Het is vreemd dat er zo weinig verbanden worden gelegd tussen dezelfde begrippen die op verschillende plaatsen in het boek staan. Een sprekend voorbeeld is het brandpunt en de richtlijn van een parabool. Je kunt een parabool benaderen in de context van het oplossen van kwadratische vergelijkingen, zoals in de onderbouw. Je kunt ook een brug slaan naar meetkundige plaatsen, zoals gebruikelijk in 6 VWO B12. **Jan Otto Kranenborg** filosofeert hierover in het licht van zijn toekomstige lessen wiskunde D.

Brandpunt en richtlijn van een parabool

In de onderbouw wordt de formule van een parabool geleerd als $y = ax^2 + bx + c$.
Hierin is x de variabele en zijn a, b, en c al dan niet bekende constanten. Meestal worden leerlingen gestimuleerd toch vooral een schetsje te maken, al of niet met behulp van de grafische rekenmachine. Immers, het gaat om het vinden van snijpunten van de grafiek van de functie met de x-as. Anders gezegd, er dienen nulpunten gezocht te worden.
In de bovenbouw, 6 VWO WB12 echter, wordt de leerlingen geleerd dat de parabool de verzameling is van alle punten met gelijke afstanden tot een punt en een lijn. Dat punt wordt dan *brandpunt* en die lijn *richtlijn* genoemd. Een andere, oudere term hiervoor is de zogenaamde *conflictlijn* van een punt en een lijn. Dit lijkt over iets héél anders te gaan. Wat heeft die vergelijking nu met gelijke afstanden te maken? Wat is hier nu de link tussen algebra en meetkunde?

Misschien kunnen we onze leerlingen aanzetten om het verband zelf te zoeken. Dan moet het probleem eerst worden vertaald. Uitgaande van de vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ gaan we, gebruikmakend van het begrip conflictlijn, op zoek naar de coördinaten van dat brandpunt en de vergelijking van de richtlijn. Daarmee wordt dan geprobeerd het verband tussen het meetkundige begrip en de algebraïsche benadering te leggen.

Zoals wellicht bekend, vind je de top van een parabool als volgt:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] =$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$$

Hierin is D de discriminant: $D = b^2 - 4ac$.
We constateren dat de coördinaten van de top T zijn:

$$T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$$

Vanwege redenen van symmetrie geldt voor de coördinaten van het brandpunt F en de vergelijking van de richtlijn l het volgende: $F\left(-\frac{b}{2a}, d\right)$ en $l : y = e$, voor nader te bepalen getallen d en e.
Kortom, we gaan gebruiken dat voor een willekeurig punt $P(x,y)$ geldt : $\mathrm{d}(P,F) = \mathrm{d}(P,l)$ voor te kiezen d en e.

Er geldt:

$$\mathrm{d}(P, F) = \sqrt{\left(x - -\frac{b}{2a}\right)^2 + (y - d)^2} \text{ en } \mathrm{d}(P, l) = |y - e|.$$

Gelijkstelling en kwadratering levert

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + (y - d)^2 = (y - e)^2,$$

zodat

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + y^2 - 2dy + d^2 = y^2 - 2ey + e^2,$$

dus

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + d^2 - e^2 = 2y(d - e).$$

Het naar één kant brengen van y geeft vervolgens

$$y = \frac{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + d^2 - e^2}{2(d - e)} \cdot \frac{a}{a} =$$

$$\frac{ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} + a(d^2 - e^2)}{2a(d - e)}$$

Kies nu vervolgens d en e zodanig dat $2a(d - e) = 1$ en $\frac{b^2}{4a} + a(d^2 - e^2) = c$.

Ofwel, zorg dat $d - e = \frac{1}{2a}$ en

$$a(d^2 - e^2) = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Vullen we $d - e = \frac{1}{2a}$ in de tweede vergelijking in, dan krijg je

$$a(d^2 - e^2) = a(d - e)(d + e) =$$
$$a \cdot \frac{1}{2a}(d + e) = c - \frac{b^2}{4a}$$

zodat $d + e = 2c - \frac{b^2}{2a}$.

We kiezen dus nu *d* en *e* zodanig dat

$d - e = \frac{1}{2a}$ en $d + e = 2c - \frac{b^2}{2a}$.

Door beide vergelijkingen eerst op te tellen en dan van elkaar af te trekken, krijg je:

$2d = 2c - \frac{b^2}{2a} + \frac{1}{2a}$ en $2e = 2c - \frac{b^2}{2a} - \frac{1}{2a}$.

Maar dan gelden:

$$d = c - \frac{b^2}{4a} + \frac{1}{4a} = \frac{4ac - b^2 + 1}{4a} =$$
$$\frac{-(b^2 - 4ac) + 1}{4a} = \frac{-D + 1}{4a}$$

en

$$e = c - \frac{b^2}{4a} - \frac{1}{4a} = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a} =$$
$$\frac{-(b^2 - 4ac) - 1}{4a} = \frac{-D - 1}{4a}$$

We concluderen dus dat voor de parabool $y = ax^2 + bx + c$ geldt dat het brandpunt *F* en de richtlijn *l* voldoen aan

$$F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-D + 1}{4a}\right)$$

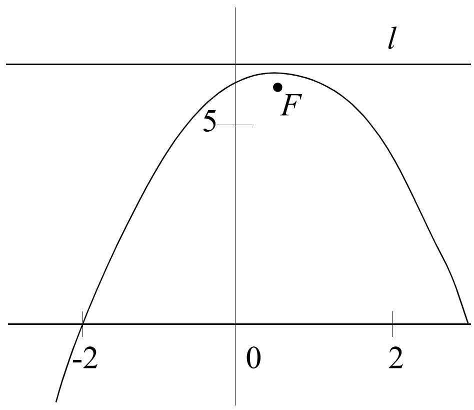
en

$$l : y = \frac{-D - 1}{4a},$$

met $D = b^2 - 4ac$.

Het is eenvoudig na te gaan dat voor de afstand tussen het brandpunt *F* en de richtlijn *l* geldt:

$$\mathrm{d}(F,l) = 2\mathrm{d}(F,T) = 2\mathrm{d}(T,l) = \frac{1}{2a}.$$



Hierboven is getekend de parabool

$$y = -(x + 2)(x - 3) = -x^2 + x + 6$$

met brandpunt $F\left(\frac{1}{2}, 6\right)$ en $l : y = 6\frac{1}{2}$.

Niet alleen is het goed om uitgaande van de parabool $y = ax^2 + bx + c$ te kijken naar nulpunten, top, symmetrie-as, maar ook om oog te hebben voor de vergelijking van de richtlijn en de coördinaten van het brandpunt.

Jan Otto Kranenborg
Carolus Clusius College, Zwolle