Wat te bewijzen is (41)

Rubriek

Een klassiek optimaliseringsprobleem betreft het vinden van het maximale product van een vast aantal (zeg n) positieve getallen met een constante som. In aflevering 40 van deze rubriek werd gebruik gemaakt van het feit dat in het geval $n = 3$ de constante som 'eerlijk' verdeeld moet worden om het hoogste product te bereiken. Dat deze eigenschap voor alle natuurlijke getallen n geldt, wordt uitgedrukt in de volgende stelling (zoals die ik eerder in nummer 4 van deze rubriek opnam):

Als $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ **en** $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = c$,

dan $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq \left(\frac{c}{n}\right)^n$

De stelling kan op verschillende manieren met volledige inductie worden bewezen. Een even fraai als helder bewijs wordt toegeschreven aan Cauchy. Dat bestaat uit twee stappen:

A Uitgaande van het bekende geval $n = 2$, kan worden aangetoond dat de stelling waar is voor $n = 4, 8, 16, \ldots$ kortom voor $n = 2^k$ ($k = 2, 3, \ldots.$).

B Vervolgens kan een soort 'achteruit-inductie' worden toegepast, namelijk: als de stelling waar is voor n, dan is zij ook waar voor $n - 1$.

Uit A en B samen volgt dan dat de stelling waar is voor *iedere* waarde van $n \geq 2$.

Bewijs van A.
Eerst nog even $n = 2$.
Als $x_1 + x_2 = c$, dan $x_1 = \frac{1}{2}c - d$ en $x_2 = \frac{1}{2}c + d$ voor zekere waarde van d, zodat

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\tfrac{1}{2}c\right)^2 - d^2 \leq \left(\tfrac{1}{2}c\right)^2$$

Nu $n = 4$ en $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = c$.

Stel $\mu_{12} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ en $\mu_{34} = \frac{1}{2}(x_3 + x_4)$.

Uit $\mu_{12} + \mu_{34} = \frac{1}{2}c$ volgt $\mu_{12} \cdot \mu_{34} \leq \left(\frac{1}{4}c\right)^2$ (geval $n = 2$)

Ook:

$$x_1 \cdot x_2 \leq (\mu_{12})^2 \qquad \text{en} \qquad x_3 \cdot x_4 \leq (\mu_{34})^2$$

Combinatie van deze ongelijkheden geeft:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \leq (\mu_{12})^2 \cdot (\mu_{34})^2 \leq \left(\tfrac{1}{4}c\right)^4$$

De clou is hier dus het splitsen van de vier factoren in groepjes van twee. Voor $n = 8$ volgt de stelling nu op analoge wijze uit de beide gevallen $n = 2$ en $n = 4$ door het product van acht factoren op te splitsen in twee groepjes van vier.

Voor $n = 16$ volgt de stelling dan uit de gevallen $n = 2$ en $n = 8$ door het product van zestien factoren op te splitsen in twee groepjes van acht. En zo voort.

Bewijs van B.
Veronderstel dat de stelling waar is voor n (*).
Bekijk nu $n - 1$ getallen, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ met som c. Aan zo'n rijtje wordt een n-de getal, gelijk aan het gemiddelde van de $n - 1$, toegevoegd, dat levert het rijtje:

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, \frac{c}{n-1}$ met constante som: $c + \frac{c}{n-1}$

en met ook weer het gemiddelde $\frac{c}{n-1}$.
Volgens de veronderstelling (*) geldt:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot \frac{c}{n-1} \leq \left(\frac{c}{n-1}\right)^n$$

en hieruit volgt wat te bewijzen was:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \leq \left(\frac{c}{n-1}\right)^{n-1}$$

Variatie van het aantal termen bij gegeven c
Een tijd geleden kreeg ik het volgende probleempje voorgeschoteld: *verdeel 12 in een aantal getallen, zó dat het product van die getallen maximaal is.* Ik kende de 'eerlijk-verdeel-stelling' op mijn duimpje, dus was het slechts een kwestie van een paar gevallen uitrekenen:

$$6 \cdot 6 = 36$$
$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$
$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$
$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$$

Ziedaar: 81 is het maximale product. Maar wacht even, er was niet bij gezegd dat de componenten gehele getallen moeten zijn? En ook als dat wel zo is, moet ik dan niet verdelingen in 5, 7, 8, ... componenten bekijken? In het geval van 5 gelijke componenten is het product zeker niet groter dan $(2.4)^5 \approx 79.6$, en dat is kleiner dan 81. En bij verdelingen in 7, 8, ... componenten wordt de bovengrens alleen maar kleiner, de conclusie was toch goed.
Hoe zit het nu als ik 12 vervang door een ander getal?
Ik pak de GR en bekijk tabellen bij rijen van het type

$$p_n = \left(\frac{c}{n}\right)^n$$

voor diverse waarden van c. Daarbij beperk ik me niet tot gehele componenten en let ik slechts op de optimale waarde van n. Resultaat:

c	12	18	24	30	36	42	48	54	60
n_{opt}	4	7	9	11	13	15	18	20	22

De tabellen van de p_n-waarden vertonen steeds hetzelfde beeld: na een stijging die doorgaat tot even voorbij $\frac{1}{3}c$ zet zich een daling in. Om uit te zoeken of dit in zijn algemeenheid geldt en om tot een nadere precisering te komen bekijk ik het quotiënt:

$$\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{1}{c} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (n+1) = \frac{1}{c} \cdot a_n \cdot (n+1)$$

