Soms begint het leren pas ná de toets. Dat overkwam **Ton Lecluse** bij het nakijken van een toets van zijn leerlingen. Uitgaande van de opgave (die hij zelf bedacht had) doken er nog meer vraagstellingen op, en antwoorden die niet helemaal bleken te kloppen, maar daardoor juist weer stof tot verder denken opleverden.

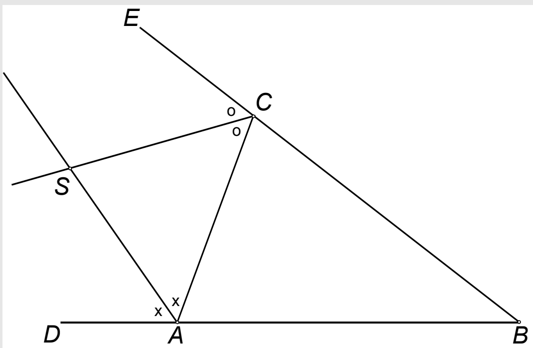
De geschiedenis van een opgave

Inleiding

Dit verhaal beschrijft een opgave, die uitgroeit van een basissommetje tot een fraai model met uiteindelijk twee verrassende nieuwe eigenschappen. Het begon met het ontwerp van een opgave voor meetkunde voor 5 VWO B12, die na afname van de toets uitgroeide tot een opgave op 6 VWO-niveau met twee fraaie nieuwe eigenschappen, met een staartje in 4 VWO.

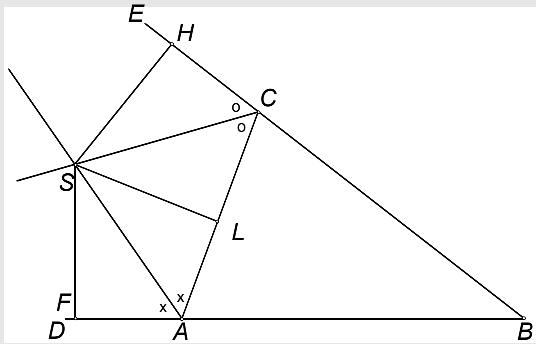
Ik moest een toets ontwerpen voor 5 VWO B12, bij hoofdstuk 2 van *Moderne Wiskunde* achtste editie. Onderwerp: middelloodlijnen en hoekdeellijnen (dus ook de ingeschreven en omgeschreven cirkel).
Ik kreeg een idee: het snijpunt van de deellijnen van twee buitenhoeken van de driehoek ligt natuurlijk ook op (het verlengde van) een van de deellijnen van de driehoek. De opgave, met correctievoorschrift staat hieronder.

Op deellijnen
Bij driehoek ABC ligt D op het verlengde van BA en E op het verlengde van BC.
De deellijnen van $\angle DAC$ en $\angle ECA$ snijden elkaar in S. Zie figuur. Deze staat ook (vergroot) op de uitwerkbijlage.



Bewijs dat S op de deellijn ligt van $\angle ABC$.

Correctievoorschrift
maximaal 4 punten



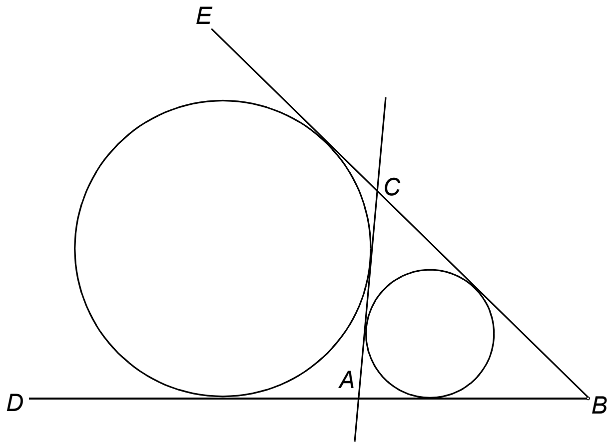
- $d(S, AB) = d(S, AC)$
  S ligt op deellijn van $\angle DAC$, gegeven) 1
- $d(S, AC) = d(S, BC)$
  (S ligt op deellijn van $\angle ECA$, gegeven)1
- Dus $d(S, AB) = d(S, BC)$ (of: $SF = SH$) 1
- Dus ligt S op de deellijn van $\angle ABC$; QED 1

Of
Trek loodlijnen vanuit S op AB, AC en BC
- $\Delta SFA \cong \Delta SLA$ (ZHH), dus $SF = SL$ 1
- $\Delta SLC \cong \Delta SHC$ (ZHH), dus $SH = SL$ 1
- Dus $SF = SH$ 1
- Dus ligt S op de deellijn van $\angle ABC$; QED 1

Het is een mooie opgave geworden. De kern van de leerstof (eigenschappen van deellijnen) wordt mooi ingezet. En er is een alternatieve oplossing, waarbij je gebruik maakt van congruentie (uit het eerste hoofdstuk).

