Er zijn leerlingen die door het vak wiskunde danig in de knoop raken. Wellicht dat deze leerlingen uit te dagen zijn door te laten zien dat je met behulp van wiskunde ook knopen kunt ontrafelen. **Ab van der Roest** beschrijft hoe lessen in knopentheorie er uit kunnen zien; aan u om de knoop door te hakken deze ook daadwerkelijk te gaan geven.

Knopentheorie in het voortgezet onderwijs

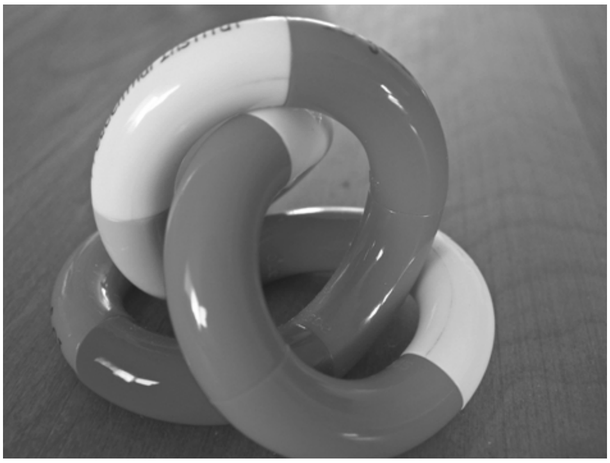
In de cursusjaren 2005–2006 en 2006–2007 heb ik een project gedaan op de Technische Universiteit Eindhoven in het kader van Leraar in Onderzoek. Leraar in Onderzoekprojecten worden gesubsidieerd door de NWO en hebben tot doel de kloof tussen voortgezet en wetenschappelijk onderwijs kleiner te maken en leerlingen via de docent enthousiast te maken voor een exacte studie. De subsidies worden verstrekt aan eerstegraads docenten die een samenwerking aangaan met een universiteit. Je wordt dan voor één of twee dagen gedetacheerd.

Mijn project ging over knopentheorie, en op de Nationale Wiskunde Dagen heb ik in een workshop verslag gedaan van mijn bevindingen. In dit artikel zal ik proberen enkele punten nader uit te werken.

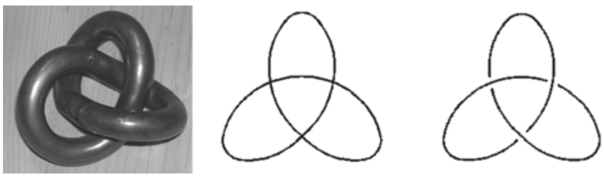
Knopentheorie is een gedeelte van de wiskunde dat in het middelpunt van de belangstelling staat. Als er een startpunt gekozen zou moeten worden, dan is dat misschien 1794. In dat jaar maakte Gauss een notitie met daarop schetsjes van dertien verschillende knopen en hun Engelse naam. Een ander belangrijk jaar is 1867, het jaar dat Lord Kelvin en Peter Tait zich op de knopentheorie stortten. Tait stelde een eerste knopentabel op waarin hij knoopdiagrammen opnam van tien of minder kruisingen. In 1928 formuleerde Alexander een veelterm die een invariant is voor knopen. In 1984 kwam de knopentheorie echt in een stroomversnelling terecht, toen Vaughan Jones zijn veelterm, waarvoor hij in 1990 onderscheiden zou worden met de Fields Medal, definieerde.

Zeer recente wiskunde dus, en dat toegankelijk maken voor scholieren van de middelbare school. Is dat wel mogelijk en tot welk niveau kan dat? Vierkant voor Wiskunde geeft een doe-boek uit genaamd *Knopen*, dat een eerste mogelijkheid biedt om leerlingen in de brugklas of de tweede klas kennis te laten maken met de knopentheorie. Ik heb een leerlingtekst geschreven die geschikt is voor VWO-5 of VWO-6 leerlingen, en die misschien als Zebraboekje uitgegeven gaat worden. Op beide niveaus zal ik wat materiaal laten zien.

Als we met de knopentheorie beginnen, moeten we ons realiseren dat de wiskundige knoop behoorlijk anders is dan de knopen uit het dagelijks leven. In het dagelijks leven zijn fysische eigenschappen van een knoop belangrijk, maar bij de wiskundige knoop houden we daar geen rekening mee. In het dagelijks leven knopen we losse einden van touw aan elkaar, maar de wiskundige knoop is een gesloten kromme. Aan deze gesloten krommen wordt de eis gesteld dat ze geen zelfdoorsnijdingen hebben. Eén van de meest eenvoudige knopen is daarom de klaverbladknoop. Het is niet de meest eenvoudige, want dat is de triviale knoop. De triviale knoop is een knoop zonder kruisingen en als voorbeeld kun je dan denken aan een fietsband.



De eerste wiskundige vaardigheid die aan de orde zal moeten komen, is het maken van een goed wiskundig model van een knoop. Dat gaat via de projectie van een knoop naar een knoopdiagram. Het is aardig om samen met de leerlingen te ontdekken dat je van een knoop meerdere projecties kan maken en daardoor ook meerdere diagrammen.

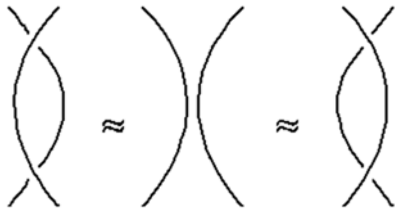


Knoop: foto, projectie, diagram

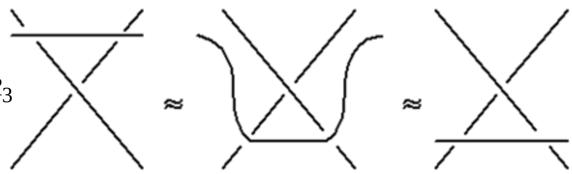
Het is verrassend dat allerlei manipulaties met een knoop te vatten zijn in slechts drie bewegingen op een knoopdiagram. Hierbij zijn er wel voorwaarden aan die manipulaties. Eén daarvan is dat we de knoop niet mogen bewerken met een schaar. Reidemeister omschreef deze drie bewegingen zo rond 1930. Deze bewegingen zijn:

R_1

R_2

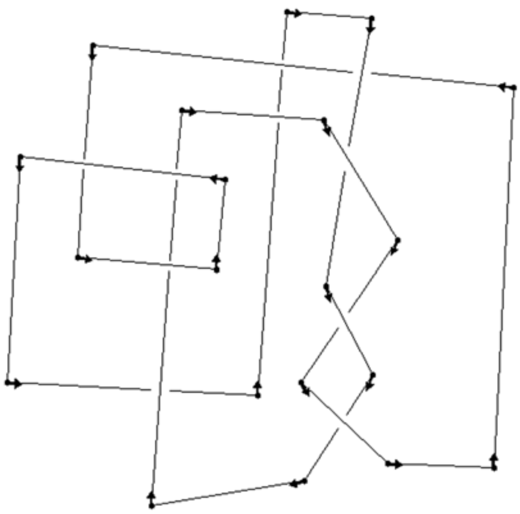


R_3



De Reidemeisterbewegingen zijn voor te stellen als een draaiing uit een touwtje halen of er juist een draaiing in brengen (R_1), twee lussen over elkaar heen schuiven of juist uit elkaar trekken (R_2) en een touwtje over of onder een kruising van een knoop halen (R_3). Wanneer we een Reidemeisterbeweging op een diagram toepassen, doen we dit op een gedeelte van het diagram. De rest van het diagram blijft onveranderd.

Dit is een eerste oefening die met leerlingen te maken is. Geef ze een ingewikkeld diagram en laat ze zoeken naar een eenvoudiger diagram terwijl de onderliggende knoop dezelfde blijft.



Vraag: is dit het diagram van de klaverbladknoop of van de triviale knoop? Overigens is deze tekening gemaakt met KnotWeaver, een programmaatje waarbij je knopen kunt tekenen en vervolgens bewerken met alleen maar toegestane Reidemeisterbewegingen.

Hoofdvraag in de knopentheorie is of twee knopen hetzelfde zijn, beter gezegd of twee op het oog verschillende diagrammen bij eenzelfde knoop horen. We noemen twee knopen hetzelfde als de bijbehorende diagrammen met een eindig aantal Reidemeisterbewegingen op elkaar afgebeeld kunnen worden. Om te onderzoeken of twee knopen hetzelfde zijn, worden invarianten ingevoerd. Een invariant is een eigenschap van een diagram die niet verandert onder toepassen van de Reidemeisterbewegingen. Een totaal ander voorbeeld van een invariant is de oppervlakte van een figuur bij de afbeeldingen translatie en rotatie; de oppervlakte blijft namelijk constant onder deze afbeeldingen. Bij invarianten komen de niveauverschillen aan de orde. De driekleuring is een vrij toegankelijke invariant die de onderbouwleerlingen kunnen begrijpen, maar een invariant als de Kauffmanveelterm of de Jonesveelterm is veel lastiger en daarom behoren deze invarianten tot de stof voor de bovenbouw.

Ik zal in het kort een voorbeeld geven van de kracht van de driekleuring. Daartoe hebben we twee afspraken nodig:

1. bij een kruising zijn alle drie de bogen gelijkgekleurd of alle drie verschillend
2. een diagram noemen we driekleurbaar als er precies drie kleuren nodig zijn om het diagram te kleuren zodat voldaan is aan regel 1.

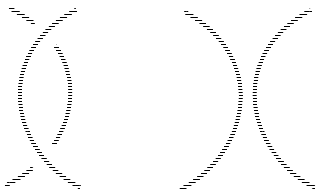
Klaverbladknoop

Het diagram van de klaverbladknoop is driekleurbaar. In de foto hierboven kun je zien dat er drie verschillende kleuren gebruikt zijn.

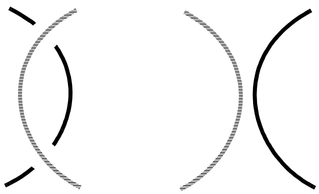
Dat een driekleuring van een diagram een invariant is, kunnen we nagaan met behulp van de Reidemeisterbewegingen. Dit is niet zo'n moeilijke opgave. Eerst R_1:

Als we door een R_1 een kruising aanbrengen, veranderen we niet van kleur zodat we voldoen aan de voorwaarde dat bij een kruising precies één kleur bij elkaar komt. Als we een zelfdoorsnijding weghalen, dan kon bij die kruising slechts één kleur bij elkaar komen, want anders was er geen sprake van een correcte driekleuring. Het is namelijk niet mogelijk dat er bij een zelfdoorsnijding drie verschillende kleuren bij elkaar komen; de boog die over de ander gaat, verandert niet van kleur, maar deze kleur is gelijk aan één van de bogen van de onderkruising.

Dan R_2. We onderscheiden twee mogelijkheden:
– twee bogen met gelijke kleur:

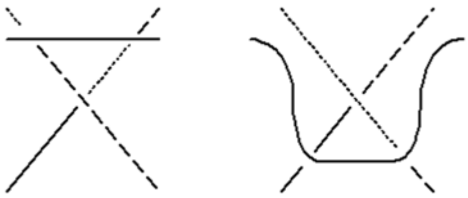


– twee bogen met verschillende kleuren:

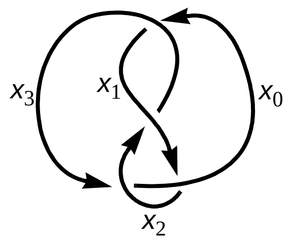


Bij de eerste mogelijkheid wordt slechts één kleur gebruikt. Bij de tweede mogelijkheid zien we dat er rechts twee bogen van de knoop zijn die verschillend gekleurd zijn. Maken we dan twee extra kruisingen, dan dienen we een derde kleur te gebruiken. Meer mogelijkheden zijn er niet en zo is precies voldaan aan de voorwaarden van de driekleuring.

Tenslotte R_3: Voordat we kleuren gaan veranderen, moeten we ons nog eens goed realiseren dat dit slechts een gedeelte van het knoopdiagram is en dat de rest van het diagram niet verandert als we een R_3 toepassen. Het is daarom belangrijk dat de ‘uiteinden’ van het diagramgedeelte niet van kleur veranderen. In de volgende afbeelding is dat ook niet gebeurd.



De triviale knoop kleur je met slechts één kleur en daarom is de klaverbladknoop verschillend van de triviale knoop en dus ook echt geknoopt. Om voor andere diagrammen te beslissen of ze een driekleuring hebben, valt niet altijd mee. Een hulpmiddel kan zijn het modulo 3 rekenen. Als je de drie te gebruiken kleuren de waarden 0, 1 en 2 geeft, dan is de som van de bijeenkomende kleuren in een kruising 0 (0 + 0 + 0), 3 (1 + 1 + 1) of 6 (2 + 2 + 2 of 1 + 2 + 3). Als je modulo 3 rekent, is de som dus steeds 0. Geef nu in een diagram de bogen de waarde x_i, dan ontstaan er vergelijkingen als $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Combineer deze vergelijkingen en het is dan in te zien of het diagram te kleuren is met drie kleuren. Hiermee wordt duidelijk dat het diagram van de 8-knoop niet driekleurbaar is.

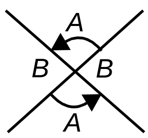


Als we nu de vergelijkingen voor de kruisingen opschrijven, krijgen we:

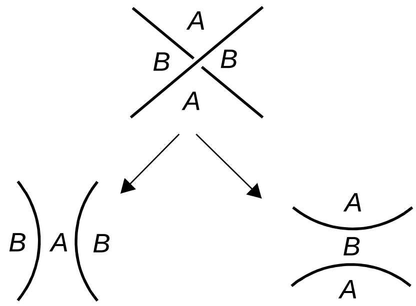
$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 + x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Combineren we de eerste en de tweede vergelijking, dan zien we dat $x_0 = x_2$, uit de tweede en derde vergelijking volgt dat $x_0 = x_1$, uit de eerste en vierde vergelijking volgt $x_2 = x_3$. Dus de oplossingen zijn (0,0,0,0), (1,1,1,1) en (2,2,2,2). Hiermee wordt echter niet voldaan aan een goede driekleuring.

Als voorbeeld van een ingewikkelder variant wil ik de Kauffmanveelterm gebruiken. Dit is een veelterm gedefinieerd op een knopendiagram. Oriëntatie van het diagram is niet belangrijk. Om te beginnen brengen we een markering aan in een kruising. In de vlakken die doorlopen worden als een bovenkruising (tegen de wijzers van de klok) ingedraaid wordt naar de onderkruising, zetten we een *A* en in de andere vlakken een *B*.



Vervolgens splitsen we de kruising op twee manieren:



De eerste splitsing noemen we een *BAB*-splitsing en de tweede een *ABA*-splitsing.

Als we nu een knoopdiagram beschouwen, kunnen we bij elke kruising zo'n splitsing aanbrengen. Als dat gebeurd is, noemen we het verkregen plaatje een toestand. Omdat we elke kruising op twee manieren kunnen splitsen, zijn er van een knoopdiagram met n kruisingen 2^n toestanden te tekenen. Elke toestand op zich is weer een knoopdiagram.

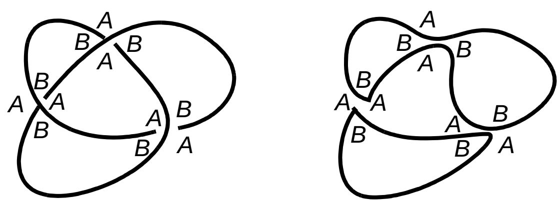
Definitie:
Zij S een toestand van een knoopdiagram;
$c(S)$ is het aantal componenten van de toestand S
$a(S)$ is het aantal *BAB*-splitsingen
$b(S)$ het aantal *ABA*-splitsingen.

De Kauffmanveelterm voor een knoop K is:

$$<K> \ = \ \sum_{s} A^{a(S)} B^{b(S)} d^{c(S)-1}$$

met de sommering over alle mogelijke toestanden van K.

Dit is een polynoom met de variabelen A, B en d. Hoe we de veelterm opstellen, is het beste uit te leggen aan de hand van een voorbeeld. In de volgende illustratie zien we de klaverbladknoop T met daarin aangegeven de A- en B-markeringen, en vervolgens een toestand en haar bijdrage aan de Kauffmanveelterm.



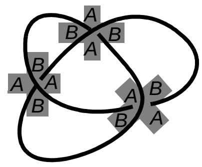
De bijdrage van deze toestand S is A^2Bd. Omdat er twee *BAB*-splitsingen zijn, is $a(S) = 2$ en krijgt de variabele A de exponent 2. Er is één *ABA*-splitsing in het diagram en daarom is $b(S) = 1$ en heeft de variabele B de exponent 1. Het diagram bestaat uit twee componenten en dus $c(S) = 2$ en de exponent van d is gelijk aan $2 - 1 = 1$.

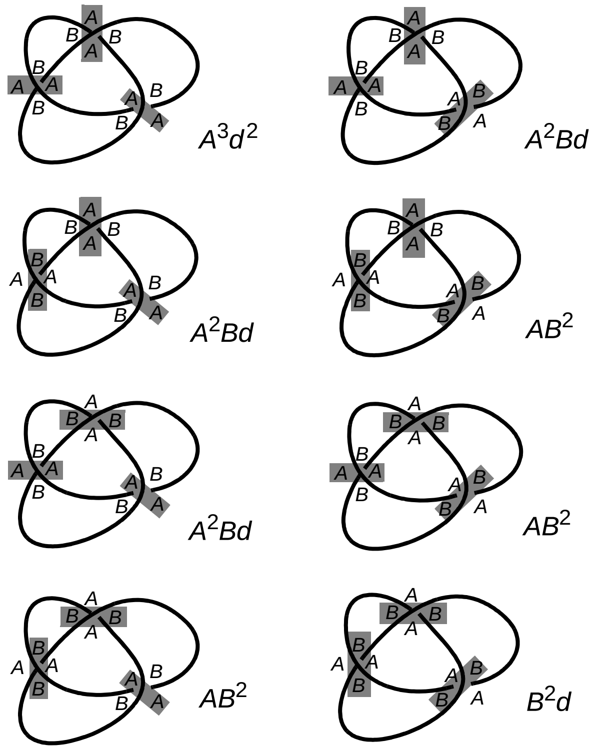
We kunnen een kleine aanpassing maken door de toestanden niet echt te tekenen, maar met behulp van lijntjes de splitsing aan te geven. We gebruiken deze methoden om de Kauffmanveelterm te bepalen van de klaverbladknoop.

De veelterm luidt:

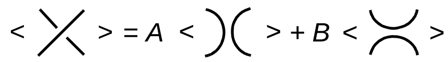
$$\begin{aligned} <T> &= A^3d^2 + A^2Bd + A^2Bd + AB^2 + A^2Bd + AB^2 + AB^2 + B^3d \\ &= A^3d^2 + 3A^2Bd + 3AB^2 + B^3d \end{aligned}$$

In de acht afbeeldingen op de volgende bladzijde is er telkens een keuze gemaakt voor een *BAB*- of een *ABA*-splitsing. Naast de afbeelding staat steeds vermeld wat de bijdrage aan de Kaufmannveelterm is.

