Michel Roelens hield op de NWD van 2008 een inspirerende workshop over de vraag of je een volume moest benaderen als een verzameling *stukjes* of juist als een groot aantal *plakjes*. Met een dramatische ontknoping...

Het volume van een piramide

in stukje of in plakjes?

Inleiding

Het volume van een piramide is 'oppervlakte grondvlak maal hoogte gedeeld door 3'. Je kunt dit controleren met een vloeistof, maar dat geeft nog geen antwoord op de vraag 'waarom'. De meeste verklaringen maken gebruik van integralen of van flinterdunne plakjes (het principe van Cavalieri). Als die plakjes een dikte hebben, krijg je maar een benadering van het ruimtelichaam; zijn ze 'oneindig dun', dan hebben ze geen volume. Kan het niet eenvoudiger, zoals in het vlak bij de oppervlakte van een driehoek, door de piramide in een eindig aantal stukjes te snijden en de stukjes op een andere manier weer bij elkaar te voegen? Om hier een antwoord op te vinden, maken we een tochtje door de geschiedenis. Hierbij ontdekken we dat het begrip 'volume' vroeger helemaal niet werd bekeken als een 'formule waarin je de juiste afmetingen moet invullen' en dat de eeuwenlange strijd tussen de 'stukjes' en de 'plakjes' een verrassende ontknoping kende rond 1900.

Water overgieten

Vul je drie keer na elkaar een piramide met water en giet je dit over in een prisma met hetzelfde grondvlak en dezelfde hoogte, dan wordt het prisma precies tot aan de rand gevuld. Dit experiment wordt vaak in de lagere school of in het begin van het voortgezet onderwijs uitgevoerd om te laten zien dat het volume van de piramide gelijk is aan één derde van het volume van het prisma. Omdat het volume van een prisma gelijk is aan de oppervlakte van het grondvlak maal de hoogte, levert dit de 'formule' op voor het volume van een piramide:

$$\textit{volume piramide} = \frac{(\textit{oppervlakte grondvlak})\cdot \textit{hoogte}}{3}.$$

Dit is overtuigend en het is ook goed dat zulke experimenten in een wiskundeles gebeuren. Maar het vormt geen wiskundig *bewijs* voor deze formule. Het experiment toont niet aan dat de verhouding *exact* één derde is. Bovendien geeft het experiment geen antwoord op de vraag *waarom* de verhouding is en waarom het voor *alle* piramides het geval is.

Bij de aanbreng van de oppervlakte van een driehoek hoort een analoog experiment: met twee identieke (congruente) kartonnen driehoeken kun je één parallellogram vormen. De oppervlakte van de driehoek is dus de helft van de oppervlakte van het parallellogram. Dit geeft:

$$\textit{oppervlakte driehoek} = \frac{\textit{basis}\cdot \textit{hoogte}}{2}.$$

Dit experiment is van een andere orde dan het water gieten bij de piramide: het vormt een (preformeel) *bewijs* waarmee de oppervlakte van een driehoek herleid wordt tot de oppervlakte van een parallellogram. In tegenstelling tot het water gieten, wordt hier wel uitgelegd *waarom* je bij de oppervlakte van een driehoek door twee moet delen.

Kunnen we met een piramide niet gewoon 'hetzelfde' doen als met een driehoek: drie identieke kopieën tegen elkaar zetten en een prisma vormen? Hier komen we later op terug. Eerst willen we het volume van een prisma bestuderen.

Geschiedenis van de wiskundige basisbegrippen

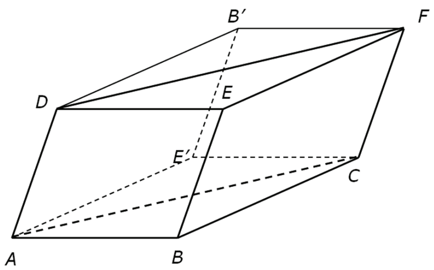
Het begrip 'volume' lijkt er altijd al geweest te zijn, net zoals de begrippen 'getal', 'functie', 'oppervlakte'… Toch is dit niet het geval, althans niet in de vorm die wij nu kennen. Deze begrippen hebben een hele evolutie gekend. Wijzelf, en zeker onze leerlingen, bekijken oppervlakten en volumes als maatgetallen die je kunt uitrekenen door de afmetingen van de figuur in te vullen in bepaalde formules. Zo bekeken de oude Grieken het niet. Zij vergeleken altijd twee oppervlakten of twee volumes. Bovendien bekeken ze de figuren zelf als grootheden: ze schreven 'de oppervlakte van' of 'het volume van' er nooit bij. Ze zeiden bijvoorbeeld: 'Twee piramides met gelijke grondvlakken verhouden zich tot elkaar zoals hun hoogtes.'

Dit verschil in benadering houdt verband met het getalbegrip. Ons begrip 'reëel getal' is geschikt om maatgetallen van willekeurige grootheden weer te geven. Voor de oude Grieken waren de enige getallen de natuurlijke getallen (verschillend van 0). Verder bestudeerden zij *verhoudingen* van getallen en van grootheden, maar deze verhoudingen zelf werden niet als getallen bekeken. Als wij zeggen: ‘De Pythagoreeërs bewezen dat $\sqrt{2}$ een irrationaal getal is’, is dit een anachronisme. Zij ontdekten dat de diagonaal en de zijde van een vierkant geen veelvouden zijn van een zelfde lengte-eenheid, anders gezegd: dat de verhouding tussen de diagonaal en de zijde van een vierkant niet gelijk is aan de verhouding van twee (natuurlijke) getallen. Voor ons is dit met terugwerkende kracht equivalent met de irrationaliteit van $\sqrt{2}$. Een stuk historische wiskunde kan volgens mij in de klas gerust ‘anachronistisch’ behandeld worden, met onze huidige begrippen, notaties en formules, op voorwaarde dat de leraar de verschillen tussen de aanpak vroeger en nu kent en aan de leerlingen vermeldt.

Het volume van een prisma

Het volume van een prisma herleiden tot dat van een parallellepipedum

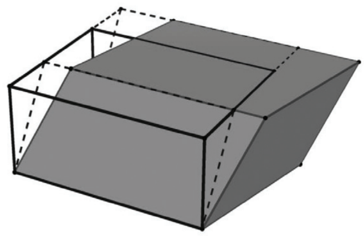
Om aan te tonen dat het volume van een prisma gelijk is aan de oppervlakte van het grondvlak maal de hoogte, kunnen we ons beperken tot prisma’s met driehoekig grondvlak. Immers, elk prisma kan verknipt worden in een aantal prisma’s met driehoekig grondvlak. Het volume van een prisma met driehoekig grondvlak is de helft van het volume van een parallellepipedum[1]. Dit zie je op de figuur hieronder: het driehoekig prisma *ABC.DEF* kunnen we ‘aanvullen’ met het congruente prisma *FB'D.CE'A* om er een parallellepipedum van te maken. Het tweede prisma is het beeld van het eerste door een puntspiegeling; beide prisma’s zijn dus wel congruent maar ze hebben niet dezelfde oriëntatie.



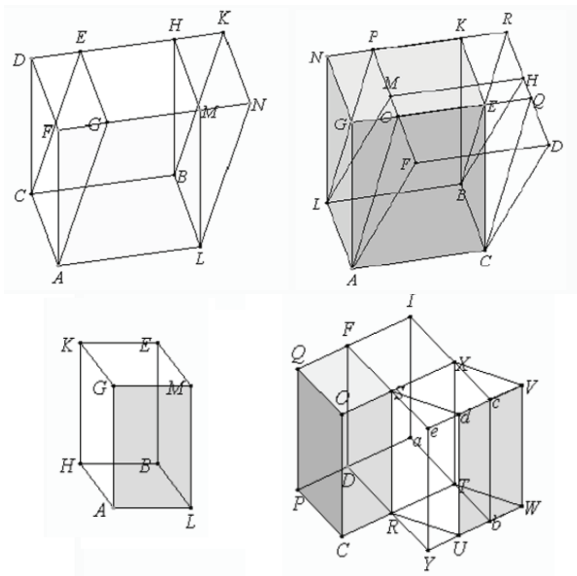
Om aan te tonen dat het volume van een prisma gelijk is aan ‘oppervlakte grondvlak maal hoogte’, volstaat het dus dit aan te tonen voor een parallellepipedum.

Het volume van een parallellepipedum herleiden tot dat van een balk: knippen en plakken

Op de volgende figuur kan het willekeurig parallellepipedum (volgekleurd) in twee fasen worden omgebouwd tot een balk (ribben in volle lijn getekend). Het rechterstuk van het parallellepipedum knippen we af en plakken we er links tegen, zodat het parallellepipedum in stippellijn ontstaat. Vervolgens knippen we het achterste stuk af en plaatsen we het vooraan. Hiermee hebben we de balk gemaakt die in volle lijn getekend is. Eigenlijk zou je nog gevallen moeten onderscheiden: als de loodrechte projectie van het ondervlak op het vlak van het bovenvlak volledig buiten het bovenvlak valt, moet je in nog meer stappen verknippen.



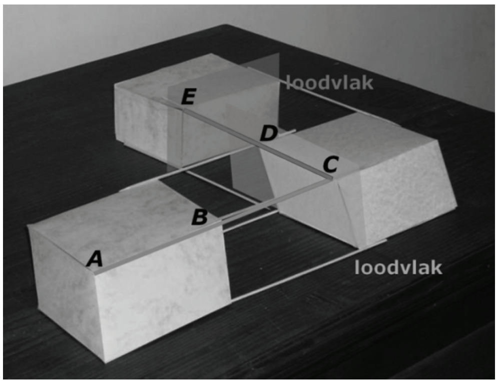
Euclides ging ongeveer op dezelfde manier te werk, maar hij behandelde eerst het geval van een parallellepipedum met rechthoekig grondvlak (zie figuren hieronder, van de site van D.E. Joyce).



Het volume van een parallellepipedum herleiden tot dat van een balk: door gebruik te maken van ‘lucht’

Een alternatief waarbij geen gevalsonderscheid nodig is, bestaat erin het parallellepipedum op dezelfde manier in twee stappen te vervormen, maar zonder dat de oude en de nieuwe figuren elkaar overlappen.

Op de foto hieronder zijn de ribben van een willekeurig parallellepipedum (vooraan links op de tafel) in één richting (*AB*) verlengd. Deze lijnen worden gesneden met een loodvlak op *AB*. Op die manier ontstaat een parallellogram, loodrecht op de tafel. Samen met zijn schuifbeeld over de vector $\overrightarrow{AB}$ bepaalt dit een nieuw parallellepipedum, waarvan vier zijvlakken rechthoeken zijn. De oppervlakte van het grondvlak en de hoogte van het nieuwe parallellepipedum zijn dezelfde als bij het oorspronkelijke parallellepipedum. Laten we aantonen dat ze ook hetzelfde volume hebben. Als we de unie van het eerste parallellepipedum met de ruimte (de ‘lucht’) tussen het eerste en het tweede parallellepipedum verschuiven over de vector $\overrightarrow{AB}$, dan krijgen we de unie van hetzelfde stuk ‘lucht’ met het tweede parallellepipedum. Bijgevolg hebben ze hetzelfde volume. Door deze procedure nu in de richting van *CD* te herhalen, verkrijgen we een balk waarvan de oppervlakte van het grondvlak, de hoogte en het volume gelijk zijn aan die van de vorige parallellepipeda. We kunnen dus besluiten dat het volume van een parallellepipedum gelijk is aan het volume van een balk waarvan de oppervlakte van het grondvlak en de hoogte gelijk zijn aan die van het parallellepipedum.



Het volume van een parallellepipedum herleiden tot dat van een balk: met dunne sneetjes

Een stapel papier vormt een balk. Je kunt de stapel een duw geven zodat die scheef staat en een parallellepipedum vormt (weliswaar nog steeds met rechthoekig grondvlak). Het is aannemelijk dat het volume hetzelfde gebleven is, want het zijn dezelfde bladen papier.

Buonaventura Cavalieri (1598-1647)

Cavalieri veralgemeende dit principe: de bladen papier van beide stapels hoeven niet congruent te zijn; het volstaat dat ze dezelfde oppervlakte hebben. Bovendien hoeven de stapels niet samengesteld te zijn uit identieke bladen, het volstaat dat de oppervlakte van de bladen die op gelijke hoogte liggen (als beide stapels op de tafel rusten) dezelfde oppervlakte hebben. Dit is het eerste principe van Cavalieri: 'Twee lichamen waarvan de doorsneden op een willekeurige hoogte dezelfde oppervlakte hebben, hebben hetzelfde volume.' Cavalieri ging nog een stap verder in het veralgemenen. Zijn tweede principe luidt: 'Twee lichamen waarvan de doorsneden op willekeurige hoogte een vaste verhouding hebben (die niet afhangt van deze hoogte), hebben volumes die ook in die verhouding staan.' Deze principes, die Cavalieri expliciet formuleerde, waren al lang vóór hem toegepast door Archimedes.

Steunend op het eerste principe van Cavalieri is het heel gemakkelijk om te bewijzen dat het volume van een parallellepipedum gelijk is aan de oppervlakte van het grondvlak maal de hoogte. Construeer een balk waarvan het grondvlak dezelfde oppervlakte heeft als het parallellepipedum en waarvan de hoogte dezelfde is en leg ze op een zelfde tafel. De doorsneden op een willekeurige hoogte hebben dezelfde oppervlakte en dus zijn de volumes gelijk.

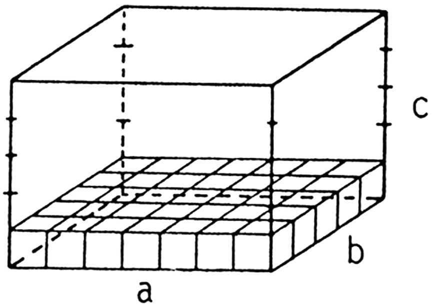
Er is echter een verschil tussen de formulering met de 'bladen papier' en de formulering van Cavalieri met de 'doorsneden op een willekeurige hoogte'. De bladen papier hebben een zekere dikte. Het zijn eigenlijk platte balken. Ze kunnen maar bij benadering een parallellepipedum vormen. Hoe dunner het papier, hoe beter deze benadering is. Anderzijds zijn de vlakke doorsneden vlakke figuren zonder dikte. Een som van oppervlakten levert geen volume op; hier vindt een problematische 'dimensiesprong' plaats. Pas met de integraalrekening (eind zeventiende eeuw) is dit probleem opgelost. Het volume is geen som van oppervlakten; de stapel is niet samengesteld uit 'oneindig dunne bladen papier', maar het is een *limiet* van het volume van een stapel balken waarvan tegelijkertijd de dikte naar nul afneemt en het aantal toeneemt naar oneindig, op zo'n manier dat de hoogte van de stapel hierbij niet verandert. Het limietbegrip zelf werd pas in de negentiende eeuw door Augustin Louis Cauchy en Karl Weierstrass 'mysterieloos' gedefinieerd: met de 'ε-δ-definitie' werd het limietbegrip gestoeld op logica, ongelijkheden en bewerkingen met getallen, en niet meer op vage dynamische ideeën zoals 'altijd maar kleiner en kleiner worden'. In de twintigste eeuw is een alternatieve oplossing voor dit probleem uitgewerkt. In de *nonstandaardanalyse* worden de reële getallen uitgebreid met oneindig kleine getallen die toch niet nul zijn. In deze theorie kan een oneindige som van oneindig kleine volumes wel een eindig volume verschillend van nul opleveren. Deze theorie vergt echter drastische ingrepen in de logische fundamenten waarop de getallenleer en de analyse gebaseerd zijn.

De problemen met de sneetjes – tenminste zolang we de uitleg 'elementair' willen houden – vormen een motivatie om de principes van Cavalieri te omzeilen en om de methode van de stukjes te verkiezen. Bij het parallellepipedum is dit alvast mooi gelukt. De piramide is helaas een ander verhaal (zie de uitleg over het volume van een piramide).

Volume van een balk

In het voorafgaande werd het probleem van het volume van een prisma stap voor stap herleid tot het geval van het volume van een balk. Het volume van een balk is:

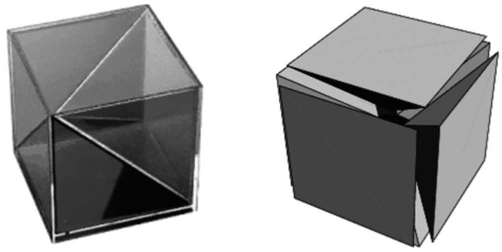
$$\begin{aligned} \textit{volume balk} &= \textit{lengte} \cdot \textit{breedte} \cdot \textit{hoogte} \\ &= (\textit{oppervlakte grondvlak}) \cdot \textit{hoogte}. \end{aligned}$$



Dit is heel eenvoudig wanneer de lengte, de breedte en de hoogte natuurlijke veelvouden zijn van de lengte-eenheid: het volume is dan gewoon het aantal eenheidskubusjes. In het geval waarbij lengte, breedte en hoogte rationale verhoudingen hebben tot de lengte-eenheid, kan men werken met kleinere kubusjes die de balk opvullen. Maar wanneer één of meer van deze verhoudingen irrationaal zijn, kan de balk onmogelijk gevuld worden met identieke kubusjes die zelf stukjes zijn van een eenheidskubus. Om aan te tonen dat de formule toch geldig blijft, is dan een limietproces nodig. We gaan hier niet dieper op in.

Volume van een piramide

Enkele eenvoudige speciale gevallen



Enkele speciale soorten piramides zijn even makkelijk als de driehoek in het vlak. Dit is vooreerst het geval met een piramide met een vierkant grondvlak, met hoogte gelijk aan de zijde van het grondvlak en met de top loodrecht boven één van de hoekpunten van het grondvlak. Met drie congruente exemplaren kun je een kubus samenstellen. Het volume is bijgevolg een derde van dat van de kubus en dus 'oppervlakte grondvlak maal hoogte gedeeld door 3'. Een tweede speciaal geval is een piramide met vierkant grondvlak, met hoogte gelijk aan de helft van de zijde van het grondvlak en met de top loodrecht boven het midden van het grondvlak. Met zes dergelijke piramides kun je een kubus maken. Het volume is bijgevolg een zesde van dat van de kubus en dus weer 'oppervlakte grondvlak maal hoogte gedeeld door 3' (want de hoogte is nu de helft van de hoogte van de kubus).

Volume van een Egyptische piramide in 'plakjes'

Van de Egyptenaren ten tijde van de farao's (derde millennium v.C.) zijn papyrusrollen met hiëroglyfen overgebleven. Hiermee weten we dat zij over methodes beschikten om oppervlakten en volumes van (afgeknotte) piramides te berekenen. Hoe ze dit gevonden hebben, weten we niet. Ze leggen ook niet uit 'waarom' hun berekening juist is.

Een 'Egyptische piramide' is een piramide met een vierkant als grondvlak en met de top recht boven het midden van het grondvlak. Een Egyptische piramide kunnen we 'maken' startend van het tweede speciale geval van de vorige paragraaf (een zesde van een kubus) waarvan het grondvlak alvast de juiste grootte heeft. We moeten nog de hoogte aanpassen, want die is bij een Egyptische piramide niet noodzakelijk de helft van de zijde van het grondvlak.

Wat opvalt als je naar een foto van een Egyptische piramide kijkt, is dat die opgebouwd is uit lagen. Het is in feite een trappiramide, die aan de buitenkant afgewerkt was met marmer waarmee de treden werden gemaskeerd. Op de foto is deze buitenlaag enkel onderaan bewaard gebleven. We weten niet of de lagen een rol hebben gespeeld in het ontdekken van het recept om het volume te berekenen, maar het is een mogelijkheid. Deze lagen bestaan natuurlijk uit verschillende grote stenen, maar we kunnen elke laag ook als één platte, vierkante tegel beschouwen. De lagen doen meteen denken aan de plakjes van Cavalieri, maar dan plakjes met een vaste dikte in plaats van 'oneindig dunne' doorsneden.

We benaderen de speciale piramide (één zesde van een kubus) door een trappiramide waarbij de lagen hoogte Δh hebben. Het volume van de speciale piramide (oppervlakte grondvlak maal hoogte gedeeld door 3) is ongeveer gelijk aan de som van de volumes van de lagen. We passen de hoogte aan door verticaal uit te rekken met een aangepaste factor k. Elke laag wordt k keer hoger en dus wordt het volume van elke laag vermenigvuldigd met k. Het volume van de trappiramide is dus ook met k vermenigvuldigd. Dit blijft het geval wanneer we een groter aantal, dunnere lagen nemen. 'In de limiet' krijgen we op die manier een perfecte piramide met vierkant grondvlak en met de top recht boven het midden. Het volume van een dergelijke piramide is dus 'oppervlakte grondvlak maal hoogte gedeeld door 3'. Een dergelijke redenering werd voor de komst van de integraalrekening als problematisch bekeken. Democritos van Abdera (5de eeuw v.C.) gebruikte een gelijkaardige redenering en Plutarchos voegde als commentaar toe (Lloyd, 1996):

> 'What must we think of the surfaces forming the sections? If they are unequal, they will make the pyramid irregular with many indentations, like steps. If they are equal, the pyramid will appear to have the property of the prism and be of equal squares, which is very absurd.'

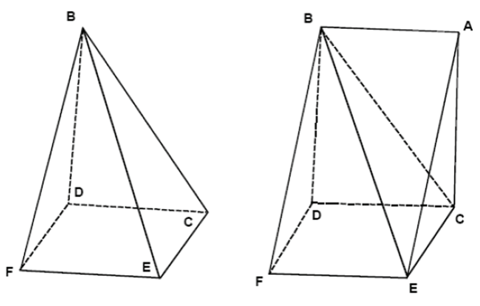
Liu Hui en het volume van de yangma

In 213 v.C. liet de toenmalige keizer Qin Shih Huang alle bestaande boeken verbranden. Zo'n 40 jaar later, toen het rijk van Qin Shih Huang uit was, noteerde Zhang Cang alle wiskunde die hij zich kon herinneren uit zijn jeugd. Zo ontstond volgens de legende de *Negen Hoofdstukken over de wiskunst*, het wiskundige standaardwerk in China. De *Negen Hoofdstukken* bevat 246 praktische problemen en hun oplossingen. Het boek is geschreven voor ingenieurs, architecten en zakenlui. Het verschil met de *Elementen* van Euclides is dat de *Negen Hoofdstukken* enkel resultaten en oplossingsmethoden bevat, geen verklaringen of bewijzen.

Liu Hui (220-280)

In de derde eeuw n.C. schreef Liu Hui het werk *Commentaren bij de negen hoofdstukken*. In tegenstelling tot Zhang Cang levert Hui wel bewijzen. Hij geeft onder meer een mooie verklaring voor de formule van het volume van een speciale soort piramiden.

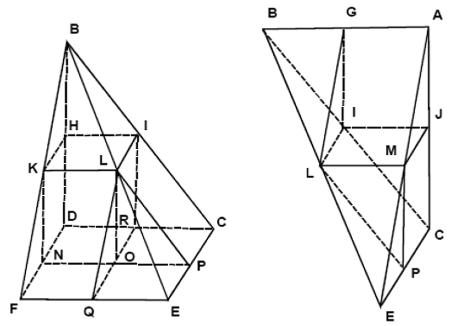
Hui onderzoekt het volume van een piramide waarvan het grondvlak een rechthoek is en waarvan de top loodrecht boven één hoekpunt van het grondvlak staat. Zo'n piramide noemt hij een *yangma*. Een yangma lijkt op de eerste eerdergenoemde speciale piramide, behalve dat de drie loodrechte afmetingen nu niet meer gelijk hoeven te zijn. Merk op dat we met drie congruente yangma's niet zomaar een balk kunnen vormen.



Hui wil aantonen dat het volume van de yangma één derde is van het volume van de balk met hetzelfde grondvlak en hoogte. Daarvoor breidt hij de yangma uit met een viervlak (dat hij *bienao* noemt), zodat er een prisma ontstaat met als grondvlak een rechthoekige driehoek. Het is duidelijk dat het volume van dit prisma de helft is van het volume van de balk. Het prisma noemt hij een *qiandu*.

Het volstaat aan te tonen dat het volume van de yangma het dubbele is van dat van de bienao; dan zijn hun volumes immers $\frac{2}{3}$ en $\frac{1}{3}$ van de halve balk, dus $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{6}$ van de hele balk.

Hui splitst beide ruimtefiguren op. Daarvoor gebruikt hij drie snijvlakken: een snijvlak door het midden van de opstaande ribben van de balk, en twee snijvlakken hier loodrecht op (zie de figuur hieronder). Zo verdeelt hij de yangma *CDFE.B* in twee kleinere yangma's *IHKL.B* en *POQE.L*, een kleinere balk *DNOR.HKLI* en twee kleinere qiandu's *KNF.LOQ* en *LOP.IRC*. De bienao *ABCE* wordt opgesplitst in twee kleinere bienao's *BGIL* en *LMPE* en twee qiandu's *AJM.GIL* en *LMP.IJC*. De afmetingen van de kleinere figuren zijn de helft van de afmetingen van de oorspronkelijke figuren.



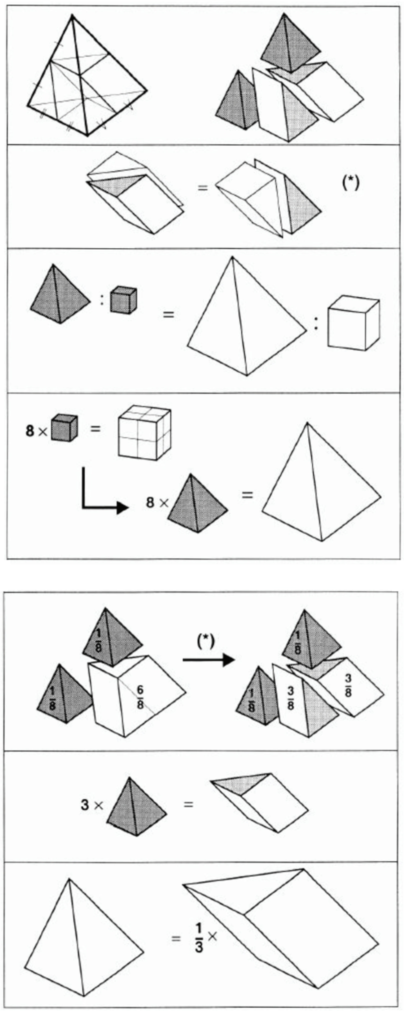
Als we het aantal kleinere balken tellen, zijn er links, aan de kant van de yangma, twee (namelijk één hele en twee halve) en rechts, aan de kant van de bienao, één (namelijk twee halve). Verder hebben we aan beide kanten twee kleinere versies van de oorspronkelijke figuur.

Die kleine yangma's en die kleine bienao's kunnen we weer opdelen. Weer krijgen we telkens twee balken en twee yangma's aan de ene kant en één balk en twee bienao's aan de andere kant. De yangma's en bienao's kunnen weer worden opgedeeld in nog kleinere stukken. Steeds heb je aan de linkerkant dubbel zoveel balkjes als rechts. Als je dat altijd blijft doen, worden de yangma's en de bienao's kleiner en kleiner zodat als het ware de balkjes het hele volume uitmaken. Cauchy zou hier zeggen: het gezamenlijke volume van de kleine yangma's en bienao's kan zo klein gemaakt worden als men wil, kleiner dan een vooraf gekozen klein positief getal ε, door het aantal stappen groot genoeg te nemen. Maar Hui dacht blijkbaar aan een soort 'fysische limiet' (een beetje zoals wanneer wij zeggen 'kleiner dan één molecule') onder dewelke het geen zin meer heeft om over volume te spreken: 'De yangma's en de bienao's worden zo klein, dat ze geen volume meer hebben'.

Volume van een willekeurige piramide in 'stukjes'?

Tot hier toe bewezen we de formule voor het volume van een piramide enkel in speciale gevallen. We willen hier het algemene geval bespreken en dit in ‘stukjes’ doen, niet in ‘plakjes’. Een eerste bedenking is dat het volstaat te werken met een piramide met driehoekig grondvlak, met andere woorden een willekeurig viervlak. Immers, het grondvlak van een willekeurige piramide kan worden verdeeld in driehoeken.

We bekijken het stripverhaal in de volgende figuur, uit Kindt (1999).

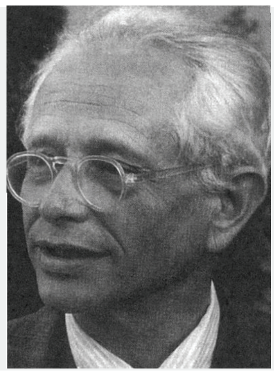


We laten dit stripverhaal voor zichzelf spreken. We stippen enkel aan dat Martin Kindt niet alleen steunt op knippen en plakken, maar ook gebruik maakt van het effect op het volume van een verdubbeling van alle afmetingen (het volume wordt acht keer zo groot). Kindt legt dit uit aan de hand van hetzelfde fenomeen bij een kubus, waar je het gemakkelijk kunt ‘natellen’, gecombineerd met het principe ‘als je alle afmetingen van twee figuren verdubbelt, dan verandert er niets aan de verhouding van de volumes van die figuren’. Dit principe lijkt erg elementair, maar kan niet louter met knippen en plakken, zonder limietproces, worden bewezen.

De onmogelijkheid van een bewijs ‘in stukjes’

In het jaar 1900, op het grote wereldcongres van de wiskundigen in Parijs, stelde David Hilbert 23 problemen voor die de wiskunde van de twintigste eeuw in grote mate zouden bepalen. Verschillende van deze problemen zijn intussen opgelost; enkele staan nog open. Het derde probleem van Hilbert kwam neer op de bepaling van het volume van een willekeurig viervlak door ‘knippen en plakken’ met een eindig aantal stukken. Hilbert had de intuïtie dat dit onmogelijk zou zijn, maar hier was nog geen sluitend bewijs voor. De formulering van Hilbert was ‘bewijs dat er twee viervlakken bestaan met zelfde grondvlak en hoogte maar die niet tot elkaar kunnen worden omgevormd door knippen en plakken met een eindig aantal stukken’. Men kan aantonen dat deze formulering equivalent is met de onmogelijkheid van de volumebepaling van een piramide in stukjes. Max Dehn loste het probleem enkele maanden later op door te bewijzen dat het onmogelijk is. Het bewijs van Dehn steunt op hogere wiskunde maar de basisidee is wel te begrijpen: met elk veelvlak associeert hij een ‘Dehn-invariant’. Dit is een getal dat hetzelfde is voor veelvlakken die je via een eindige knip- en plakoperatie tot elkaar kunt omvormen. Dan laat hij zien dat er twee viervlakken bestaan waarvan de oppervlakte van het grondvlak en de hoogte gelijk zijn, maar die een verschillende Dehn-invariant hebben.


David Hilbert (1862-1943)


Max Dehn (1878-1952)

Een bewijs voor het volume van een viervlak, en dus van een piramide, is dus onmogelijk zonder gebruik te maken van een limietproces (zoals bij de bewijzen ‘in plakjes’ of zoals bij het steeds verder opdelen in stukjes door Liu Hui) of van een vergroting of verkleining (zoals in het stripverhaal van Kindt). Het verknippen en plakken met een eindig aantal stukken volstaat niet, in tegenstelling met de bepaling van de oppervlakte van een driehoek in het vlak. Dit onmogelijkheidsbewijs is het eindpunt van een hele geschiedenis, waarin je naast de plakjes-tendens vele pogingen terugvindt om het volume te bepalen met ‘stukjes’. Deze pogingen waren dus achteraf gezien tot mislukken gedoemd.

Michel Roelens
Katholieke Hogeschool Limburg, Diepenbeek
Maria Boodschaplyceum, Brussel

Literatuur

Barra, M. (1998). Che fine farà Allice? Da Euclide al 1965 con l'equiscomponibilità. *Cabrirrsae. Bollettino degli utilizzatori di Cabri-Géomètre, 15*, 2-5.

Bockstaele, P. (1971). *Meetkunde van de ruimte voor het middelbaar en normaal onderwijs*. Antwerpen: Standaard.

Cromwell, P. R. (1997). *Polyhedra*. Cambridge: Cambridge University Press.

Dunham, W. (1991). *Journey through genius. The great theorems of mathematics*. New York: John Wiley and Sons.

Kindt, M. (1999). Wat te bewijzen is: het volume van een piramide. *Nieuwe Wiskrant, 19*(2), 30-31.

Lloyd, G. (1996). Finite and infinite in Greece and China. *Chinese Science 13*, 11-34.

Roelens, M., & Willems, J. (2005). Oppervlakte en volume door de eeuwen heen. *Uitwiskeling, 21*(3), 16-37.

Roelens, M. (2008). The volume of a pyramid through the ages. To slice or not to slice, that's the question! In Barbin, E., Stehlikova, N., & Tanakis, C. (Eds.), *History and Epistemology in Mathematics Education: Proceedings of the Fifth European Summer University (ESU 5).* Prague: Vydavatelsky servis Plzen.

Roelens, M. (2008). Le volume d'une pyramide à travers les siècles: en tranches ou en morceaux? *Losanges, 2*, 27-34.

Ver Eecke, P. (1960). *Oeuvres complètes d'Archimède, suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon.* Liège: Vaillant-Carmanne.

Wilson, A.M. (1995). *The infinite in the finite*. Oxford: Oxford University Press.

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html (Elementen van Euclides met applets)

Noot

[1] Een *parallellepipedum* is de ruimtelijke tegenhanger van het parallellogram: een (recht of schuin) prisma met als grondvlak een parallellogram. Een balk is dus een speciaal parallellepipedum, waarbij de hoeken van alle zijvlakken recht zijn. In het Frans wordt een balk trouwens meestal '*un parallélépipède rectangle*' (een rechthoekig parallellepipedum) genoemd.