Tijdens het nakijken van het leerlingwerk bedacht ik dat je ook mooi kunt laten aantonen dat de lijn door B en S ook door het middelpunt gaat van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC. Dit is natuurlijk in principe dezelfde vraag, maar het is wel een mooie blikwisseling.

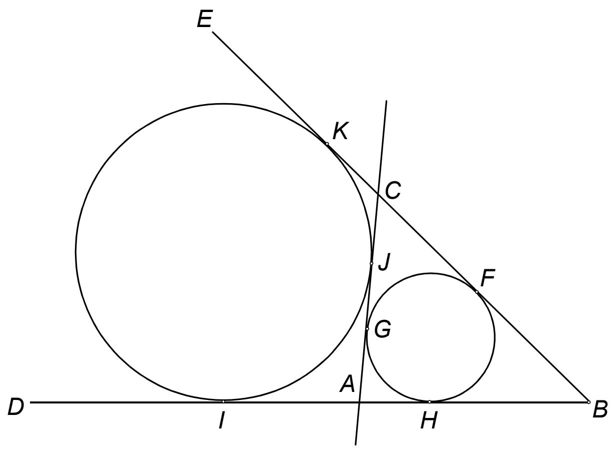
En dan kun je er net zo goed die ingeschreven cirkel bij tekenen. En omdat S het middelpunt is van de aangeschreven cirkel, die dus ook maar. Je krijgt het volgende plaatje:



C is ietwat verplaatst om duidelijk te kunnen zien dat de twee cirkels elkaar niet raken. De beginvraag kun je nu formuleren als ‘bewijs dat de lijn door de middelpunten van de twee cirkels door *B* gaat.’

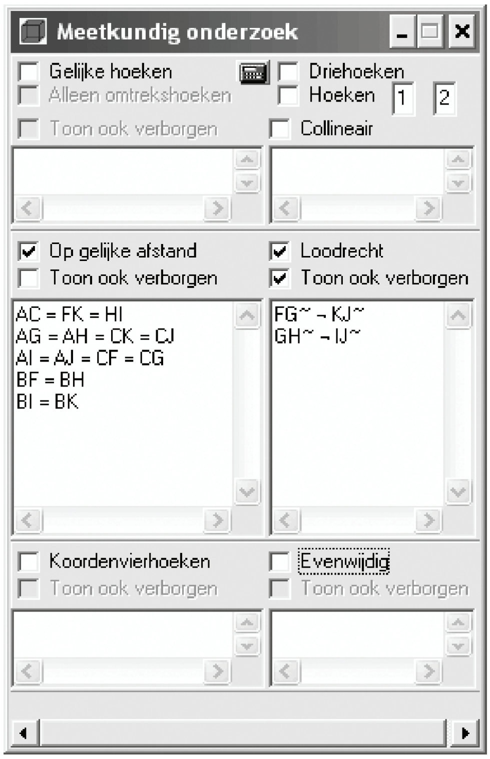
Een tweede blikwisseling

Je kunt de tekening ook anders zien: gegeven twee cirkels die elkaar niet snijden. Er zijn vier gemeenschappelijke raaklijnen: twee ervan raken beide cirkels uitwendig: *BE* en *BD*. Ook zijn er twee raaklijnen tussen de twee cirkels, waarvan er één is getekend, *AC*.
Laten we de raakpunten erbij betrekken:



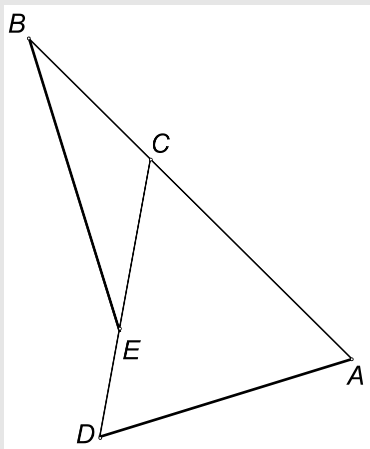
Een mooie optie van het programma Geocadabra[1] is dat je kunt vragen op zoek te gaan naar bijzondere eigenschappen van het model. Toen ik dit plaatje in Geocadabra invoerde, en naar extra eigenschappen vroeg, ontdekte het programma dat *AC* even lang is als *HI* en *FK*. Dit lijkt op het eerste gezicht eenvoudig, maar de schijn bedriegt. Ik nodig u hierbij uit, een bewijs te geven. Op mijn website[2] kunt u uw bewijs controleren.

Toen ik ook nog eens vroeg naar andere eigenschappen, kwam nog een verrassing: $FG \perp KJ$, eenvoudig te bewijzen wanneer u dit probeert. Maar het gaat erom die eigenschap te ontdekken. Ook deze eigenschap is op mijn website verder uitgewerkt.



En deze eigenschap kun je ook heel mooi losweken uit het grote model. Het is dan een mooie opgave bij het eerste hoofdstuk (hoeken jagen):

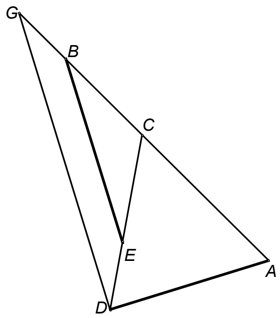
Van de gelijkbenige driehoeken *ACD* (met *AC* = *DC*) en *BCE* (met *BC* = *EC*) liggen *AC* en *BC* in elkaars verlengde. Zie figuur.
Bewijs dat *AD* en *BE* loodrecht op elkaar staan.

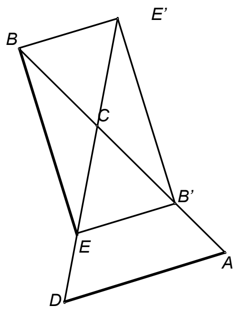


Toen ik deze opgave als apart sommetje in de zesde klas op bord zette, had één leerling deze binnen twee minuutjes perfect bewezen. Maar de helft van de klas kwam er niet echt uit. U wel?

Het volgende uur (na die zesde klas) kwam een vierde klas VWO binnen (voor het nieuwe vak wiskunde B), en de opgave stond nog op het bord (zonder bewijs). In het nieuwe vak wiskunde B krijgen deze leerlingen later ook meetkundige bewijzen, dus vertelde ik de klas dat dit typisch een opgave was die past bij het onderwerp ‘meetkundige bewijzen’. Niet behept met kennis en gereedschap hiervoor, kwamen er toch mooie ideeën uit de groep, die zeker de moeite waard zijn. Ik noem er twee:

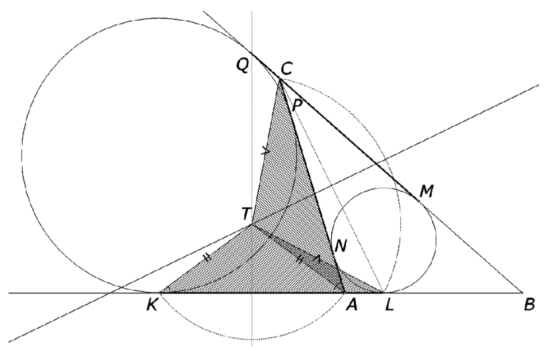
1. Trek een loodlijn in D op AD en verleng AC, zodat je snijpunt G krijgt. Een perfecte start om hoeken te gaan jagen.
2. Spiegel B en E in C en probeer te begrijpen waarom er een rechthoek ontstaat.





Wat hebben wij toch een mooi vak!

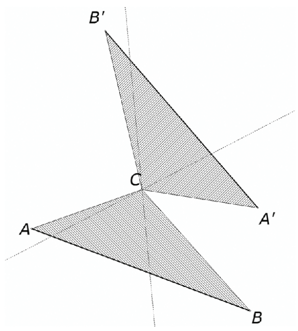
Dit artikel was eigenlijk al geschreven en ingediend bij de Wiskrantredactie, toen ik dit model voorlegde aan de bezoekers op een drieëneenhalf uur durende workshop die ik gaf in Keele[3] op vrijdag 4 april jongstleden. Een van de aanwezige experts was Doug Averis van het Department of Education van de Keele University. Dankzij de ruime tijd die we hadden en de aanwezige expertise was het uiteindelijk Doug die met het volgende prachtige idee kwam:



Eerst de achtergrond bij het idee: als twee lijnstukken even lang zijn en niet evenwijdig, bestaan er twee rotaties waarbij het ene lijnstuk het beeld is van de ander. Het centrum van zo’n rotatie is het snijpunt van de twee middelloodlijnen, elk tussen origineel en beeldpunt.

Als $AB = A'B'$ dan zijn de driehoeken ABC en $A'B'C$ congruent (ZZZ).

Doug gebruikte de omkering. Hij tekende de middelloodlijnen van KA en LC, die elkaar snijden in T.



Je hebt nu slechts twee ingrediënten nodig:

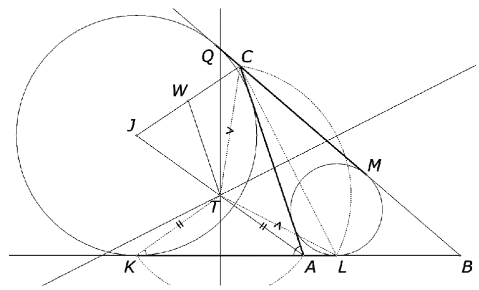
– $TK = TA$ en $TL = TC$ (want T ligt op twee middelloodlijnen)
– $\angle TKA = \angle TAK$ (want T ligt op middelloodlijn van KA)

dus $\angle TKA = \angle TAC$ (want TA is deellijn van hoek KAC).

Waaruit helaas niet volgt: $\Delta KTL \cong \Delta ATC(ZZH)$ (waaruit zou volgen dat KL en AC even lang zijn). Helaas is ZZH geen congruentiegeval, we moeten nog proberen aan te tonen dat de driehoeken TKL en TAC beide stomphoekig, scherphoekig of rechthoekig moeten zijn. Lukt je dit? (Op analoge wijze kun je aantonen dat AC en MQ even lang zijn, met een rotatie om het snijpunt van de middelloodlijnen van AM en CQ.)

Ik hoopte dat de eigenlijke eigenschap ($KL = AC = MQ$) nog onbekend zou zijn. Maar Michael de Villiers[4] maakte me erop attent dat dit probleem al bekend was bij Japanse meetkunde-experts, enige tijd geleden.

De rotatietekening bevat nog veel meer moois: (probeer zelf te bewijzen)



– T ligt op de deellijn van buitenhoek KAC van driehoek ABC;
  T is het midden tussen A en het middelpunt J van de aangeschreven cirkel.
  Toelichting: $\angle JKA = 90°$ (raaklijn $\perp$ straal), dus ligt K op de cirkel met middellijn AJ. Aangezien het middelpunt van een cirkel op de middelloodlijn van elke koorde ligt, is T het middelpunt van die cirkel.
– Wanneer het centrum W van de rotatie die AC afbeeldt op MQ erbij wordt getekend, blijkt TW middenparallel te zijn in driehoek JCA.
– $ALCT$ is een koordenvierhoek.

Ten slotte

Geocadabra kan ook een soort complexiteitsgetal van een tekening berekenen. Hierbij worden alle eigenschappen die je maar kunt bedenken, bij elkaar opgeteld.
De basistekening die de twee mooie eigenschappen ($AC = FK$ en de loodrechte stand) bevat, krijgt complexiteitswaarde 70 (als je de punten D en E weglaat, anders worden het er zelfs meer dan 80). Op zich zegt dit getal wellicht niet veel. Maar het wordt zeker interessant als je van bijvoorbeeld examenvraagstukken van de afgelopen jaren deze waarde vergelijkt. Wellicht een idee voor nader onderzoek?

Ton Lecluse
Comenius College, Hilversum

Noten

[1] Het programma Geocadabra heb ik ontwikkeld vanuit het oogpunt van de leerling. Ik probeer functionaliteit aan te brengen die de leerling helpt bij het doorgronden van wiskunde.

[2] Zie op http://home.planet.nl/alecluse de opgave 'ingeschreven en aangeschreven'. De figuur bevat ook nog een mooie koordenvierhoek: de middelpunten van de cirkels en de punten A en C. Ook dit is er uitgewerkt.

[3] Joined Easter conference (ATM, MA, Nanamac, AMET), 1–5 april te Keele, Engeland. Ik was er uitgenodigd voor presentaties van resultaten bij mijn meetkundig onderzoek waarbij Geocadabra als gereedschap wordt ingezet.

[4] Michael de Villiers is expert in meetkunde. Hij werkt momenteel aan de Universiteit van KwaZulu-Natal in Zuid-Afrika. Ik ontmoette hem aldaar voor het eerst op de AMESA-conferentie in juli 2004, vorig jaar ook te Keele op de Easter conference. Zijn website is zeer de moeite waard: http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/homepage.html.