

In 1994 schreef **Paul Drijvers** een artikel in de *Wiskrant* over het gebruik van ICT bij eindexamens in het buitenland. In het licht van de programmaherzieningen in Nederland vraagt hij zich af hoe de situatie vandaag de dag is en wat er sindsdien is veranderd. In dit artikel worden landelijke strategieën in kaart gebracht en worden enkele voorbeeldopgaven bekeken. De conclusie is dat ICT-gebruik in examens meer is toegestaan, maar dat het ontwerpen van geschikte toetsopgaven niet meevalt.

Tests en tools: technologie in landelijke eindexamens

Inleiding

Enkele jaren geleden was ik benieuwd naar de manier waarop ICT werd ingepast in landelijke eindexamens in het buitenland. Ik deed een bescheiden inventarisatie en schreef daarover een artikel in de *Nieuwe Wiskrant* en later een update in een Engels tijdschrift (Drijvers, 1994, 1998). Ik constateerde toen dat veel landen worstelen met de integratie van ICT in het eindexamen.

Nu cTWO vordert met het ontwerpen van nieuwe examenprogramma's voor HAVO en VWO per 2013, is de vraag actueel hoe deze curricula getoetst gaan worden en welke rol ICT daarin gaat spelen. Toetsen en onderwijs hangen immers nauw met elkaar samen. Aan de ene kant beoogt de toetsing een weerslag te zijn van het onderwijs. Aan de andere kant richt de toetsing, zeker als die extern is zoals onze centrale examens, het onderwijs in belangrijke mate en heeft daarmee grote invloed op de realisatie van een nieuw curriculum. Dit vormde voor mij aanleiding om opnieuw te inventariseren hoe in ons omringende landen met deze kwestie wordt omgegaan en dit artikel geeft de bevindingen hiervan weer.

De 'tests' in de titel zijn centraal opgestelde landelijke eindexamens ter afronding van het voortgezet onderwijs aan leerlingen die doorstromen naar de universiteit, dus voor leerlingen van zeventien tot negentien jaar op HAVO-VWO niveau of vergelijkbaar. De tools zijn de technologische hulpmiddelen die in de verschillende landen daarbij zijn toegestaan: gewone rekenmachines, grafische rekenmachines, symbolische rekenmachines en laptop computers.

Aanpak

Om deze kwestie te onderzoeken, heb ik een vragenlijst over technologie in landelijke eindexamens wiskunde opgesteld en deze verstuurd naar veertien respondenten in tien landen. Ik heb me beperkt tot landen die een centraal eindexamen kennen en die 'in de buurt' van Nederland liggen. De respondenten zijn allen sterk betrokken bij de

organisatie of uitvoering van de wiskunde-examens in hun land. In Duitsland heb ik me beperkt tot twee van de zestien deelstaten met een eigen centraal examen, namelijk Nordrhein-Westfalen en Beieren.

De vragenlijst had een respons van 100%, waarbij één van de respondenten aangaf niet de juiste persoon te zijn om te reageren. Onderstaande bevindingen zijn dus gebaseerd op de reacties van de overige dertien respondenten, die ook voorbeeldexamens, examenreglementen en correctievoorschriften instuurden. Met de meesten van hen heb ik nog aanvullend e-mailcontact gehad om de plaatselijke examenpraktijk verder helder te krijgen.

Verschillende strategieën

Na een eerste analyse van de verschillende situaties onderscheid ik vier benaderingen of strategieën met betrekking tot de integratie van ICT in het wiskunde-examen.

