Een van de plenaire lezingen op de jaarvergadering 2008 van de NVVW werd gegeven door **Lidy Wesker**. In deze lezing stond de visie op wiskundeonderwijs centraal. En met name de vraag: kennen we elkaars visie wel? En hoe kun je de verschillende visies analyseren?

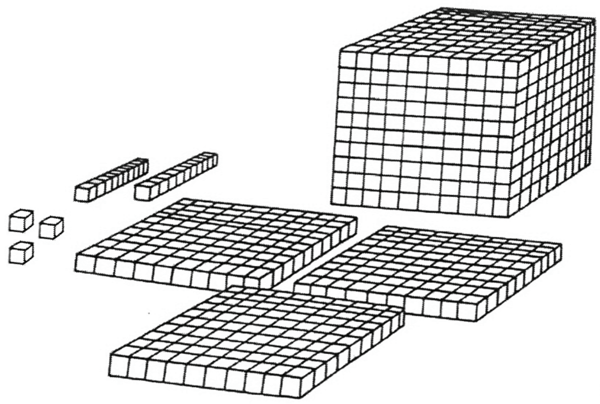
Didactische knopen ontward

Hoezo beperkt?

In de film *Flatland*, gebaseerd op het gelijknamige boek van Edwin A. Abbott, gaat kleindochter Hex samen met opa Square op zoek naar een wereld die zich bevindt buiten de twee dimensies die de Platlanders kennen. Hex' vijfhoekige ouders zijn ooit terechtgesteld vanwege hun ideeën over een derde dimensie. Er mag namelijk niet over een andere dimensie worden nagedacht en al zeker niet over worden gesproken. Hex gaat samen met haar opa toch op onderzoek uit en ziet daar hoe beperkt het zicht van de Platlanders is. Hex en Square ervaren de derde dimensie door 'over de muur te kijken'.
De film laat zien dat je beperkt bent als je in je eigen dimensie blijft denken en dat je door te praten met mensen over andere mogelijkheden, je eigen ideeën kunt verrijken.
De plenaire lezing op de jaarvergadering had tot doel om de aanwezige wiskundedocenten te laten zien dat er ook in het wiskundeonderwijs verschillende ideeën, visies en dimensies zijn om over wiskunde en wiskundeonderwijs na te denken en dat die visies een sterke invloed hebben op het onderwijs dat de leraar aan zijn klas geeft. Het binnen de muren houden van de ideeën over jouw onderwijs maakt jou en je collega's net als de Platlanders: beperkt. Het devies luidt dan ook: 'Kijk over de muur en praat erover.' Praat je er wel eens over hoe je een bepaald concept behandelt of komt de sectievergadering niet verder dan praten over de gekozen wiskundemethode en de beschikbare uren? Pas jij je aan aan het boek of laat je het boek aansluiten bij jouw visie?
Voordat je over je eigen ideeën kunt gaan praten, is het van belang dat je weet dat er diverse ideeën bestaan over wiskunde en wiskundeonderwijs en dat niet iedere collega hetzelfde idee hoeft te hebben. Die diverse visies komen onder andere naar voren uit internationaal onderzoek.

Internationaal onderzoek

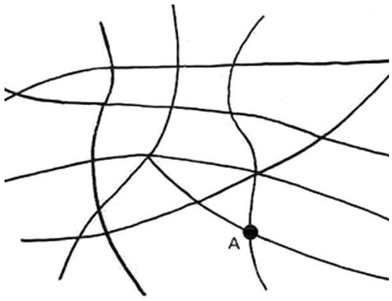
Er is internationaal veel onderzoek gedaan naar de diverse ideeën die leraren hebben over wiskunde en wiskundeonderwijs. In 2007 is in het boek *Philosophical Dimensions in Mathematics Education* een verzameling van dergelijke onderzoeken opgenomen. In dit artikel worden drie van deze onderzoeken nader belicht.
In het onderzoek van Dimitris Chassapis wordt gevraagd 'welk getal zie je hier?'



Alleen al het kijken naar een soortgelijk plaatje levert verschillende antwoorden op. Het is maar net hoe je ernaar kijkt. Wat dacht u van: 9 of $\approx 1\frac{1}{3}$ of 1323 of 1,323 of 923. Een andere blik levert een andere uitkomst.

Geschiedenis: differentialen
De gemiddelde snelheid op een interval bij een tijd-afstand-formule is $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Neem je Δt heel klein, dan krijg je een benadering van de snelheid op één moment.
Deze benadering is beter naarmate Δt kleiner wordt genomen.
Neem je de limiet voor Δt naar nul, dan krijg je $\frac{ds}{dt}$.
In deze notatie heten ds en dt **differentialen**.
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) heeft bij de ontwikkeling van de differentiaalrekening de notatie met de differentialen ingevoerd. Voor zowel het begrip van de differentiaalrekening als voor het gebruik bij allerlei toepassingen heeft een notatie met differentialen de voorkeur boven een notatie als $f'(x)$.

In het onderzoek van Albrecht Heeffer wordt gekeken naar hoe een wiskundedocent omgaat met de geschiedenis van de wiskunde. Ook in de huidige methodes in Nederland staan stukjes geschiedenis opgenomen. Wat doe je met die stukjes in de klas? Zie je dat als vulling van een pagina of als ondersteuning van het concept dat wordt uitgelegd in die paragraaf? Albrecht Heeffer betoogt dat de geschiedenis van de wiskunde kan dienen als leidraad voor het wiskundeonderwijs. De ontwikkeling van de wiskunde van vroeger kan worden gevolgd en uitgelegd door de docent, waardoor ook de ontwikkeling van de wiskunde van nu en in de toekomst de les binnentreedt. Als je het idee hebt dat wiskunde gebaseerd is op bewijzen die al zijn gegeven, dan zul je er waarschijnlijk niet zo snel voor kiezen om in je lessen de soms warrige ontwikkeling van de wiskunde te volgen, maar juist voor een systematische behandeling van wiskundige concepten. Jouw idee over wiskunde komt daardoor tot uiting in je les.



Maria Meletiou heeft onderzoek gedaan naar de didactieken die leraren toepassen in hun wiskundeles. Ook zij komt tot de conclusie dat er docenten zijn die een vast patroon volgen van opeenvolgende concepten in de wiskunde, die dan als paragrafen in een methode worden behandeld en dat er docenten zijn die de ontwikkeling van de wiskunde volgen en daardoor de wiskundige concepten door elkaar heen behandelen. Het gaat er dan om wat je idee over wiskunde is; ontdekken, uitvinden of gebruiken van resultaten. De leerlingen in jouw klas zijn van jouw idee afhankelijk. Jouw idee over wiskunde wordt ook door je uitgedragen en jouw leerlingen nemen jouw idee over alsof dat de enige visie op wiskunde is.
In het *International Handbook of Mathematics Education* (2003) wordt onderzoek naar visies van wiskundedocenten beschreven. In het algemeen wordt opgemerkt dat wiskundedocenten impliciete visies hebben, die zelden expliciet worden gemaakt, en dat die impliciete visie wordt doorgegeven aan de leerlingen die, als ze geen andere wiskundedocenten tegenkomen, de leerling een beperkt zicht geven op wat wiskunde kan zijn. Uit internationaal onderzoek blijkt dat de algemene visie op wiskundeonderwijs techniektraining bevat, visievrij is en cultuuronafhankelijk. Voorbeelden van dergelijk onderzoek zijn:

- VIMT (*values in mathematics teaching*) in Taiwan (1997). In dit onderzoek werd duidelijk dat de deelnemende docenten in eerste instantie hun visie op wiskundeonderwijs veranderden naar meer zelfverantwoordelijk leren, doordat ze expliciet maakten wat hun ideeën over wiskunde en wiskundeonderwijs waren. Door de discussies met elkaar in het kader van het onderzoek, veranderde hun visie op onderwijs. Toen echter de toetsperiode weer in zicht kwam, veranderde hun wiskundeonderwijs weer terug naar techniektraining. Een hoog cijfer op de test was namelijk de toegang tot een betere toekomst. 'Teaching to the test' was daarvoor de efficiëntste oplossing.
- VAMP (*values and mathematics project*, Australië (1999). In dit onderzoek zijn drie jaar lang wiskundedocenten gevolgd die gevraagd werden om hun visie op wiskunde en wiskundeonderwijs expliciet te maken. Het was in eerste instantie echter moeilijk om docenten te vinden die mee wilden werken aan dit onderzoek. Wiskundedocenten maken niet graag hun visie expliciet.

Onderzoek in Nederland

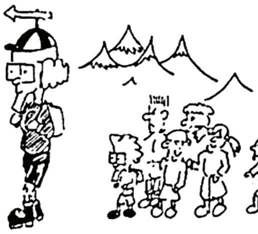
In Nederland is onderzoek naar visies onder wiskundeleraren nog niet gedaan, maar er komt wel meer vraag naar. In *Euclides 8* staan bijvoorbeeld zes artikelen over visies op wiskunde. En in 2008 is een onderzoek gestart naar de verschillende achtergronden van wiskundedocenten. Er is wel onderzoek gedaan naar visies van literatuurdocenten en naar docenten van de natuurwetenschappen. Deze onderzoeken worden onder andere gedaan aan de hand van stellingen. Enkele voorbeelden:

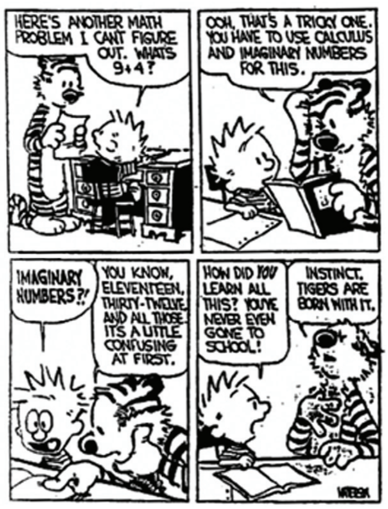
- leerlingen moeten vooral teksten lezen die passen bij hun leeftijd.
- literatuur kan een belangrijke rol spelen in de emotionele en cognitieve ontwikkeling van adolescenten.
- natuurwetenschappelijke feiten zijn die zaken waar natuurwetenschappers het over eens zijn.
- natuurwetenschappelijk onderzoek wordt sterk bepaald door economische en politieke factoren.

Op de Nationale Wiskunde Dagen in 2003 heb ik een workshop gehouden over de visies van wiskundedocenten aan de hand van stellingen die ik heb gemaakt naar aanleiding van de indeling van Paul Ernest in zijn boek *The Philosophy of Mathematics Education* (1991). Een artikel van Paul Ernest over de visies van wiskundedocenten kun u vinden in de *Nieuwe Wiskrant* (23(2)). Twee voorbeelden van de gebruikte stellingen:

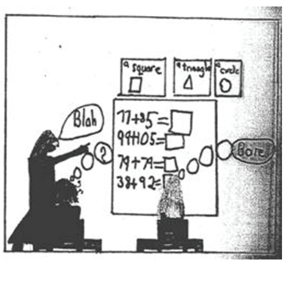
- Wiskundige concepten en vaardigheden moeten worden beheerst, de achterliggende theorieën zijn voor de betere leerling.
- Leerlingen zouden zelfverzekerde wiskundige probleemstellers en -oplossers moeten worden.

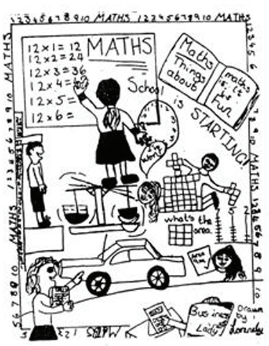
De vertaalde matrix van Paul Ernest vindt u, vanwege zijn omvang niet hier, maar u kunt deze downloaden vanaf de site van de Nieuwe Wiskrant[1]. Om een idee te krijgen van deze matrix, kunt u de volgende cartoons proberen te plaatsen in de juiste cel van de matrix. Welk idee heeft de Tiger over capaciteit? En welke idëeen over leren worden weergegeven in de plaatjes van Van Dormolen over lesgeven?





Paul Ernest heeft in zijn onderzoek naar de visies van wiskundedocenten tekeningen over een wiskundeles laten maken door leerlingen. In die tekeningen zie je de visie van de wiskundedocent van de leerlingen terug. Herkent u de visie?





In de TIMSS video study uit 1999 zijn verschillende internationale docenten, ook uit Nederland, gevolgd op video. Uit deze filmpjes blijkt dat het wiskundeonderwijs in diverse landen heel anders kan zijn en om die reden cultuurafhankelijk. We zien drie docenten:


OK, allereerst hebben we hier een vijfhoek, ABCDE, klopt?


OK. Vraag b, hoe groot is de som van de hoeken in iedere driehoek?

De Japanse docent volgt met zijn leerlingen het boek en geeft stap voor stap aan wat er in de werkboeken van de leerlingen moet worden ingevuld. Het gaat in dit filmpje over de grootte van de hoeken in een vijfhoek. Kunt u deze docent plaatsen in de matrix?

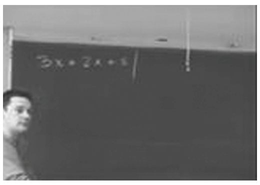

In het begin heb je er vijf. Hierboven kun je daar iets over opschrijven, iets dat je kunt ontdekken over die hoeken.

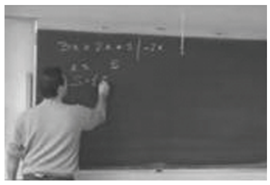
De Australische docent laat de leerlingen exploreren wat de grootte zou kunnen zijn van de buitenhoeken van veelhoeken. Hij begint met een vijfhoek en laat de leerlingen een hypothese opschrijven, die ze moeten onderzoeken op de computers met behulp van een meetkundeprogramma. Een andere visie op wiskundeonderwijs die een andere les oplevert dan in Japan.


Ik heb drie keer vijf gedaan. De eerste is 15, de tweede is dan twee keer vijf plus vijf.


Haal de X weg. Hier moeten we de X weghalen. Want wat willen we uiteindelijk bereiken? Ja?

De wiskundedocent uit Frankrijk, laat een leerling het antwoord geven op de vraag: *Los op:* $3x = 2x + 5$. De leerling antwoordt 'Vijf'. De docent wil graag weten hoe ze dat heeft gedaan en ze legt dat uit. De docent vindt de uitleg niet juist, omdat de leerling maar wat aan het proberen is en geeft een betere uitleg.


X is gelijk. Dus we moeten de X-en aan de ene kant en de rest aan de andere kant zetten. Dat doen we met de regels van vergelijkingen.


Even kijken, ja, mijn oplossing is vijf. Allemaal ok?

Hoe zou jij reageren op de leerling? Bij welke visie past dat?

Een voorbeeld uit Nederland

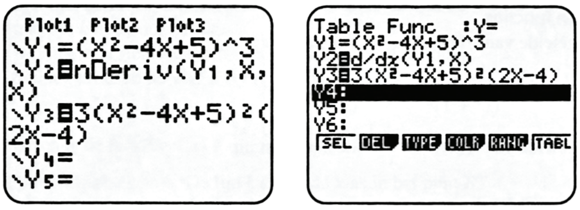
Ook auteurs van methodes in Nederland hebben hun ideeën over wiskunde en wiskundeonderwijs. Die ideeën komen tot uiting in de methoden, zelfs, vreemd genoeg, ook in de verschillende uitgaven per methode. Een voorbeeld is de uitleg van de kettingregel. In de eindtermen staat:

– binnen een context gebruik maken van de kettingregel (HAVO B)
– de kandidaat kan afgeleide functies bepalen met behulp van regels voor het differentiëren en algebraïsche technieken hanteren (VWO B).

In *Getal en Ruimte* wordt de kettingregel gegeven aan de hand van een voorbeeld en de leerlingen moeten controleren dat beide afgeleiden inderdaad aan elkaar gelijk zijn.

Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 5x)^2$.
a Bereken $f'(x)$.
b Toon aan dat $f'(x) = 2(x^2 - 5x) \cdot [x^2 - 5x]'$.

Gegeven zijn de functies $g(x) = (x^2 - 4x + 5)^3$ en $h(x) = 3(x^2 - 4x + 5)^2 \cdot [x^2 - 4x + 5]'$.
Maak tabellen bij de hellingfunctie van g en bij de functie h. Zie de GR-schermen hieronder.
Wat valt op?



Toch zit het de auteurs niet lekker dat ze op deze manier de kettingregel uitleggen (visie!), en dat maken ze goed door op de volgende pagina een kader op te nemen, waarin de kettingregel wel (?) wordt uitgelegd.

Je kunt als volgt inzien dat de kettingregel juist is.

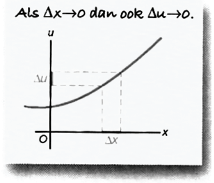
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Bij $f(x) = (x^2 - 5x)^2$ is $y = u^2$ met $u = x^2 - 5x$, dus

$$f'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot (2x - 5) = 2(x^2 - 5x)(2x - 5).$$

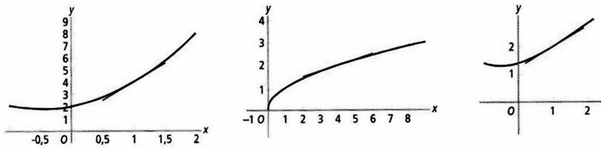
$\boxed{u = x^2 - 5x}$



Wat doet u met dit kader in het boek? Is het vulling of ondersteuning van het concept kettingregel?

In *Moderne Wiskunde* (VWO wis B) hebben de auteurs het idee dat de kettingregel visueel moet worden uitgelegd, ze geven om die reden drie grafieken die een onderling verband suggereren.

Hieronder staan de grafieken van:
$f(x) = x^2 + x + 2$ met de raaklijn l in (1, 4),
$g(u) = \sqrt{u}$ met de raaklijn m in (4, 2) en
$h(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$ met de raaklijn n in (1, 2).



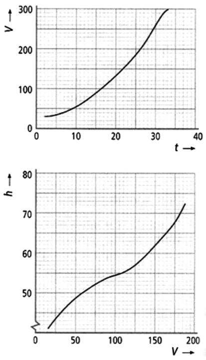
Bereken de helling van l.
Bereken de helling van m.
Benader de helling van n.
Hoe volgt de helling van n uit de hellingen van l en m?
Leg uit dat $h'(x) = g'(u) \cdot f'(x)$.
Bereken de helling van de grafiek van $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$ in het punt $(-2, 2)$.

Het vreemde in de grafiek is echter dat de assen niet het onderliggende verband dat de functies lijken te geven, doorzetten, ze hebben alle x- en y-assen. De opgaven zijn invuloefeningen met als uitkomst dat de kettingregel iets is dat klopt. De auteurs van *Moderne Wiskunde* geven verder geen uitleg meer over waarom de kettingregel werkt.

De auteurs van het HAVO-wiskunde B-boek van *Moderne Wiskunde* pakken de uitleg geheel anders aan, en dat getuigt van een andere visie op wiskundeonderwijs dan hun VWO-medeauteurs.

13 Hiernaast staan de grafieken die het verband aangeven tussen *tijd*, *volume* en *hoogte* bij het vullen van een reservoir.
a Hoe groot is $\frac{\Delta V}{\Delta t}$, de gemiddelde vulsnelheid (in liters per sec), gedurende het tijdsinterval [10, 20]?
b Hoe groot is $\frac{\Delta h}{\Delta V}$, de gemiddelde verandering van de hoogte (in cm per liter), gedurende dat tijdsinterval?
c Hoe groot is $\frac{\Delta h}{\Delta t}$, de gemiddelde stijgsnelheid (in cm per sec), gedurende dat tijdsinterval?
d Leg uit dat geldt: $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta h}{\Delta V}$
Ga na dat de eenheden in deze formulering kloppen.
e Met hoeveel liter per seconde neemt het volume toe op $t = 10$?

14 Bij het vullen van een ander reservoir gelden de formules $V(t) = t^2 + 50$ en $h(V) = 2\sqrt{V}$ met t in seconden, V in liters en h in cm.
a Maak de opdrachten 13a, b en c voor dit reservoir.
b Met behulp van een klein interval, bijvoorbeeld [10; 10,001] kun je een schatting maken van de stijgsnelheid van het water op $t = 10$. Bereken de stijgsnelheid van het water op $t = 10$.
c Bereken de stijgsnelheid van het water op $t = 10$ ook met behulp van de afgeleiden van V en h.



Eigenlijk snap je als wiskundedocent niet dat de kettingregel in de meeste boeken niet wordt uitgelegd, terwijl het toch allemaal niet zo moeilijk is.

Bovenstaand voorbeeld van de kettingregel laat zien dat overleg tussen sectiegenoten over hoe je een concept uitlegt en waarom je dat zo doet, belangrijk is voor het wiskundeonderwijs aan je leerlingen. Door ‘over het muurtje’ van je eigen klaslokaal en methode heen te kijken opent zich een wereld die bijzonder rijk is aan nieuwe inzichten, waardoor het onderwijs aan jouw leerlingen beter wordt. Laat je in ieder geval niet zonder meer leiden door een methode die geschreven is door auteurs met hun eigen visie. Vergelijk, bediscussieer en verrijk je eigen onderwijs.

Visies van studenten en opleiders

Als opleider van wiskundedocenten in de school, kan het zo zijn dat jouw visie op wiskunde en wiskundeonderwijs niet hetzelfde is als de visie van de student. De student heeft in zijn opleiding kennis genomen van de verschillende mogelijke visies, door bijvoorbeeld de matrix van Paul Ernest te gebruiken. Dat kan voor een opleider in de school een mooi startpunt zijn om over de visie te gaan praten.
In een workshop op de Hogeschool van Amsterdam (HvA) over dit onderwerp zijn twee cases besproken; de deelnemers aan de workshop hadden tot taak een rollenspel voor te bereiden waarin ze de les nabespraken met de student die het 'verst' van hun eigen visie afstond.

Student A moet een les verzorgen. Hij gaat als volgt te werk:
1. De klas krijgt de gelegenheid om opdracht 1 te lezen. (2 min).
2. Daarna vertelt hij aan de klas waar de problemen zitten en hoe ze met een verhoudingstabel tot de oplossing kunnen komen. Vervolgens schrijft hij die op het bord.
3. De leerlingen nemen de oplossing van het bord over.
4. Opdracht 2 wordt daarna besproken. Hij maakt weer een tabel op het bord en vraag een leerling (zijn beste) te vertellen wat de oplossing is met behulp van de tabel. Hij zet dat op het bord. De rest neemt het over.
5. Opdracht 3 bespreekt hij eveneens met de klas. Daarna mogen de leerlingen zelf de uitwerkingen in hun schrift opschrijven. De rest is huiswerk.

Student B verzorgt dezelfde les op de volgende wijze:
1. Hij vraagt de leerlingen opdracht 1 te lezen en te maken. (5 minuten).
2. Daarna moeten ze in groepjes van 2 hun uitwerkingen bespreken en vergelijken. Hij loopt rond om te kijken wat ze doen.
3. Vervolgens bespreekt hij de belangrijke punten klassikaal door leerlingen voor het bord te halen; verschillende strategieën komen aan bod.
4. Opdracht 2 moeten de leerlingen individueel maken. De opdracht wordt klassikaal besproken. Opnieuw bespreekt hij de verschillende strategieën die hij zag tijdens het rondlopen.
5. Ten slotte wordt opdracht 3 individueel gemaakt. De rest wordt als huiswerk opgegeven.

Opvallend was dat op één deelnemer na, iedereen vermeldde dat student A het verst van hun visie afstond. In het rollenspel dat volgde, bleek dat het moeilijk is om over de verschillende visies te praten zonder dat de student zich aangevallen voelt. Al snel wil je als opleider je visie 'opdringen' aan de student in plaats van het uitwisselen van visies.

Een eigen Nederlandse matrix

Tijdens de workshop op de HvA is er een eerste poging gedaan om de matrix van Paul Ernest om te zetten naar de Nederlandse situatie. Daartoe heeft Kenneth Tjon Soei Sjoe een presentatie gegeven over de vier hoofdstromingen in het Nederlandse onderwijs:
1. de mechanistische stroming
2. de structuralistische stroming
3. de heuristische stroming
4. de realistische stroming.

De verschillende kenmerken werden besproken en de verschillen en overeenkomsten werden naast elkaar gezet.
Samen met de deelnemers aan de workshop is een incomplete matrix gemaakt (zie wederom de website van de *Nieuwe Wiskrant)*, die je wellicht kunt aanvullen met jouw sectie of met de studenten die je begeleidt. Onder aan de matrix staan nog losse cellen die ingevuld kunnen worden. Door het samen invullen ontstaat er een gemeenschappelijk beeld van de verschillende stromingen. In ieder geval geeft de matrix stof tot overleg over visies op wiskunde en het wiskundeonderwijs. Deze matrix is te vinden op de website van de *Nieuwe Wiskrant*.

Lidy Wesker
JP Thijsse College, Castricum
Instituut voor de Leraren Opleiding, UvA, Amsterdam

Noten

[1] Deze matrix is weergegeven op http://www.fi.uu.nl/wiskrant/bij_de_nummers/Bijlagen/28.3/matrices.html