Een van de reacties op de plannen van de staatssecretaris in de *Nieuwe Wiskrant* van juni 2008 ging over een artikel van Jennifer Kaminski, waaruit zou blijken dat het werken met concrete voorbeelden een negatief effect heeft. **Johan Deprez** dook in het proefschrift dat aan het artikel ten grondslag ligt en deelt zijn bevindingen.

Concreet of abstract?

Inleiding

In een artikel met de titel ‘Abstracte wiskunde leert beter dan praktische voorbeelden’ kon je enige tijd geleden in de Vlaamse krant *De Standaard* het volgende lezen:

> Onderwijsdeskundigen gaan er al sinds jaar en dag vanuit dat praktische voorbeelden beter werken in de wiskundeles dan abstracte regels, maar onderzoekers onder leiding van Jennifer Kaminski van de Ohio State University schrijven in *Science* van deze week dat abstractie beter is (Kaminski et al., 2008; Stroeykens, 2008).

Het controversiële karakter van Kaminski’s bewering zette me ertoe aan om het proefschrift voor haar doctoraat (Kaminski, 2006), dat de basis vormt voor het artikel in *Science*, volledig door te nemen. Hier doe ik verslag van (een deel van) mijn bevindingen. We kunnen hier dieper ingaan op de kwestie dan de journalist van *De Standaard*, gezien ons meer gespecialiseerde doelpubliek. Ik leg eerst het basisexperiment uit dat Kaminski uitvoerde en geef daarna mijn reacties weer.

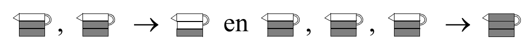
Het basisexperiment van Kaminski

Kaminski verrichtte in het totaal acht onderzoeken voor haar doctoraat. Op een van deze onderzoeken gaan we hier wat dieper in. Enkele andere onderzoeken komen zijdelings aan bod in de rest van deze bijdrage.

In het basisexperiment liet Kaminski proefpersonen (bachelorstudenten psychologie, maar dat heeft verder weinig belang) een stukje wiskunde leren dat voor hen nieuw was. De proefpersonen waren ingedeeld in twee groepen. De instructiefase was verschillend voor beide groepen. Nadien kregen beide groepen dezelfde test, waarin ze het geleerde moesten toepassen op een nieuw voorbeeld.

De eerste groep proefpersonen leerde over een archeoloog die kleitabletten met tekencombinaties ontcijferd heeft. De eenvoudigste tekencombinaties zijn van de vorm ‘teken 1, teken 2 $\rightarrow$ teken 3’, maar vóór de pijl kunnen er ook meer tekens staan. Er worden drie verschillende tekens gebruikt (ruit, cirkel en vlag; zie tabel 1). De algemene regels die de archeoloog ontdekte (zie ook hiervoor de tabel), kunnen in wiskundige termen geformuleerd worden als het bestaan van een neutraal element (vlag), commutativiteit en associativiteit. Om alle combinaties ‘uit te kunnen rekenen’, moet je verder nog de uitkomst kennen van enkele specifieke combinaties (zie weer de tabel). Kaminski ontwierp een ‘les’ hierover in de vorm van een reeks slides die de studenten zelfstandig doorwerkten op de computer. In deze les introduceerde ze de context, legde ze de algemene en specifieke regels uit en werkte ze voorbeelden van ‘berekeningen’ van tekencombinaties uit. Ze liet de studenten oefeningen maken binnen de archeologencontext en liet de studenten na elke oefening de uitwerking van de oefening zien, zodat ze hun resultaten onmiddellijk konden controleren.

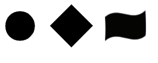
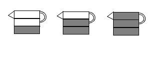
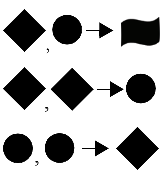
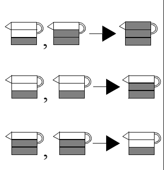
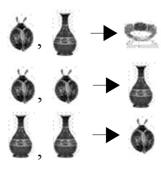
Bij de tweede groep proefpersonen is het combineren van abstracte symbolen vervangen door het bijeengieten van maatbekers die voor één derde, voor twee derde of volledig gevuld zijn (in een fabriek waar een bepaalde vloeistof geproduceerd wordt). Leidt het bijeengieten tot meer dan één maatbeker, dan let je alleen op wat in de laatste beker zit, bijvoorbeeld:



Verder wordt exact dezelfde informatie gegeven als bij de andere groep proefpersonen (zie tabel). Op de inkleding na wordt precies dezelfde les gebruikt als bij de eerste groep proefpersonen.

De test, tot slot, gaat over een fictief kinderspel waarbij drie voorwerpen gebruikt worden (tol, kever, ring, zie de tabel). Eén kind wijst twee (of meer) keer een voorwerp aan (herhaling mag) en een ander kind moet dan het voorwerp aanwijzen dat bij de reeks aangeduide voorwerpen hoort. In de tabel zie je de regels die gebruikt worden om dat voorwerp te bepalen. De proefpersonen kregen deze regels echter niet te zien. Aan hen werd verteld dat dit volgens dezelfde regels gebeurt als bij het systeem dat ze in de instructiefase leerden kennen en verder kregen ze een aantal voorbeelden van combinaties te zien. Deze informatie is in principe voldoende om alle mogelijke combinaties uit te rekenen.

Tabel 1: combinatieregels

	kleitabletten	maatbekers	kinderspel
elementen			
algemene regels	Als een symbool gecombineerd wordt met , dan is het resultaat dat andere symbool. De volgorde van de symbolen heeft geen belang voor het resultaat. Als er meer dan twee symbolen zijn, heeft het geen belang welke symbolen je eerst combineert.	Als een symbool gecombineerd wordt met , dan is het resultaat dat andere symbool. De volgorde van de symbolen heeft geen belang voor het resultaat. Als er meer dan twee symbolen zijn, heeft het geen belang welke symbolen je eerst combineert.	Als een symbool gecombineerd wordt met , dan is het resultaat dat andere symbool. De volgorde van de symbolen heeft geen belang voor het resultaat. Als er meer dan twee symbolen zijn, heeft het geen belang welke symbolen je eerst combineert.
specifieke combinaties			

Bij de test bleek de eerste groep proefpersonen het duidelijk beter te doen dan de tweede groep.

De wiskundige achtergrond van het experiment

Wie aan de universiteit wiskunde of fysica gestudeerd heeft, herkent ongetwijfeld het wiskundige object dat Kaminski aan haar proefpersonen voorschotelt: het gaat over het concept van een commutatieve groep. Een (al dan niet commutatieve) groep kun je kort omschrijven als een rekensysteem dat een directe veralgemening vormt van de klassieke bewerkingen met getallen en matrices. Een groep bestaat vooreerst uit een verzameling G van elementen. Deze elementen kunnen getallen zijn of matrices of nog andere objecten (bijvoorbeeld meetkundige transformaties als verschuivingen, draaiingen, spiegelingen, homothetieën, ...). We noteren deze elementen in het algemeen als $g_1, g_2, \ldots$ Bovendien moet je met deze elementen een bewerking kunnen uitvoeren, dat wil zeggen, je 'combineert' twee elementen uit de verzameling en krijgt als resultaat weer een element van de verzameling. Je kunt hier denken aan het optellen of vermenigvuldigen van getallen of matrices, maar de bewerking kan nog heel andere vormen aannemen, bijvoorbeeld het samenstellen van meetkundige transformaties. Zo'n abstracte bewerking wordt in de wiskunde vaak met een sterretje genoteerd: het toepassen van de bewerking op twee elementen g_1 en g_2 levert dan weer een element van G op dat als $g_1 * g_2$ genoteerd wordt. De verzameling G, uitgerust met de bewerking $*$, genoteerd als $G, *$, wordt een commutatieve groep genoemd als de volgende eigenschappen gelden:

- de bewerking $*$ is commutatief: voor alle elementen g_1 en g_2 in G geldt dat $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$;
- de bewerking $*$ is associatief: voor alle elementen g_1, g_2 en g_3 in G geldt dat $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$;
- G bevat een element n dat neutraal is voor de bewerking $*$: voor alle elementen g in G geldt dat $g * n = g$;
- elk element van G heeft een invers element: voor elk element g in G bestaat er een element g' in G waarvoor $g * g' = n$.

De eerste drie eigenschappen herken je duidelijk in de tabel. De vierde eigenschap wordt niet expliciet vermeld, maar zit vervat in de specifieke combinaties die gegeven worden.

Er bestaat een enorme verscheidenheid aan groepen. In het experiment van Kaminski bestaat de verzameling G uit slechts drie elementen. Dat vereenvoudigt de zaak enorm. Er bestaat namelijk in wezen slechts één commutatieve groep met drie elementen. De verzameling bestaat uit de getallen 0, 1 en 2 en de bewerking is 'optellen modulo 3': tel de getallen op en trek 3 af als je meer dan 2 uitkomt (bijvoorbeeld: $2 + 2 = 1$). Je kunt dezelfde groep onder andere verschijningsvormen ontmoeten. De verzameling kan bijvoorbeeld bestaan uit de draaiingen rond de oorsprong over 0°, 120° en 240°, waarbij twee draaiingen gecombineerd worden door ze na elkaar uit te voeren.

De interpretatie van het experiment door Kaminski (en *De Standaard*)

Het archeologenvoorbeeld focust op het abstracte groepsconcept. De symbolen en de bewerkingen die ermee uitgevoerd worden, hebben geen concrete betekenis. Kaminski noemt dit een 'generic instantiation' van het concept, wat we zouden kunnen vertalen als: een 'generiek voorbeeld'. Het voorbeeld blijft zeer dicht bij het abstracte concept en bevat slechts een minimum aan 'overtollige' informatie.

In het maatbekervoorbeeld kunnen we ons een concrete voorstelling maken van de elementen van de verzameling en van de bewerkingen die ermee uitgevoerd worden. Kaminski noemt dit een 'relevantly concrete instantiation' van het concept (er bestaat ook zoiets als 'irrelevant concreteness' maar dat is hier niet van belang). Deze term laat zich moeilijker vertalen in het Nederlands: een 'voorbeeld dat op een relevante manier concreet is'.

De test is een transfertaak: slagen de proefpersonen er in om de kennis die ze opgedaan hebben, te gebruiken in een nieuw voorbeeld? Zoals gezegd: de proefpersonen die het generieke voorbeeld leerden, deden het op deze test beter dan de studenten die het concrete voorbeeld leerden. In een van de andere experimenten werd gewerkt met meerdere concrete voorbeelden (die allemaal erg geleken op het maatbekervoorbeeld). Ook dan waren de resultaten op de transfertest minder goed dan die van de groep die het generieke voorbeeld leerde. Studenten die zowel het generieke voorbeeld als een concreet voorbeeld kregen, deden het minder goed dan de studenten die alleen het generieke voorbeeld kregen. Kaminski besluit:

> giving college students multiple concrete examples may not be the most efficient means of promoting transfer of knowledge

en

> these findings could likely be generalized to other areas of mathematics (Kaminski et al., 2008).

De journalist van *De Standaard* formuleert de conclusies een stuk affirmatiever dan in het onderzoek van Kaminski. Zo zijn haar 'may' en 'could' gesneuveld in de versie van *De Standaard*. De indruk wordt gewekt dat de conclusies toepasbaar zijn op een veel ruimer domein dan in het onderzoek:

> Gaat wiskunde op school over treinen die elkaar tegemoet rijden, leeglopende badkuipen [...]? Of over abstracte vergelijkingen met *x* en *y* en breuken en kwadraten? En welk van die twee werkt het best? (Stroeykens, 2008).

Een faire vergelijking?

Mijn belangrijkste kritiek op het onderzoek van Kaminski is dat de toepassing in de test veel meer overeenkomst vertoont met het archeologenvoorbeeld dan met het maatbekervoorbeeld. Ook in de test gaat het over 'zinloze' symbolen en bewerkingen zonder betekenis. Voor de proefpersonen die het generieke voorbeeld geleerd hebben, gaat het daarom over een veel nabijere en gemakkelijker vorm van transfer. Het resultaat van de test is dan ook helemaal niet verrassend. Dit is gewoon geen eerlijke vergelijking.

Kaminski heeft voor beide instructievormen de overeenkomst tussen de les en de test laten beoordelen door mensen die verder niet aan de experimenten deelnamen. Er werd een verschil vastgesteld in de beoordelingen (minder overeenkomst tussen het maatbekervoorbeeld en de test), maar dat verschil was statistisch niet significant. Dit gedeelte van haar werk is echter weinig overtuigend: er werden relatief weinig mensen betrokken bij deze beoordeling, ze blijft vaag over de precieze vragen die voorgelegd werden, ...

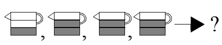
Minder of anders?

Het is mijn overtuiging dat de maatbekergroep niet minder geleerd heeft dan de archeologengroep, maar dat ze integendeel andere dingen geleerd heeft. Ik baseer me hiervoor op een analyse van de gebruikte voorbeelden (en op de resultaten van een ander experiment van Kaminski dat ik in de volgende paragraaf bespreek).

De archeologengroep maakte kennis met het abstracte groepsconcept. Deze studenten leerden werken met abstracte symbolen en bewerkingen zonder verdere betekenis en focusten op de eigenschappen van die bewerkingen. Dat was namelijk het enige waar ze op konden terugvallen om de combinaties van symbolen uit te rekenen. Als je iemand uit deze groep vraagt om

te berekenen, dan zal die bijvoorbeeld als volgt redeneren: de ruit en cirkel geven samen een vlag, als je er de cirkel aan toevoegt blijft het een cirkel en als je er tot slot nog een cirkel aan toevoegt krijg je een ruit. Voor elke stap wordt een beroep gedaan op de informatie uit de tabel.

Als je daarentegen iemand vraagt om de combinatie



te berekenen, dan mag je wellicht een heel ander type redenering verwachten: in totaal zijn er zeven deeltjes; dat geeft twee volle bekers en een beker die voor één derde gevuld is; de uitkomst is dus een beker die voor één derde gevuld is. Deze studenten steunen met andere woorden op de betekenis van de symbolen en de bewerkingen. Zij maken geen gebruik van de formele eigenschappen van de bewerking. De redeneringen die deze studenten maken, komen neer op het rekenen modulo 3 (met één verschil: in plaats van 0 wordt 3 gebruikt).

Ik denk dus dat de archeologengroep kennismaakte met het concept van een abstract rekensysteem, terwijl de maatbekergroep kennismaakte met het modulorekenen.

Transfer?

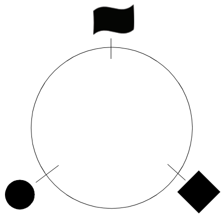
Uit de test bleek duidelijk dat de studenten uit de maatbekergroep het concept van een abstract rekensysteem niet opgepikt hebben. Zij hebben niet geleerd dat je ook kunt rekenen met symbolen zonder betekenis via bewerkingen die ook geen betekenis hebben, louter door te steunen op de eigenschappen van de bewerking.

Maar ook de archeologengroep merkte niet alles op wat in het voorbeeld aanwezig was. Het modulorekenen was impliciet aanwezig in het voorbeeld: de vlag correspondeert met 0, de ruit met 1 en de cirkel met 2 (of omgekeerd voor wat de laatste twee betreft). Dat dit aspect aan de proefpersonen voorbij ging, blijkt duidelijk uit een van de andere onderzoeken uit het doctoraat van Kaminski.

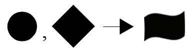
In dat andere onderzoek ging de transfertest over een groep met vier in plaats van drie elementen. De elementen werden voorgesteld door symbolen zonder betekenis en ook de bewerking had geen concrete betekenis, net zoals in het archeologenvoorbeeld. Aan de proefpersonen werd verteld dat dit nieuwe rekensysteem dezelfde eigenschappen had als in het archeologenvoorbeeld en verder kregen ze enkele voorbeelden van combinaties van elementen. Op basis van deze informatie moesten ze een aantal nieuwe combinaties uitrekenen. Het rekensysteem in de test kwam neer op het rekenen modulo 4, maar dat werd er natuurlijk niet bij gezegd.

De studenten uit de archeologengroep bakten er helemaal niets van bij deze test. Het transferverhaal is dus helemaal niet zo rooskleurig voor de archeologengroep als de artikelen in *Science* en *De Standaard* ons willen laten geloven!

De maatbekergroep deed niet mee aan deze test, maar er was wel een interessante andere groep van proefpersonen. Naast een verbale beschrijving van het rekensysteem kreeg deze groep ook een grafische voorstelling ervan.



Om bijvoorbeeld



te berekenen met deze grafische voorstelling, start je op de plaats van de cirkel die door ● aangegeven wordt en draai je daarna één plaatsje door (omdat ◆ bij het ‘eerste’ streepje staat). De proefpersonen met de grafische voorstelling scoorden veel beter op de test dan de archeologengroep.

Waarom deed deze groep het zoveel beter dan de archeologengroep? De proefpersonen met de grafische voorstelling proefden van twee werelden. Enerzijds leerden deze proefpersonen dat je kunt rekenen met abstracte symbolen. Anderzijds kregen ze ook het modulorekenen mee via de grafische voorstelling. In de test hadden ze beide nodig: er moest met (andere) abstracte symbolen gerekend worden, maar het was ook erg nuttig om in te zien dat het ging over rekenen modulo 4. De archeologengroep heeft tijdens de instructiefase alleen geleerd dat je kunt rekenen met abstracte symbolen. Het concept van het modulorekenen is aan hen voorbij gegaan.

De maatbekergroep heeft niet aan deze test deelgenomen, maar wellicht zou deze groep het niet goed gedaan hebben. De proefpersonen uit deze groep hebben namelijk niet geleerd dat je kunt rekenen met abstracte symbolen, wat noodzakelijk is om de test tot een goed einde te brengen.

Twijfel bij de veralgemeenbaarheid

Kaminski zegt wel heel gemakkelijk dat de conclusies wellicht te veralgemeniseren zijn naar andere domeinen van de wiskunde. Daar heb ik ernstige twijfels bij.

Vooreerst: een leerproces van een wiskundig concept is een ingewikkeld gegeven waarin veel parameters een rol spelen. Alleen al daarom is het altijd gevaarlijk om algemene uitspraken te doen. Er is een grote diversiteit in wiskundige domeinen: algebra, meetkunde, statistiek, ... Dat maakt het moeilijk om de leerprocessen voor één concept te vergelijken met die voor een ander concept.

Een tweede punt is dat de onderwezen leerinhoud in dit geval supereenvoudig is. Alleen de groep met twee elementen zou nog eenvoudiger zijn. De afstand tussen het experiment en de schoolwiskunde is dermate groot dat het wel erg speculatief is om de conclusies uit het experiment zomaar te extrapoleren naar de klassenpraktijk (nog los van de grote twijfels die ik zo al heb bij de conclusies).

Het is ook nog maar de vraag hoe de les met het generieke voorbeeld er moet uitzien als de wiskunde iets ingewikkelder wordt. Het is bijvoorbeeld al onmiddellijk duidelijk dat je de les voor de archeologengroep niet op dezelfde manier zou kunnen opbouwen wanneer het gaat over de groep met vijf of zeven in plaats van drie elementen. Er zouden dan immers al tien, respectievelijk 21 specifieke combinaties gegeven moeten worden in plaats van drie.

Niet het soort concrete voorbeelden waar wiskundedidactici voor pleiten

De les waarin Kaminski gebruik maakt van het voorbeeld, vind ik helemaal geen goede les. Als ik in mijn lessen vakdidactiek pleit voor het gebruik van voorbeelden om abstracte concepten in te leiden, heb ik toch wel iets anders voor ogen. Mijns inziens worden er in de les van Kaminski een heel aantal didactische basisregels overtreden. Op enkele hiervan ga ik wat dieper in.

De les gaat alleen over het voorbeeld. Er is geen abstraheringsfase waarin de leerlingen los komen van het voorbeeld. Ervaren lesgevers weten dat leerlingen een dergelijke abstrahering niet zelfstandig maken. Je moet vertrekken vanuit de leerling, maar je mag daar niet blijven steken. Je moet uiteindelijk wel bij de wiskunde uitkomen. Het doel is: wiskundige kennis verankeren in het denken van de leerlingen. Door het ontbreken van de abstraheringsfase is de les van Kaminski er een waarvan de doelstellingen en de inhoud niet op elkaar afgestemd zijn. Tijdens de les leren de leerlingen andere dingen dan wat op de test gevraagd wordt.

Hoewel er in de maatbekercontext expliciet aandacht besteed wordt aan bijvoorbeeld de commutatieve en associatieve eigenschap, passen de leerlingen deze eigenschappen niet toe in de test. Op het eerste gezicht kan dat verwondering wekken. Er is echter een eenvoudige verklaring. De commutatieve en associatieve eigenschap zijn in de maatbekercontext volkomen evident. In deze context hebben ze geen enkel 'nut'. Het gaat niet om functionele instrumenten waarmee je een probleem kunt oplossen dat je anders niet kunt oplossen. En wat niet nuttig is, wordt niet geleerd... Ik kan me voorstellen dat de maatbekergroep de passages in de les over de commutatieve en associatieve eigenschap ervaren heeft als irrelevant.

Het verhaal dat Kaminski bij de maatbekers verzint, is zeer artificieel: waarom vult de machine de maatbekers precies tot op één derde, twee derden of helemaal? Waarom worden maatbekers gecombineerd? Ook de andere 'relevantly concrete instantiations' zijn erg vergezocht. Zo gaat het bijvoorbeeld over pizza's die voor één derde, twee derden of helemaal verbrand zijn. Dit gaat duidelijk over het inkleden van een stukje wiskunde, niet over het oplossen van een levensecht probleem met wiskunde. De kans is klein dat de proefpersonen zich aangesproken gevoeld hebben. Wellicht heeft dit de conclusies van het onderzoek niet noemenswaardig beïnvloed (omdat het uiteindelijk voor beide groepen proefpersonen speelde). Maar het is alvast niet het soort voorbeelden waar wiskundedidactici voor pleiten...

Toch een aanleiding om goed na te denken over het gebruik van voorbeelden

Je hebt ongetwijfeld gemerkt dat ik niet geloof dat Kaminski aangetoond heeft dat 'abstracte wiskunde beter leert dan praktische voorbeelden'. Haar argumenten zijn niet overtuigend. Dat betekent natuurlijk nog niet dat haar conclusie noodzakelijk fout is, of dat het omgekeerde waar zou zijn. En het is zeker niet zo dat een les goed zou zijn van zodra ze met concrete voorbeelden begint. De voorbeelden moeten van een goede kwaliteit zijn en de les moet didactisch opgebouwd zijn. En we moeten er ons van bewust zijn dat het werken met concrete voorbeelden niet alleen maar voordelen heeft, maar ook nadelen. Ik noem één zo'n nadeel, waarvan ik me beter bewust geworden ben door het lezen van het werk van Kaminski: een voorbeeld bevat altijd overtollige informatie en die kan de aandacht afleiden van wat feitelijk geleerd moet worden. Of in de woorden van Kaminski:

> [...] concrete information may compete for attention with deep to-be-learned structure (Kaminski, 2008).

Johan Deprez
Faculteit Economie en Management,
Hogeschool-Universiteit Brussel
Instituut voor Onderwijs- en Informatiewetenschappen,
Universiteit Antwerpen
Specifieke Lerarenopleiding Wiskunde,
Katholieke Universiteit Leuven

Dit artikel is eerder verschenen in *Uitwiskeling*, 24/4 (herfst 2008)

Literatuur

Kaminski, J. A. (2006). *The effects of concreteness on learning, transfer, and representation of mathematical concepts.* Dissertation. Ohio: The Ohio State University.
http://www.ohiolink.edu/etd/send-pdf.cgi/Kaminski Jennifer A.pdf?acc_num=osu1155223799

Kaminski, J.A., Sloutsky, V.M., & Heckler, A.F. (2008). The advantage of abstract examples in learning math. *Science,* 320, 454-455.

Stroeykens, S. (2008). Abstracte wiskunde leert beter dan praktische voorbeelden. *De Standaard*, 30 april 2008, W29.