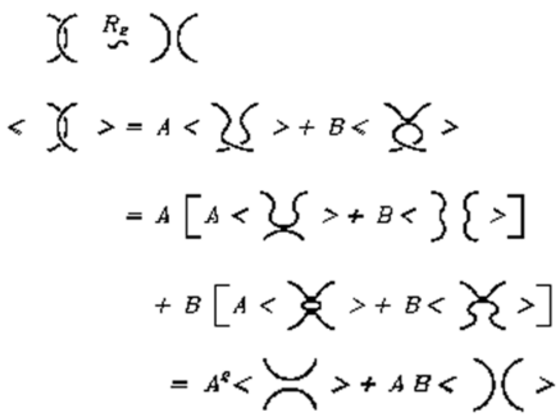


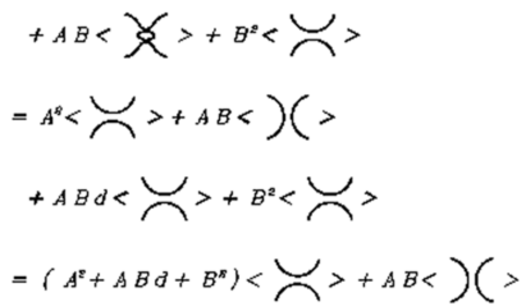


Als gevolg van de definitie van de Kauffmanveelterm kunnen we de volgende relatie schrijven:



Deze notatie gebruiken we om het invariant zijn van de veelterm te bewerkstelligen. We gaan daarom onderzoeken wat de consequenties zijn van de Reidemeisterbewegingen en dat zal een verband opleveren tussen A, B en d. Wanneer we nu R_2 bekijken komen er enkele voorwaarden met betrekking tot A, B en d.





Om de veelterm een invariant te laten zijn, moet gelden:
$AB = 1$ en $A^2 + B^2 + ABd = 0$.

We concluderen daarom dat $B = A^{-1}$ en $d = -(A^2 + A^{-2})$.

Voor de klaverbladknoop hadden we al:
$\langle T \rangle = A^3d^2 + 3A^2Bd + 3AB^2 + B^3d$

We kunnen het resultaat van de Kauffmanveelterm nu uitdrukken in de variabele *A*. We krijgen nu:
$\langle T \rangle = A^7 - A^3 - A^{-5}$.

Invariantie is er ook voor R_3, maar niet voor R_1. Daarom is er nog een uitbreiding van deze veelterm: de genormaliseerde Kauffmanveelterm.

Bij bovenstaande voorbeelden ziet u wiskundige vaardigheden die een leerling binnen de schoolwiskunde niet opdoet, maar die wel makkelijk aan te leren zijn. De Jonesveelterm is op een geheel andere manier gedefinieerd, maar zeker ook te behandelen.

Doordat knopentheorie een totaal andere benadering vraagt, is het een zeer geschikt onderwerp bij wiskunde D, ik denk dan zelf in eerste instantie op het VWO. Als het onderwerp vlechten erbij genomen wordt, kunnen er kleine uitstapjes gemaakt worden naar de algebra.

Ik hoop dat ik met deze voorbeelden uit de knopentheorie uw belangstelling gewekt heb. Er zijn meer invarianten die goed te begrijpen zijn. Naast de knopen kennen we de schakels. Een deelonderwerp is de theorie van de vlechten; allemaal onderwerpen die net iets anders zijn, maar zeker niet te moeilijk. Kortom, knopentheorie is de moeite waard om zelf of met uw leerlingen te bestuderen.

Ab van der Roest
Ichthus College, Veenendaal

Literatuur

Adams, C.C. (1994). *The Knot Book*, New York.
Akveld, F. & M. Akveld (1997). *Doeboek 11: Knopen*, Vierkant voor Wiskunde.
Akveld, M. (2007). *Knoten in der Mathematik*. Zürich: Orell Füslsli.
Sossinsky, A. B. (2002). *Knots*. Cambridge.

Nationale Wiskunde Dagen

Op vrijdag 6 en zaterdag 7 februari 2009 worden de vijftiende Nationale Wiskunde Dagen gehouden in Congrescentrum de Leeuwenhorst te Noordwijkerhout.

Kosten per persoon: € 380,00 bij overnachting op een tweepersoonskamer en € 415,00 bij overnachting op een eenpersoonskamer.

Begin september wordt de programmafolder met aanmeldingsformulier naar de scholen gestuurd. Meer informatie over de NWD is nu al te vinden op http://www.fi.uu.nl/nwd.

Inlichtingen: Ank van der Heiden, telefoon: 030 263 55 55 of e-mail: nwd@fi.uu.nl.