1. ICT is (gedeeltelijk) niet toegestaan
Deze strategie bestaat eruit dat helemaal geen technologie of alleen de wetenschappelijke rekenmachine is toegestaan bij (een deel van) het examen.
2. ICT is toegestaan, maar levert geen voordeel op
Deze strategie houdt in dat het gebruik van ICT tijdens het examen is toegestaan, maar dat de opgaven zo zijn gesteld dat ICT-gebruik geen voordeel biedt.
3. ICT is aanbevolen en nuttig, maar het gebruik wordt niet beloond
In deze strategie is ICT-gebruik toegestaan bij het examen, en komt ICT ook van pas, maar wordt het gebruik ervan niet rechtstreeks gehonoreerd.
4. ICT is verplicht en het gebruik wordt beloond
Deze strategie houdt in dat leerlingen geacht worden toegang tot ICT te hebben en dat zinvol gebruik ook wordt gehonoreerd met punten.

Deze indeling in vier strategieën is in lijn met eerdere bevindingen en met een model van Brown (2008), die ook vier rollen onderscheidt: actief verplicht, actief optioneel, inactief neutraal en inactief uitgesloten. In omgekeerde volgorde spoort Browns indeling met de mijne.

Resultaten

Tabel 1: Overzicht van de resultaten

Land	Strategie	Type ICT	Beloond?
Italië	1	WRM	Nee
Beieren	1	WRM	Nee
Groot-Brittannië	1 en 2	GRM (m.u.v. CP1)	Nee
Frankrijk	3	SRM	Nee
Nederland	3 en 4	GRM	Ja
Luxemburg	1 en 3-4	WRM of SRM	Ja (SRM)
Noorwegen	1 en 3-4	deel 1 zonder ICT en deel 2 met PC/SRM	Ja (deel 2)
Denemarken	1 en 4	deel 1 zonder ICT en deel 2 met PC/SRM	Ja (deel 2)
Zweden	1 en 4	deel 1 zonder ICT en deel 2 met SRM	Ja (deel 2)
NRW	4	GRM-versie en SRM-versie	Ja

Tabel 1 geeft een overzicht van de bevindingen. In de eerste kolom staan de betrokken landen. Nordrhein-Westfalen is afgekort tot NRW. In de tweede kolom staan de strategieën. Het bleek niet altijd eenvoudig om een land in te delen, omdat de strategie soms per schooltype of wiskundevak verschilt. Voor Nederland heb ik bijvoorbeeld '3 en 4' ingevuld, omdat het gebruik van de grafische rekenmachine voor het numeriek oplossen van vergelijkingen of het bepalen van binomiale en normale kansen bij wiskunde A wel punten oplevert, maar bij wiskunde B in mindere mate. De landen zelf zijn in het algemeen niet expliciet over hun strategie. In de derde kolom van de tabel staat het type ICT dat is toegestaan. Daarin is WRM de gewone wetenschappelijke rekenmachine, GRM de grafische rekenmachine, SRM de symbolische rekenmachine en PC de personal computer, in de meeste gevallen een laptop. De vierde kolom geeft aan of de leerling ook echt punten kan verdienen met direct gebruik van de ICT, zoals in strategie 4 het geval is.

Laten we de landen kort langslopen. In Italië en Beieren is de situatie overzichtelijk: alleen de WRM mag worden gebruikt, strategie 1 dus. In Beieren zijn er wel experimenten gaande met examens met de SRM. De huidige examens anticiperen daar al op door bijvoorbeeld grafieken te geven, die dan uitgangspunt zijn voor een vervolgvraag. In het Verenigd Koninkrijk mag helemaal geen rekenmachine worden gebruikt bij het CP1-examen, dat elke leerling doet en waarin basisvaardigheden worden getoetst (strategie 1). De andere examens, waarin de leerling de GRM kan gebruiken, zijn te beschouwen als ICT-neutraal omdat de opstellers ervoor proberen te zorgen dat het gebruik van de GRM geen voordeel biedt (strategie 2).

Frankrijk heeft de langste traditie als het gaat om het toestaan van de symbolische rekenmachine. Omdat alle li-

mieten, afgeleiden en algebraïsche oplossingen echter moeten worden onderbouwd met berekeningen op papier, heeft de SRM vooral de functie van controlemiddel en hulpmiddel ter voorkoming van rekenfouten. Verwijzingen op papier naar uitkomsten van de SRM worden niet beloond (strategie 3). Wel wordt momenteel geëxperimenteerd met een nieuwe mondelinge examenvorm, waarin leerlingen de computer gebruiken en die als aanvulling op het centrale examen gaat functioneren.

In Luxemburg gebruiken de leerlingen van de alfastrroom een gewone rekenmachine (strategie 1), terwijl leerlingen van de bètastroom verplicht een symbolische rekenmachine gebruiken bij het analyse-examen. In een deel van dat examen mogen de leerlingen de ICT alleen gebruiken voor een specifieke set van bewerkingen (strategie 3), terwijl de volledige functionaliteit van de SRM kan worden gebruikt in het problem solving deel van het examen (strategie 4). In Luxemburg overweegt men een overstap naar het 'Scandinavische model'. Noorwegen, Denemarken en Zweden kennen een eindexamen in twee delen, waarbij het eerste deel zonder ICT wordt afgenomen (strategie 1) en het tweede deel met computeralgebra. In Zweden is dit een symbolische rekenmachine, in Denemarken en Noorwegen is ook een PC toegestaan. Noorwegen gaat daarbij minder ver in het honoreren van het ICT-werk dan de twee andere landen. In alle drie de landen is deze opzet nog relatief nieuw, dus van een gevestigde examencultuur is nog geen sprake.

In Nordrhein-Westfalen, ten slotte, kunnen scholen kiezen voor een GRM-examen of een SRM-examen. Uitkomsten die met ICT worden gevonden, worden met punten beloond (strategie 4), maar in veel gevallen wordt een aanvullende redenering, verklaring of interpretatie gevraagd. Pen-en-papiervaardigheden kunnen worden afgevraagd door het gebruik van speciale formuleringen, zoals 'bereken exact' bij ons. Ook deze praktijk is nieuw.

Ondanks de nationale verschillen blijkt uit de examenregelingen dat de strategieën in de betrokken landen op de volgende twee punten overeenstemmen:

- In alle deelnemende landen is technologie met mogelijkheden voor communicatie, internetgebruik en afdrukken van documenten verboden.
- In alle deelnemende landen is het mogelijk om pen-en-papiervaardigheden af te vragen. Strategie 3- en 4-landen hebben hiervoor twee opties: een ICT-vrij deel in het examen (zoals bijvoorbeeld in Scandinavië) of de introductie van een speciale terminologie die de noodzaak van met-de-hand algebra duidelijk maakt. Voorbeelden van dergelijke formuleringen zijn 'met berekening' in Noorwegen, 'integreer met een primitieve functie' in Zweden, of 'bereken' in plaats van 'bepaal' in Nordrhein-Westfalen.

Voorbeeldopgaven

Laten we de nationale strategieën concreter maken met enkele voorbeelden. Omdat strategie 1-voorbeelden voor het doel van dit artikel niet zo interessant zijn, beginnen we met een strategie 2-voorbeeld uit Groot-Brittannië.

- 6 (a) Use integration by parts to find $\int xe^{5x} dx$.
- (b) (i) Use the substitution $u = \sqrt{x}$ to show that
- $$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx = \int \frac{2}{1+u} du$$
- (ii) Find the exact value of $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx$.

fig. 1 strategie 2 in Groot-Brittannië: MPC3 2007 item 6

De opgave in figuur 1 is vermoedelijk opgesteld met het idee dat de GRM erbij van geen enkel nut is. Toch kunnen leerlingen de primitieve die ze bij (a) gevonden hebben, hopelijk $(\frac{1}{5}x - \frac{1}{25}) \cdot e^{5x}$, invoeren als Y1 in het functiebestand van de GRM en het verschil tussen de functiewaarden over het gegeven interval vergelijken met de numerieke benadering van de integraal (zie fig. 2 links). Bij onderdeel (b)(ii) kan het exacte antwoord $2 \cdot \ln(2)$ eveneens worden gecontroleerd met de numerieke uitkomst van de grafische rekenmachine (zie figuur 2 rechts).

<code>fnInt(X*e^(5X),X,0,1)</code>	<code>fnInt(1/(sqrt(X)*(1+sqrt(X))),X,1,9)</code>
23.78610546	1.386294361
<code>v1(1)-v1(0)</code>	<code>2*ln(2)</code>
23.78610546	1.386294361

fig. 2 verificatiemethoden met de GRM

Hoewel deze verificatiemethoden een vrij hoge graad van machinebeheersing vragen, zien we dat de ICT-neutrale examenvragen van strategie 2 soms niet zo neutraal zijn als ze lijken. Leerlingen kunnen inventieve oplossingen bedenken die door examenmakers niet waren voorzien, waardoor de vraag in feite een strategie 3-vraag wordt. Laten we dan maar een voorbeeld van strategie 3 uit Frankrijk bekijken.

- On considère l'équation (E) $z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$ où z est un nombre complexe.
- Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.
 - Déterminer les nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre complexe z on ait : $z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(az^2 + bz + c)$.
 - en déduire les solutions de l'équation (E).

fig. 3 Franse strategie 3: Baccalauréat S 2007 vraag 1-3

In een van de opgaven van het examen voor de Scientifique richting, de bètastroom, is een complexe vergelijking gegeven (zie figuur 3). Vraag 1 is om aan te tonen dat het getal i de oplossing is. Bij 2 wordt gevraagd om reële getallen a, b en c te vinden zodat je $z - i$ kunt uitdelen.

Vraag 3 is dan om alle oplossingen van de vergelijking te geven.

$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$	$z^3 - 4z^2 + 13z + (-z^2 + 4z - 13)i = 0$
$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0 z=i$	true
$\frac{z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i}{z-i}$	$z^2 - 4z + 13$
<code>cSolve(z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0, z)</code>	$z=2+3i$ or $z=2-3i$ or $z=i$

fig. 4 uitwerking met TI-Nspire

Figuur 4 laat zien hoe je deze opgave kunt uitvoeren met een symbolische rekenmachine, in dit geval de TI-Nspire, die is toegestaan bij het Franse eindexamen. In de eerste regel is de vergelijking ingevoerd. In de tweede regel is $z = i$ gesubstitueerd, wat de reactie 'true' geeft. In de derde regel is $z - i$ uitgedeeld. In regel 4 worden met het commando `cSolve` alle complexe oplossingen gevonden. Van de Franse leerlingen wordt echter verwacht dat ze elke stap handmatig uitvoeren, opschrijven en rechtvaardigen. De antwoorden kunnen met de SRM eenvoudig worden gevonden en dragen ook bij aan het oplossingsproces. Het komt op mij wat kunstmatig over om pen-en-papiervaardigheden te vragen die zo dicht bij de mogelijkheden van het toegestane ICT-gereedschap liggen.

$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$	$z^3 - 4z^2 + 13z + (-z^2 + 4z - 13)i = 0$
$z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0 z=i$	true
$\frac{z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i}{z-i}$	$z^2 - 4z + 13$
<code>cSolve(z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0, z)</code>	$z=2+3i$ or $z=2-3i$ or $z=i$

fig. 5 uitwerking met TI-Nspire

De snelheid van geluid in lucht hangt af van de luchttemperatuur. Bij normale temperaturen geldt:

$$v(t) = 331 \cdot \sqrt{\frac{t+273}{273}}$$

waarbij t de luchttemperatuur voorstelt in graden Celsius en v de snelheid van geluid in m/s.

- Bij welke luchttemperatuur is de snelheid van geluid gelijk aan 340 m/s?
- Bepaal $v'(25)$ en geef een interpretatie van de uitkomst.

fig. 6 Deense strategie 4-opgave: wiskunde B 2007, vraag 12b

Over naar strategie 4. In de opgave in figuur 5 is een fysisch model gegeven. De leerling hoeft dit niet op te stellen, maar kan het gebruiken voor enkele berekeningen. Zoals blijkt uit figuur 6 kunnen deze berekeningen vrij eenvoudig worden uitgevoerd met de beschikbare symbolische rekenmachine, in dit geval weer de TI-Nspire. Bij vraag a. moet de leerling de vraagstelling wel om kunnen zetten in een passende vergelijking. Bij b. is het punt vooral de interpretatie van het antwoord. Daarbij helpt ICT niet.

Define $f(t) = 331 \cdot \sqrt{\frac{t+273}{273}}$	<i>Done</i>
solve($f(t)=340, t$)	$t = \frac{1648647}{109561}$
approx $\left(t = \frac{1648647}{109561}\right)$	$t = 15.0478$
$\frac{d}{dt}(f(t)) _{t=25}$	$\frac{331 \cdot \sqrt{81354}}{162708}$
approx $\left(\frac{331 \cdot \sqrt{81354}}{162708}\right)$.580241

fig. 7 uitwerking van de Deense strategie 4-opgave met de TI-Nspire

Uit dit laatste voorbeeld en uit andere, vergelijkbare opgaven uit landen waarin ICT in (een deel van) het examen vereist is, blijkt dat er een tendens bestaat om niet alleen antwoorden te vragen, maar ook een interpretatie, een rechtvaardiging, een modelleerstep, of een ander type redenering. De opgaven uit verschillende landen suggereren echter dat het ontwerpen van zulke examenvragen niet triviaal is.

Conclusies uit het buitenland

Welke conclusies kunnen we uit de gegevens en de voorbeelden uit het buitenland trekken? Allereerst valt op dat er een voorzichtige convergentie plaatsvindt in de richting van strategieën 3 en 4, waarin ICT is toegestaan of verplicht is in (een deel van) het examen. Ten tweede valt op dat men overal het toetsen van pen-en-papiervaardigheden mogelijk maakt, hetzij middels een technologievrij (deel van het) examen, hetzij door het gebruik van specifieke formuleringen in de vraagstelling. Dit laatste blijkt ook verder weg te gebeuren, bijvoorbeeld in de Australische staat Victoria (Brown, 2008). Laten we de vier strategieën ook apart langslopen:

1. ICT is (gedeeltelijk) niet toegestaan
Als deze strategie exclusief wordt gehanteerd, dus niet in combinatie met een andere strategie, wordt de potentie van ICT voor het leren van wiskunde genegeerd. Dit gaat naar mijn mening voorbij aan eigentijdse doelen van (wiskunde)onderwijs en aan de kansen die ICT biedt.
2. ICT is toegestaan, meer levert geen voordeel op
Deze strategie is in mijn ogen wat tweeslachtig en heeft het nadeel dat inventieve leerlingen onvoorzienbare toepassingen van het toegestane ICT-gereedschap bedenken.
3. ICT is aanbevolen en nuttig, maar het gebruik wordt niet beloond

Deze strategie lijkt in Frankrijk goed te werken. Toch maakt het voorbeeld in figuur 3 duidelijk dat deze aanpak soms wat kunstmatig kan zijn. En als de leerling in staat is ICT nuttig toe te passen, komen daarbij vaak wiskundige aspecten om de hoek kijken. Waarom dit dan niet belonen?

4. ICT is verplicht en het gebruik wordt beloond
Deze strategie trekt de volledige consequenties uit de aanwezigheid van ICT. Toch blijkt uit de voorbeeldexamens die ik heb gezien dat het niet eenvoudig is geschikte opgaven te ontwerpen bij deze strategie, die immers nog nieuw is. Drie typen opgaven komen vaak voor in strategie 4-examens. Ten eerste opgaven die ook op een examen zonder ICT zouden kunnen voorkomen. Als er geen grotere complexiteit of aanvullende interpretatie of redenering wordt vereist, kan de opgave ook met pen en papier gemaakt worden, en kun je je afvragen of de beschikbare ICT zo'n opgave niet te makkelijk maakt. Een tweede categorie is die van de modelleeropgaven. Hoewel modelleren een belangrijke wiskundige activiteit is, kun je ook hier kanttekeningen plaatsen: is een centraal eindexamen wel de geschikte gelegenheid om deze vaardigheid te toetsen? ICT heeft bij het modelleren meestal niet veel te bieden, dus zo'n vraag kan even goed op een ICT-vrij examen gesteld worden. De derde categorie bestaat uit opgaven waarin een gegeven model moet worden gebruikt of toegepast. Als de situatie of het model zo complex is dat ICT daarbij van pas komt, kunnen dit heel geschikte opgaven zijn, zeker in het geval dat een wiskundige redenering, vertaalslag of interpretatie deel uitmaakt van de oplossingsstrategie.

Als we erin slagen opgaven te ontwerpen waarin ICT-gebruik functioneel is en tevens aanleiding vormt tot redeneren, valideren en interpreteren, kan de vraagstelling op het examen rijker worden en kan ICT bijdragen aan toetsing waarin begrip en inzicht een belangrijke rol spelen.

Hoe verder in Nederland?

In Nederland heeft CTWO (2007) een globale visie op het gebruik van ICT in de nieuwe examenprogramma's HAVO-VWO geformuleerd, die is uitgewerkt in het rapport van de werkgroep ICT¹. Naar mijn idee kunnen we de volgende lessen trekken uit de situatie in de ons omringende landen.

ICT-toepassingen die een grote rol spelen bij de toetsing passen beter in het SE dan in het CE. De school heeft hierin alle vrijheid en kan de toetsing beter aanpassen aan het onderwijs dan bij het CE het geval is.

Bij het CE kunnen we globaal gesproken doorgaan op de ingeslagen weg. Dat betekent dat leerlingen de GRM blijven gebruiken. Een verbod op de formulekaart heeft tot gevolg dat de GRM bij aanvang van het examen geen door de leerling ingevoerde teksten of programma's mag be-

vatten. De huidige grafische rekenmachines bevatten mogelijkheden om dit te garanderen.

Om pen-en-papiervaardigheden te toetsen, kan het CE, bijvoorbeeld aan het begin, een aantal korte-antwoordvragen bevatten, waarvan door de vraagstelling duidelijk is dat algebraïsche, exacte antwoorden worden gevraagd. De huidige praktijk met de speciale nomenclatuur moet wel nog wat worden aangescherpt en verduidelijkt. Verder verdient de ontwikkeling van geschikte opgaven waarin ICT een zinvolle functie vervult die iets toevoegt bijzondere aandacht te krijgen.

Kortom, door de huidige praktijk te verfijnen kan ICT in de toekomst een vruchtbare rol in de toetsing blijven spelen. Dat we vanwege de snelle ontwikkelingen op het gebied van ICT niet achterover kunnen leunen, spreekt daarbij vanzelf.

*Paul Drijvers,
Freudenthal Instituut*

Noot

[1] ICT-werkgroep cTWO. *Use to learn, naar een zinvolle integratie van ICT in het wiskundeonderwijs*. Utrecht: cTWO. Zie www.ctwo.nl

Literatuur

- Brown, R. (2008). *The use of the graphing calculator in high stakes examinations: Trends in extended response questions over time*. NORMA08 paper. Zie <http://www.dpu.dk/site.aspx?p=10797>.
- cTWO (2007). *Rijk aan betekenis, visie op vernieuwd wiskundeonderwijs*. Utrecht: cTWO.
- Drijvers, P. (1994). Grafische rekenmachines en computeralgebra in het buitenland. *Nieuwe Wiskrant*, 13(4), 29–34.
- Drijvers, P. (1998). Assessment and new technologies: different policies in different countries. *The International Journal on Computer Algebra in Mathematics Education*, 5(2), 81–93.