De optimale n zal de kleinste waarde van n zijn, waarvoor dit quotiënt > 1 is, immers vanaf die n gaat de rij dalen. Van de getallenrij a_1, a_2, a_3, ... is sinds Euler bekend dat zij monotoon stijgend naar het getal e convergeert.
Uit

$$\frac{1}{c} \cdot a_n \cdot (n+1) > 1$$

volgt:

$$n + 1 > \frac{c}{a_n} > \frac{c}{\mathrm{e}}$$

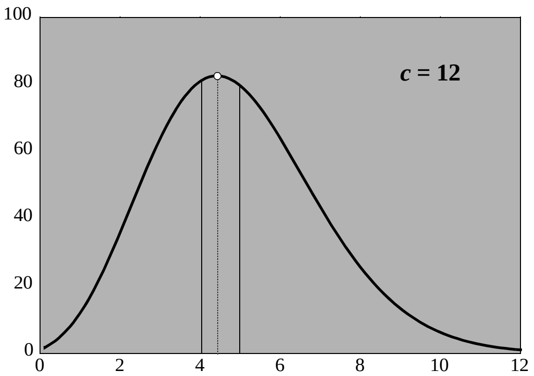
Daaruit volgt dat de optimale n in elk geval voorbij $c/\mathrm{e} - 1$ ligt. Uit het vervolg zal blijken dat de optimale n steeds gelijk is aan $[c/\mathrm{e}$ of $[c/\mathrm{e}] + 1$, waarbij met $[g]$ 'het entier van g' ofwel het grootste gehele getal $\leq g$ wordt bedoeld. De lezer kan alvast de proef op de som nemen aan de hand van voorgaande tabel.

Bewijs met differentiaalrekening

Een andere aanpak is om te kijken naar de grafiek van:

$$p(x) = \left(\frac{c}{x}\right)^x$$

Voor $c = 12$ staaft die grafiek de bewering dat het maximale product van een serie positieve getallen met som 12, gelijk is aan $3^4 = 81$.



Ik stap af van $c = 12$ en gebruik de afgeleide van p:

$$p(x) = \left(\frac{c}{x}\right)^x \longrightarrow \ln p(x) = x \ln c - x \ln x$$

differentieer

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \ln c - \ln x - 1$$

Uit $p'(x) = 0$ volgt $\ln x = \ln c - 1$, dus $x = c/\mathrm{e}$.
De beide gehele getallen $[c/\mathrm{e}]$ en $[c/\mathrm{e}] + 1$, waartussen die x-waarde ligt, zijn daarom dé twee kandidaten voor de optimale n-waarde.

Optimale partities

Aan de termen waarin c gesplitst wordt, stel ik nu de eis dat zij positief geheel zijn; $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = c$ met $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$ heet een *partitie* van c. Elk natuurlijk getal $c \geq 2$ heeft eindig veel partities, maar bij toenemende c rijst het aantal partities spoedig de pan uit: bij $c = 6$ horen 11 partities, bij $c = 12$ zijn dat er 77, en bij $c = 24$ zijn dat er al 1575. Elke partitie levert een product op en op grond van de 'eerlijk-verdeel-stelling' is het plausibel dat dit product maximaal is als de factoren zoveel mogelijk aan elkaar gelijk zijn.

Omdat het maximum van $x \rightarrow \left(\frac{c}{x}\right)^x$ gelijk is aan $\mathrm{e}^{c/\mathrm{e}}$ ligt het voor de hand om zoveel mogelijk termen 3 te nemen, want dat natuurlijke getal ligt het dichtst bij e.

Het probleem kan nu echter ook gemakkelijk zonder kennis van het getal e worden opgelost. Eerst merk ik op dat vanwege het eindig aantal partities van c er zeker een maximaal 'partitieproduct' (*PP*) bestaat.
Voor $c = 2$ of 3 bestaat het maximale *PP* uit één factor: het getal zelf. Voor $c = 4$ zijn er twee optimale mogelijkheden: 4 en $2 \cdot 2$. Voor $c = 5$ blijkt direct dat $3 \cdot 2 = 6$ het maximale *PP* is.
Als bij een willekeurig getal c een 5 in de partitie voorkomt, dan kan die partitie worden verbeterd door 5 te splitsen in 3 en 2. Dit geldt niet alleen voor de factor 5, maar voor elk groter getal: afsplitsing van een 3 geeft een groter *PP*, immers: $3 \cdot (a - 3) > a$ voor $a \geq 5$. Kortom: in een maximaal *PP* kunnen dus geen factoren groter dan 4 voorkomen. De 4 in een *PP* kan zonder bezwaar worden vervangen door $2 \cdot 2$ en omdat er in een maximaal *PP* natuurlijk ook geen 1 kan voorkomen (optelling van 1 bij een willekeurig ander getal uit de partitie geeft een groter *PP*), kan ik nu stellen dat een maximaal *PP* louter factoren 2 en 3 bevat. En nog meer: omdat $2 \cdot 2 \cdot 2 < 3 \cdot 3$ weet ik dat er ten hoogste twee factoren 2 in voorkomen.
Zo krijg ik bijvoorbeeld:

c	*maximale PP*
6	$3 \cdot 3 = 9$
7	$2 \cdot 2 \cdot 3. = 12$
8	$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$
9	$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$
10	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$
11	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$
12	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

En in het algemeen geldt nu voor $k = 1, 2, 3, ...$:

- **Als $c = 3k$, dan *maximale PP* $= 3^k$**
- **Als $c = 3k + 1$, dan *maximale PP* $= 3^{k-1} \cdot 2^2$**
- **Als $c = 3k + 2$, dan *maximale PP* $= 3^k \cdot 2$**

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl