Het is bekend dat een reëel getal een irrationaal kwadratisch getal is *als* en *alleen als* de kettingbreukontwikkeling periodiek is. Algemeen wordt aangenomen, op basis van bestaande bewijzen, dat het veel technischer is om *alleen als* te bewijzen dan *als.* Dit artikel van **Piet Lemmens** toont aan dat deze aanname onjuist is.

Kettingbreuken van kwadratische getallen

Een mythe ontmaskerd

Inleiding

De gewone (of reguliere) kettingbreukontwikkeling (KBO) van een reëel getal x_0 begint met te schrijven $x_0 = a_0 + r_0$, waarin $a_0 = [x_0]$, de entier van x_0, en r_0 is het overschot, dus $0 \le r_0 < 1$.

We stoppen als $r_0 = 0$, en anders schrijven we $r_0 = \frac{1}{x_1}$ en $x_1 = a_1 + r_1$,

zodat $x_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + r_1}$.

We stoppen weer als $r_1 = 0$, en anders schrijven we $r_1 = \frac{1}{x_2}$ en $x_2 = a_2 + x_2$, zodat

$$x_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + r_2}}, \text{ enzovoort.}$$

De KBO stopt als een overschot 0 is. Dat gebeurt als x_0 rationaal is, maar voor irrationale x_0 gaat het proces oneindig lang door. De tijdens het proces optredende entiers heten de wijzergetallen. Op ieder moment kan de KBO worden afgebroken door 0 te nemen in plaats van het echte overschot, en dan krijgen we na uitwerking een benadering van x_0 in de vorm van een onvereenvoudigbare breuk.

Voorbeelden

$$\frac{102}{527} = 0 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6}} = \frac{6}{31}$$

$$\pi = \left(3 + \cfrac{1}{\left(7 + \cfrac{1}{\left(15 + \cfrac{1}{\left(1 + \cfrac{1}{(292 + \ldots)}\right)}\right)}\right)}\right)$$

met wijzergetallen 3, 7, 15, 1, 292, ... en benaderende breuken:

3

$3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$, de gebruikelijke eerste benadering

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = \frac{333}{106}$$

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113},$$

de zogenaamde breuk van Metius, waarvan de decimale ontwikkeling tot zes plaatsen achter de komma overeenkomt met die van π.

$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)}$, dus de KBO van $\sqrt{2}$ heeft als eerste wijzergetal 1, en daarna zijn alle wijzergetallen 2.

De eerste vijf wijzergetallen van $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ zijn 0, 3, 6, 1, 5, als mijn rekenmachientje de goede antwoorden levert, met achtereenvolgende benaderingen, 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{6}{19}$, $\frac{7}{22}$, $\frac{41}{129}$.

Wie er meer over wil weten, leze bijvoorbeeld hoofdstuk 14 van het boek van Frits Beukers, *Getaltheorie voor beginners*, nummer 42 in de Epsilonreeks, of de bij de auteur gratis te verkrijgen syllabus *Kettingbreuken* (voor zover de voorraad strekt).

Irrationale kwadratische getallen

Een irrationaal kwadratisch getal is een irrationaal getal dat te schrijven is in de vorm

$$\frac{(A + \sqrt{D})}{B},$$

waarin A, B, D gehele getallen zijn, $B \ne 0$ en $D > 0$, D niet het kwadraat van een geheel getal, en B een gehele deler van $D - A^2$.

Een oneindig voortlopende KBO heet periodiek als er een overschot is dat na een aantal stappen weer opnieuw optreedt. Een getal met een periodieke KBO voldoet aan een kwadratische vergelijking met gehele coëfficiënten, en is dus een irrationaal kwadratisch getal. Ook algemeen bekend is dat de omkering geldt:

> Een irrationaal kwadratisch getal heeft een periodieke KBO.

Maar overal leest men dat het bewijs hiervan een stuk moeilijker is. Inderdaad wordt daarvoor intensief gebruik gemaakt van de manier waarop de KBO convergeert. Hier wil ik een heel elementair bewijs laten zien, dat geen gebruik maakt van de convergentie van een KBO.

Zij X_0 een irrationaal kwadratisch getal, geschreven in de vorm zoals boven aangegeven. Kortheidshalve schrijven we $d = \sqrt{D}$, zodat $X_0 = \frac{(A+d)}{B}$. In de volgende redenering houden we d constant.

Het is niet moeilijk aan te tonen dat $X_0 - [X_0]$ en $\frac{1}{X_0}$ weer zo te schrijven zijn, met dezelfde d, maar eventueel andere gehele getallen in plaats van A en B. We zullen de volgende stelling bewijzen:

STELLING. Zij $Z = \frac{(E+d)}{F}$, met gehele E en F, $F \neq 0$, en F een gehele deler van $d^2 - E^2$. Dan is

$$\frac{1}{Z} - \left[\frac{1}{Z}\right] = \frac{(U+d)}{V}\text{, met gehele } U \text{ en } V,\ V \neq 0\text{, en V een}$$

gehele deler van $d^2 - U^2$.
Als $0 < Z < 1$, dan geldt bovendien $|U| < \max\{|E|, d\}$.

Aangezien alle overschotten in de KBO van X_0 tussen 0 en 1 liggen, kunnen we dus met inductie de rij van overschotten noteren in de vorm

$$r_n = \frac{(A_n + d)}{B_n} \quad \text{voor } n = 0, 1, 2, \ldots \text{ en gebruiken dat voor}$$

iedere n vanaf 0 geldt

$$|A_{n+1}| < \max\{|A_n|, d\} \quad \text{en } B_n \text{ een gehele deler van}$$

$$d^2 - (A_n)^2.$$

Als $|A_0| > d$, begint de rij $|A_0|$, $|A_1|$, $|A_2|$, ... dus met strikt monotoon te dalen tot een waarde kleiner dan d is bereikt, en daarna is er misschien geen monotonie meer, maar blijft A_n tussen $-d$ en d, en blijft B_n als gehele deler van $d^2 - (A_n)^2$ tussen $-d^2$ en d^2 zonder de waarde 0 aan te nemen. De overschotten kunnen dus slechts eindig veel waarden aannemen, en bijgevolg moet er een overschot zijn dat herhaald wordt, met andere woorden de KBO van X_0 is periodiek!

Het bewijs van de stelling

Merk op dat $d^2 - E^2 \neq 0$ omdat d^2 niet het kwadraat is van een geheel getal. Eerst kijken we naar

$$\frac{1}{Z} = \frac{F}{(E+d)} = \frac{F(-E+d)}{(d^2 - E^2)} = \frac{(-E+d)}{V},$$

immers F was een gehele deler van $d^2 - E^2$. Maar dan is V vanzelf ook een gehele deler van $d^2 - (-E)^2$ en $V \neq 0$. Het overschot is dan

$$\frac{(-E+d)}{V} - a = \frac{(U-d)}{V},$$

waarin $U = -E - aV$ en $a = \left[\frac{1}{Z}\right]$.

Dus $d^2 - U^2 = d^2 - E^2 - 2aEV - a^2V^2$, en inderdaad is V een gehele deler daarvan. Hiermee is het eerste deel van de stelling bewezen.
Omdat $0 < Z < 1$, weten we dat

$$\frac{(-E+d)}{V} > 0,\ \frac{(U+d)}{V} > 0,\ U = -E - aV,\ a \geq 1$$

een geheel getal is.

Er zijn twee gevallen te onderscheiden: $V < 0$ of $V > 0$.

Als $V < 0$, hebben we $-aV > 0$ en $U + d < 0$ en $U > -E$, dus $-E < U < -d$ en bijgevolg $|U| < |E|$.
Als $V > 0$, hebben we $-aV < 0$ en $U + d > 0$ en $U < -E$, dus $-U < -d$ en $U < -E \leq |E|$. Inderdaad, in beide gevallen geldt $|U| < \max\{|E|, d\}$.

Voorbeeld

We nemen $X = \frac{(42+d)}{(-125)}$ met $d = \sqrt{14}$, dus $3 < d < 4$.

De berekeningen voor de KBO van X worden dan

$\frac{(42+d)}{(-125)}$	=	$-1 + \frac{(-83+d)}{(-125)}$	met	$\lvert A_0\rvert = 83$
$\frac{(83+d)}{55}$	=	$1 + \frac{(28+d)}{55}$		$\lvert A_1\rvert = 28$
$\frac{(-28+d)}{(-14)}$	=	$1 + \frac{(-14+d)}{(-14)}$		$\lvert A_2\rvert = 14$
$\frac{(14+d)}{13}$	=	$1 + \frac{(1+d)}{13}$		$\lvert A_3\rvert = 1$
$\frac{(-1+d)}{1}$	=	$2 + \frac{(-3+d)}{1}$		$\lvert A_4\rvert = 3$
$\frac{(3+d)}{5}$	=	$1 + \frac{(-2+d)}{5}$		$\lvert A_5\rvert = 2$
$\frac{(2+d)}{2}$	=	$2 + \frac{(-2+d)}{2}$		$\lvert A_6\rvert = 2$
$\frac{(2+d)}{5}$	=	$1 + \frac{(-3+d)}{5}$		$\lvert A_7\rvert = 3$
$\frac{(3+d)}{1}$	=	$6 + \frac{(-3+d)}{1}$		$\lvert A_8\rvert = 3$

En we zien hier dus dat het overschot $\frac{-3+d}{1}$ wordt herhaald.

Piet Lemmens
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht