om te beginnen kan de vierhoek door de diagonaal *AC* worden opgedeeld in de driehoeken *ABC* en *ACD* die respectievelijk de zwaartepunten Z_{ABC} en Z_{ACD} hebben.

Het zwaartepunt Z_m van de massieve vierhoek ligt dan op de verbindingslijn $Z_{ABC}\,Z_{ACD}$. Evenzo ligt het op de lijn die de zwaartepunten van het andere paar driehoeken (*ABD* en *BCD*) verbindt. Z_m is nu het snijpunt van de lijnen $Z_{ABC}\,Z_{ACD}$ en $Z_{ABD}\,Z_{BCD}$.



Het punt Z_m blijkt juist het middelpunt van het parallellogram van Wittenbauer (*W*) te zijn. De punten Z_{ABC} en Z_{ACD} zijn immers de middens van de 'staafjes' die evenwijdig zijn aan en juist $\frac{2}{3}$ keer zo lang zijn als *AC.*

Dat betekent dat de lijn $Z_{ABC}\,Z_{ACD}$ bij verlenging door de middens van twee overstaande zijden van het parallellogram *W* gaat. Net zo voor $Z_{ABD}\,Z_{BCD}$ en daarmee is aangetoond dat Z_m samenvalt met het snijpunt van de diagonalen van *W*.

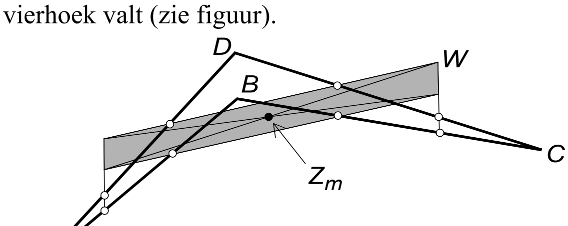


Omdat de parallellogrammen van Varignon en Wittenbauer in het algemeen niet hetzelfde middelpunt hebben, weet ik dat het zwaartepunt van de massieve vierhoek *niet* samenvalt met het geometrische zwaartepunt.

Het middelpunt van het Wittenbauerparallellogram verdeelt de lijnstukken $Z_{ABD}\,Z_{BCD}$ en $Z_{ABC}\,Z_{ACD}$ in stukken die zich respectievelijk verhouden als de oppervlakten van *BCD* en *ABD* en van *ACD* en *ABC*.

De lezer die zich uitgedaagd voelt, kan proberen dit langs meetkundige weg te bewijzen.

De zojuist genoemde eigenschap geldt ook voor een niet convexe vierhoek *ABCD* en zo kan het gebeuren dat het fysische zwaartepunt van een massieve vierhoek buiten de vierhoek valt (zie figuur).



'Fosbury-vierhoek'

Met wat fantasie kan de lezer hierin een hoogspringer zien die in de achterwaartse Fosbury-stijl over de lat zeilt, waarbij zijn zwaartepunt onder de lat door gaat.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl