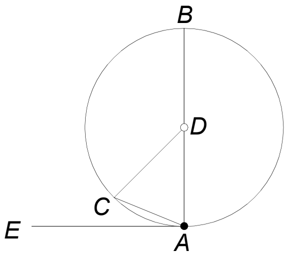
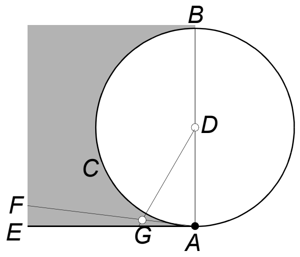
Wat te bewijzen is (43)

Rubriek

In de geschiedenis van de wiskunde heeft de cirkel ongetwijfeld de primeur waar het om het begrip *raaklijn* gaat. Ik neem de lezer mee naar boek 3 van Euclides' Elementen: *men zegt dat een rechte lijn een cirkel raakt, als die lijn, de cirkel ontmoetende, bij verlenging de cirkel niet snijdt.* Propositie 16 in hetzelfde boek zegt: *de rechte lijn onder een rechte hoek met de middellijn van een cirkel door een uiteinde van deze getrokken, zal buiten de cirkel vallen en in de ruimte tussen de rechte en de cirkelomtrek zal geen andere rechte vallen.* Daarmee is de stelling nog niet ten einde, want in één adem vervolgt Euclides met: *en de hoek van de halve cirkel is groter dan en de overblijvende hoek kleiner dan elke rechtlijnige scherpe hoek,* Het eerste gedeelte van de stelling gaat over het wezenlijke kenmerk van een raaklijn aan een kromme, namelijk dat een raaklijn zo nauw bij een kromme aansluit dat er, in de buurt van het raakpunt, tussen de kromme en die lijn geen ruimte is voor nog een andere lijn. Het tweede deel is verrassend, omdat er sprake is van een hoek tussen een cirkel en een rechte lijn. Het komt er op neer dat de cirkel hoeken van 0° en 90° met raaklijn en straal maakt.

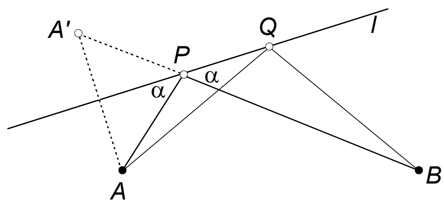
Het bewijs van het eerste deel gaat uit het ongerijmde: *AB* is middellijn van een cirkel met middelpunt *D*. Euclides' redenering komt hierop neer: Stel dat de loodlijn in *A* op *AB* de cirkel zou snijden in *C*, dan zou de gelijkbenige driehoek *DAC* twee rechte hoeken bevatten, hetgeen onmogelijk is.





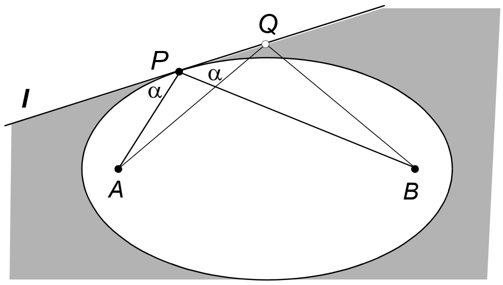
Vervolgens toont hij aan dat er binnen het gebied tussen de loodlijn *AE* op *AB* en de cirkelboog *ACB* (in de figuur is dat gebied grijs getint) geen rechte lijn door *A* kan bestaan. Zou de lijn *AF* geheel in dat gebied liggen, dan zou het voetpunt *G* van de loodlijn uit *D* op *AF* buiten de cirkel (en in het grijze gebied) liggen. Omdat in driehoek *DAG* tegenover de grootste hoek de grootste zijde ligt, zou dan uit het feit dat hoek *FAD* scherp is, volgen dat lijnstuk *AD* groter is dan lijnstuk *DG*, en bijgevolg moet *G* juist binnen de cirkel liggen. Hiermee is een tegenspraak bereikt.
Hier past nog een kritische kanttekening. Euclides beschouwt kennelijk de *halfrechten AE* en *AF* en neemt voetstoots aan dat het voetpunt *G* van de loodlijn uit *D* op de drager van *AF* (zeg *l*) tussen *A* en *F* ligt. Nu bevindt de andere helft van *l* zich 'onder' de raaklijn in *A* (dat wil zeggen in dat halfvlak bepaald door de raaklijn, waarin *D* niet ligt) en het is eenvoudig in te zien dat ieder punt van die andere helft verder van *D* ligt dan *A*. Het punt *G* van *l* dat het dichtst bij *D* ligt, moet dus wel tussen *A* en *F* liggen en daarmee is Euclides' conclusie gerechtvaardigd.

Raaklijn aan de ellips
Een andere Griek, Heron van Alexandrië, die zo'n 400 jaar na Euclides leefde, toonde overtuigend aan dat als twee punten *A* en *B* aan dezelfde kant van de lijn *l* liggen, de kortste geknikte weg van *A* via *l* naar *B* geconstrueerd wordt volgens wat ik hier maar even het 'gelijke-hoek-principe' noem.



Het komt hier op neer: spiegel *A* in *l*, verbind het spiegelbeeld *A'* met *B* en het snijpunt *P* van *A'B* en *l* is het tussenpunt van de kortste route. Immers, iedere route van *A* naar *B* via *l* correspondeert met een even lange route van *A'* naar *B* via *l* en van al die routes is de niet-geknikte de kortste. Een direct gevolg is nog dat *AP* en *BP* gelijke hoeken maken met *l*. In 'optica-forma': *hoek van inval = hoek van terugkaatsing.*

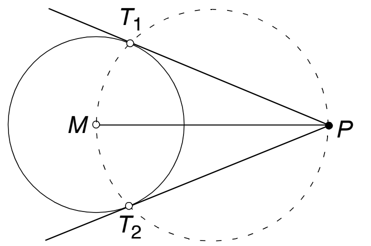
Vatten we nu *A* en *B* op als de brandpunten van een ellips die door *P* gaat, dan is het duidelijk dat elk punt van *l* dat niet *P* is, buiten de ellips ligt en daarom wordt *l* een raaklijn van de ellips genoemd. En er volgt meteen ook een eigenschap die reeds lang voor Heron bekend was, namelijk dat de raaklijn van een ellips gelijke hoeken maakt met de lijnen van het raakpunt naar de beide brandpunten.



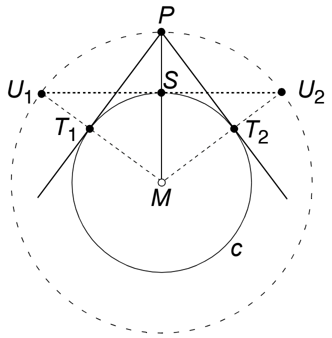
Ook hier kan worden aangetoond dat in het grijze gebied tussen de ellips en de lijn *l* geen plaats is voor andere rechten uit *P,* maar dat laat ik over aan de lezer.

Raaklijnconstructies bij de cirkel

In mijn schooltijd leerden we een constructie voor de beide raaklijnen aan een punt P buiten een cirkel met middelpunt M. Daarbij werd gebruik gemaakt van de stelling van Thales die zegt dat de lijnen vanuit een punt van de cirkel naar de eindpunten van een middellijn, loodrecht op elkaar staan. Wij moesten dat heel netjes doen, met passer en liniaal: eerst het midden van lijnstuk MP construeren, dan de hulpcirkel met middellijn MP snijden met de gegeven cirkel, en de raakpunten T_1 en T_2 zijn gevonden! En dat niet alleen: er is meteen ook bewezen dat er door een punt buiten de cirkel precies twee raaklijnen van die cirkel gaan.

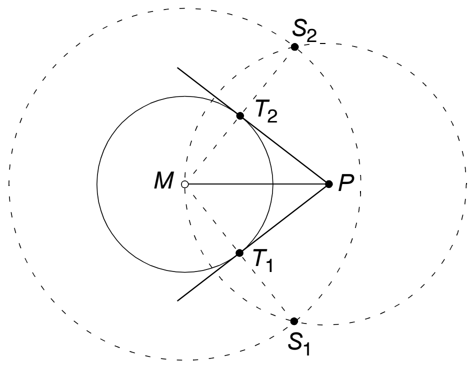


Voorwaar, een fraai staaltje meetkunde dat mij als dertienjarige zeer aansprak. Later als leraar heb ik deze constructie vaak behandeld en omdat die constructie in alle schoolboeken stond, leefde ik lang in de veronderstelling dat zij van Euclides afkomstig is. Mis! Euclides doet het anders. Hij beschrijft een cirkel door P die concentrisch is met de gegeven cirkel. Vanuit het snijpunt S van de gegeven cirkel met lijnstuk MP trekt hij de loodlijn op MP. Die loodlijn snijdt de hulpcirkel in de punten U_1 en U_2. De raakpunten T_1 en T_2 van de raaklijnen uit P zijn nu juist de snijpunten van de lijnstukken MU_1 en MU_2 met de gegeven cirkel. Euclides bewijst zijn constructie via de congruentie (ZHZ) van de driehoeken MPT_1 en MU_1S.



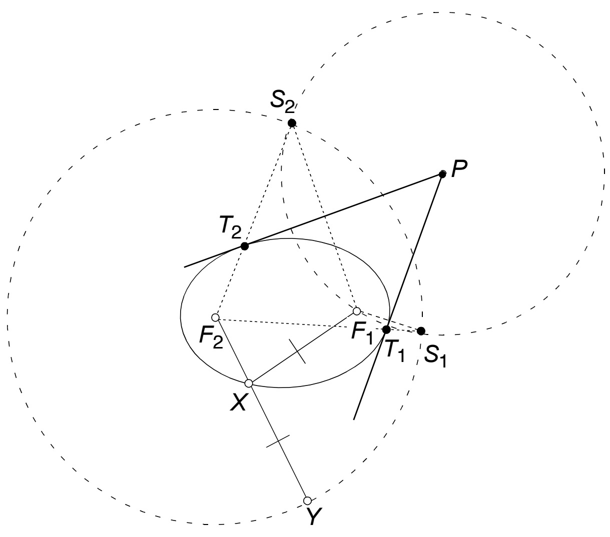
Beide hier beschreven constructies kunnen moeiteloos met een interactief meetkundeprogramma als Cabri of Geocadabra worden uitgevoerd, en hoewel er 'serieuze' wiskundigen zijn die dit soort activiteiten als archaïsch beoordelen, durf ik ze toch van harte aan te bevelen. Een pittige uitdaging voor leerlingen kan zijn om zelf een alternatieve constructie te bedenken (met bijbehorende legitimering natuurlijk). Hier volgt nog zo'n andere constructie. Vermenigvuldig cirkel c vanuit M met factor 2. Snijd de grote cirkel met de cirkel met middelpunt P die door M gaat. Dat geeft de snijpunten S_1 en S_2.

De snijpunten T_1 en T_2 van MS_1 en MS_2 met de cirkel c zijn de middens van die lijnstukken en daaruit volgt dat PT_1 en PT_2 de middelloodlijnen van MS_1 en MS_2 zijn. Dus zijn PT_1 en PT_2 de raaklijnen uit P aan c.



Een raaklijnconstructie bij de ellips

Het grappige van de laatste constructie is dat hij als het ware geëxtrapoleerd kan worden tot de constructie van de raaklijnen aan een ellips e uit een punt P buiten e. Daarbij maak ik gebruik van een cirkel met als middelpunt een van de brandpunten (zeg F_2) van e en als straal de lange as (= $2a$), een zogenaamde *richtcirkel.* Ieder punt X van e heeft gelijke afstanden tot het brandpunt F_1 en die richtcirkel (zie figuur: $|XF_1| = 2a - |XF_2| = |XY|$).
Snijd nu die richtcirkel met de cirkel om P die door F_1 gaat. De snijpunten noem ik S_1 en S_2. Het punt P ligt nu op de middelloodlijnen van de lijnstukken F_1S_1 en F_1S_2. En juist die middelloodlijnen zijn de raaklijnen door P aan de ellips.



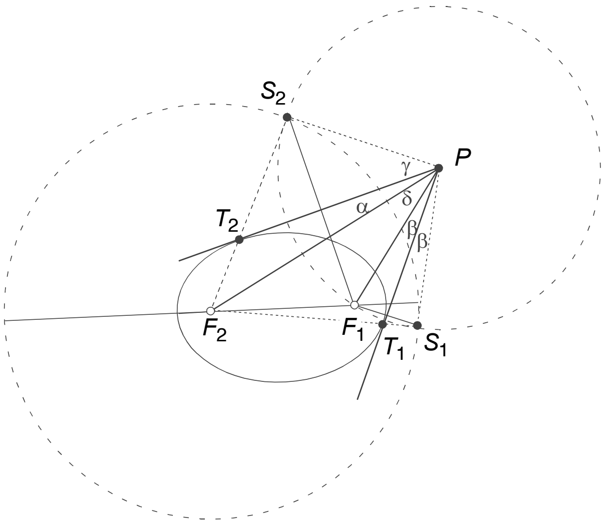
De raakpunten T_1 en T_2 van de raaklijnen uit P worden gevonden door F_2S_1 en F_2S_2 met die middelloodlijnen te snijden. Immers, T_1 op de middelloodlijn van F_1S_1, dus $|T_1F_1| = |T_1S_1|$ en daaruit volgt dan

$$|T_1F_1| + |T_1F_2| = |T_1S_1| + |T_1F_2| = 2a$$

Merk op dat we zo, bij samenvallende brandpunten F_1 en F_2, juist de raaklijnconstructie voor de cirkel boven aan deze kolom krijgen. Er is dus inderdaad sprake van een soort extrapolatie.

Een gelijke-hoekeigenschap van de ellips

Bekijk nog eens de eerdere constructie van de twee raaklijnen aan de ellips die door P gaan.



Dat de twee raaklijnen uit een punt P aan een cirkel met middelpunt M gelijke hoeken maken met de verbindingslijn PM is triviaal. Bij de extrapolatie naar de ellips wordt het punt M als het ware gesplitst in twee punten F_1 en F_2 en de lijn PM in twee lijnen PF_1 en PF_2. Men kan zich nu afvragen of de raaklijnen PT_1 en PT_2 aan de ellips gelijke hoeken maken met die laatste twee lijnen. Dat blijkt inderdaad het geval te zijn. Noem de hoeken die PT_2 en PT_1 maken met PF_2 en PF_1 achtereenvolgens α en β en stel $\angle S_2PT_2 = \gamma$ en $\angle F_1PF_2 = \delta$.

Nu is F_2P de bissectrice van $\angle S_1PS_2$ en zijn PT_1 en PT_2 de bissectrices van respectievelijk $\angle S_1PF_1$ en $\angle S_2PF_1$. Daaruit volgt:

$$\gamma = \alpha + \delta \quad \text{en} \quad \alpha + \gamma = \delta + 2\beta$$

Substitutie van de eerste betrekking in de tweede, leidt tot de gewenste gelijkheid $\alpha = \beta$.

Het kan ook analytisch

Ofschoon ik gedurende vele jaren analytische meetkunde heb onderwezen, zowel in het voortgezet onderwijs als bij de vroegere MO-opleiding, moet ik bekennen dat ik de zojuist behandelde eigenschap van de ellips daarbij nooit was tegengekomen. Bij toeval kreeg ik onlangs *Wiskundige Vraagstukken* (A.J. van Breen, derde druk, 1911) in handen, een bundel met oefenopgaven voor het examen K1 (de voorloper van de wiskundeakte MO A). Daarin staat de volgende opgave. *Uit een punt buiten een ellips worden de beide raaklijnen en de lijnen naar de brandpunten getrokken, te bewijzen dat de hoeken tussen beide paren lijnen door dezelfde lijn worden middendoor gedeeld.* Er wordt kennelijk een algebraïsche oplossing verwacht, want het is ondergebracht in het hoofdstuk Analytische Meetkunde. Je hoeft er niet lang naar te kijken om te zien dat dit wat je noemt een bewerkelijke som is. Vroeger hield ik mijn leerlingen of studenten steevast voor dat 'blind aanvallen' een slechte strategie is. Maak eerst een plan, schat de uitvoerbaarheid ervan en weeg het af tegen andere mogelijke aanpakken. Na een paar pogingen waarin het rekenwerk mij op zijn zachtst gezegd niet aanlokte, zag ik de door Van Breen gebruikte formulering ineens als een verborgen hint: zoek eerst uit onder welke voorwaarde twee lijnenparen uit één waaier gemeenschappelijke bissectrices bezitten. Wel, ik noem de richtingscoëfficiënten van het ene paar m_1 en m_2 en van het andere n_1 en n_2. Voor het rekengemak laat ik de vier lijnen door de oorsprong gaan.

Het bissectricepaar (conflictlijnen, dus afstandsformule!) van $y = m_1x$ en $y = m_2x$ beantwoordt aan:

$$\frac{|y - m_1x|}{\sqrt{1 + m_1^2}} = \frac{|y - m_2x|}{\sqrt{1 + m_2^2}}$$

Na kwadrateren en kruislings vermenigvuldigen, komt er ten slotte:

$$(m_1 + m_2)(x^2 - y^2) = 2(1 - m_1m_2)xy$$

Net zo voor het andere lijnenpaar en de gezochte relatie waaraan m_1, m_2, n_1 en n_2 moeten voldoen is blijkbaar:

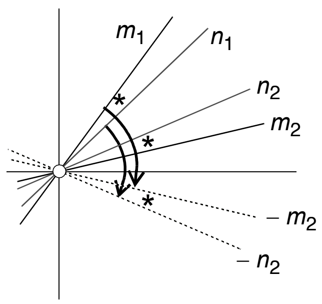
$$\frac{m_1 + m_2}{1 - m_1m_2} = \frac{n_1 + n_2}{1 - n_1n_2} \qquad (*)$$

Ik schrijf de voorwaarde (*) met opzet in de 'gebroken' vorm en neem daarbij voor lief dat het speciale geval $m_1m_2 = n_1n_2 = 1$ een aparte behandeling behoeft.

Richtingscoëfficiënten zijn de tangenten van de hoeken die de lijnen met de x-as maken en bovenstaande formule roept dan herinnering op aan de gonioformules

$$\tan(\varphi \pm \psi) = \frac{\tan\varphi \pm \tan\psi}{1 \mp \tan\varphi \cdot \tan\psi}$$

Hiermee kan ik de gevonden voorwaarde inzichtelijk maken. Dat kan op ten minste twee manieren. Ik kies er hier voor om de lijnen met richtingscoëfficiënten m_2 en n_2 te spiegelen in de x-as:



De hoek tussen de lijnen met richtingscoëfficiënten m_1 en $-m_2$ is duidelijk gelijk aan die tussen de lijnen met richtingscoëfficiënten n_1 en $-n_2$. De tangenten van die beide hoeken zijn juist gelijk aan de vormen in het linker- en rechterlid van de betrekking (*) en dit werpt zo een helder licht op die eerder gevonden relatie.

Voor de liefhebbers van projectieve meetkunde is er nog een andere uitleg. Een lijnenpaar vormt met zijn beide bissectrices een harmonisch viertal. Als twee lijnenparen in een waaier dezelfde bissectrices hebben, zeg met richtingscoëfficiënten p en q, dan zijn de dubbelverhoudingen (m_1, m_2, p, q) en (n_1, n_2, p, q) beide gelijk aan -1. De algebraïsche verwerking hiervan, met gebruikmaking van $pq = -1$, levert dan weer de formule (*) op

Terug naar de ellips. Die geef ik de vergelijking

$$b^2x^2 + a^2x^2 = a^2b^2$$

met $a > b$. De brandpunten F_1 en F_2 hebben dan respectievelijk de coördinaten $(c, 0)$ en $(-c, 0)$ en $c^2 = a^2 - b^2$
Laat nu $P(x_P, y_P)$ een punt buiten de ellips zijn.
De richtingscoëfficiënten van de raaklijnen uit P aan de ellips noem ik m_1 en m_2 en die van de verbindingslijnen PF_1 en PF_2 noem ik n_1 en n_2.

Om met die laatste te beginnen, er geldt:

$$n_1 = \frac{y_P}{x_P - c} \quad \text{en} \quad n_2 = \frac{y_P}{x_P + c}$$

zodat

$$\frac{n_1 + n_2}{1 - n_1n_2} = \frac{\dfrac{y_P}{x_P - c} + \dfrac{y_P}{x_P + c}}{1 - \dfrac{y_P^2}{x_P^2 - c^2}} = \frac{2x_Py_P}{x_P^2 - c^2 - y_P^2}$$

Nu de raaklijnen uit P.
Substitutie van $y = m(x - x_P) + y_P$ in de vergelijking van de ellips leidt tot een vierkantsvergelijking in x.
Wil er sprake zijn van een raaklijn dan moet de discriminant nul zijn, hetgeen leidt tot

$$(y_P - mx_P)^2 = a^2m^2 + b^2$$

ofwel

$$(x_P^2 - a^2)m^2 - 2x_Py_Pm + y_P^2 - b^2 = 0 \qquad (**)$$

De discriminant van deze vierkantsvergelijking in m is positief als P buiten de ellips ligt, dus als

$$b^2{x_P}^2 + a^2{x_P}^2 > a^2b^2$$

Van de oplossingen m_1 en m_2 van (**) weet ik direct hun som en product:

$$m_1 + m_2 = \frac{2x_Py_P}{x_P^2 - a^2} \quad \text{en} \quad m_1m_2 = \frac{y_P^2 - b^2}{x_P^2 - a^2}$$

Hieruit volgt, met gebruikmaking van $c^2 = a^2 - b^2$:

$$\frac{m_1 + m_2}{1 - m_1m_2} = \frac{\dfrac{2x_Py_P}{x_P^2 - a^2}}{1 - \dfrac{y_P^2 - b^2}{x_P^2 - a^2}} = \frac{2x_Py_P}{x_P^2 - c^2 - y_P^2}$$

en daarmee is de kous bijna af.

Bijna, want er blijven nog wat speciale gevallen over om te onderzoeken. Zo zou één van de vier lijnen door P verticaal kunnen zijn, waardoor een van de vier m_1, m_2, n_1 en n_2 niet een eindig getal is. En dan is er ook het geval $m_1m_2 = n_1n_2 = 1$. Het zal geen verbazing wekken dat het doorrekenen van die speciale gevallen tot gelijkheid van de hoeken F_1PT_1 en F_2PT_2 leidt en zo kan het algebraïsche bewijs worden gecompleteerd.

Synthetisch versus analytisch

Voorstanders van synthetische meetkunde zullen zonder moeite meetkundige vraagstukken kunnen opdienen waarbij de synthetische methode gemakkelijker dan wel eleganter is dan de analytische aanpak. Hetzelfde geldt mutatis mutandis voor de fans van analytische meetkunde. Het aardige van de hier behandelde eigenschap van de ellips is dat noch de synthetische, noch de analytische aanpak zomaar eventjes uit de mouw kan worden geschud. Dat de synthetische aanpak ook hier mijn voorkeur heeft, is niet alleen een kwestie van smaak: zij verschaft, hoe je het ook wendt of keert, meer meetkundig inzicht. Een voordeel van de analytische aanpak is dat zij vaak effectief is (denk aan het opsporen van meetkundige plaatsen) en dat zij de algebraïsche inzichten en vaardigheden voedt.
Ik heb er nooit een geheim van gemaakt dat ik weinig heil zie in het inruilen van synthetische voor analytische meetkunde. Het argument dat daarmee de aansluiting met universitaire opleidingen beter zal worden, kan gemakkelijk worden omgekeerd. Juist omdat op universiteiten en hogescholen niet meer aan algebraloze meetkunde wordt gedaan, zou je dit wél op school moeten doen. Meetkundig denken stimuleert de intuïtie en is mede daarom fundamenteel bij veel takken van wiskunde. Henri Poincaré zegt ergens: *een groot voordeel van de meetkunde is nu juist dat de zintuigen het verstand kunnen steunen door mee te helpen te raden welke weg er gevolgd moet worden*. Ik ben daarom een grote vriend van synthetische meetkunde, maar dat betekent niet dat ik de analytische meetkunde als vijand zie. Integendeel, als leraar heb ik heel goede herinneringen aan de (klassieke) analytische meetkunde die ik in het begin van de jaren zestig mocht onderwijzen in de bovenbouw van HBS en gymnasium. De vertaling van meetkunde naar algebra en vice versa sprak mij (en vandaar ook mijn leerlingen) goed aan en dat leidde tot mooie resultaten, waar ik nu nog trots op durf te zijn. Men moet echter wel bedenken dat de leerlingen in die tijd een solide synthetisch-meetkundig referentiekader hadden meegekregen in de onderbouw, hetgeen bovendien werd onderhouden bij de stereometrie (in de bovenbouw).Voor mij is dit dan ook de kern van de zaak: analytische meetkunde moet op school geen *vervanging van*, maar *aanvulling op* synthetische meetkunde zijn. En als er geen tijd genoeg is om aan beide aspecten genoeg aandacht te geven, dan zou dat nooit ten koste mogen gaan van wat ik de ‘oermeetkunde’ noem.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl