Wat te bewijzen is (39)

Rubriek

Grafische rekenmachine, hoe laat u uw leerlingen er mee omgaan? Dit was een van de vragen bij een onlangs gehouden enquête van de NKBW (Nationale Kennisbank Basisvaardigheden Wiskunde). De vraag leverde een breed scala aan reacties op, met negatieve en positieve uitschieters. Als absoluut minimum van de zestig reacties vond ik *'Liever niet. Alleen als het omwille van slecht geredigeerde opgaven niet anders kan'*. Het positieve antwoord dat mij een warm gevoel gaf, luidde: *'Als een rijke, krachtige leer- en onderzoeksomgeving'*.
Deze twee extremen laten zich kernachtig karakteriseren door de respectievelijk kreten 'learn to use' (hier met duidelijke tegenzin) en 'use to learn' (hier in volle overtuiging). En dat laatste, ja, zo zou het moeten zijn en zo kan het ook zijn.

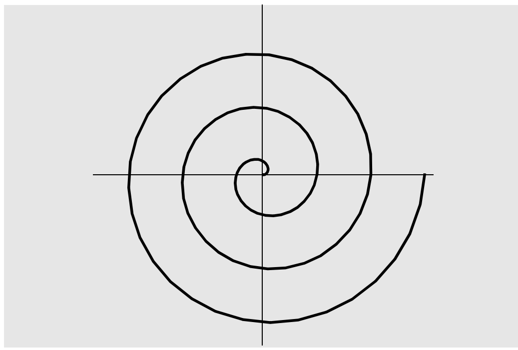
Tot het sterke repertoire van de GR reken ik de mogelijkheid om krommen in parametervorm op het scherm te toveren. Daarbij kan het inspirerend zijn om de leerling zelf figuren te laten maken die aan van te voren opgelegde eisen voldoen. Die leerling moet dan op productieve wijze zijn kennis van algebra gebruiken om *zelf* formules te bedenken die een zeker grafisch effect bewerkstelligen.
Als op bijvoorbeeld de TI-83 de parameter-mode wordt ingesteld, is het standaarddomein voor de parameter T het interval $[0\ ;\ 2\pi]$, dat roept als het ware om goniometrische functies. Laat de leerling bijvoorbeeld simultaan concentrische cirkelbanen maken en het zal direct opvallen dat de rondloopsnelheid toeneemt bij groter wordende straal
Een uitdagende opdracht is nu om diezelfde leerling te vragen een spiraal te ontwerpen. In eerste instantie moet dan het idee opkomen dat de afstand van een punt op de spiraal tot het centrum (zeg de oorsprong) continu verandert en vervolgens dient dit inzicht algebraïsch te worden vertaald. De ervaring heeft geleerd dat sommige leerlingen daarbij voor een monotoon *stijgende* en andere voor een monotoon *dalende* uitwijking opteren. In het ene geval komt er een buitenwaarts draaiende, in het andere geval een binnenwaarts draaiende spiraal op het scherm.

De Archimedische spiraal

De allereenvoudigste spiraal, die bij experimenten in de klas door een aantal leerlingen ook daadwerkelijk werd geproduceerd, is zonder twijfel de kromme die wordt voortgebracht door deze vergelijkingen:

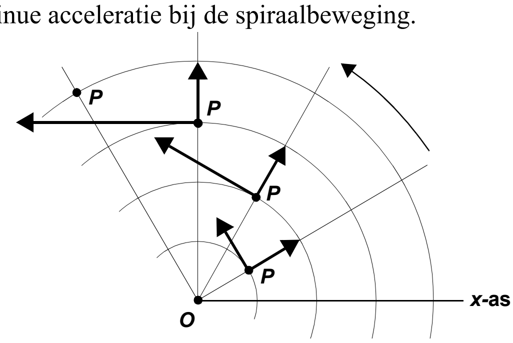
$$\begin{cases} x = t \cdot \cos t \\ y = t \cdot \sin t \end{cases}$$

Het is de beroemde Archimedische spiraal.
Archimedes beschreef zijn spiraal via een eenparig om zijn eindpunt draaiende halfrechte waarop een punt zich met een constante snelheid beweegt. Om het wat concreter te maken, kan worden gedacht aan een mier die op de continu draaiende secondenwijzer van een grote klok gaat wandelen met een constante snelheid, startend in het centrum en eindigend bij het uiterste puntje van de wijzer. Als de mier over zijn wandeling langs de secondenwijzer precies drie minuten doet, bestaat zijn baan uit drie complete *windingen* van de spiraal.



Op de GR kun je dit plaatje maken door het standaarddomein voor T uit te breiden tot $[0\ ;\ 6\pi]$ en even na te denken over de intervallen voor X en Y. Ook dat is wiskunde!
De wandelende mier kan zichtbaar worden gemaakt via 'trace' en de flikkerende cursor en wat dan opvalt, is dat die steeds sneller over de spiraalbaan beweegt.
Is het geen wonder boven wonder dat de resultante van twee bewegingen, beide met een constante snelheid, een beweging oplevert waarbij de snelheid continu toeneemt?

De verklaring is niet moeilijk. Stel voor het gemak dat de eenparige cirkelbeweging een hoeksnelheid van 1 radiaal per seconde heeft en de rechtlijnige (eveneens eenparige) beweging een snelheid van 1 lengte-eenheid per seconde. Bij een cirkelbeweging met een vaste hoeksnelheid is de snelheid evenredig met de afstand tot het middelpunt (het 'draaimoleneffect'). En dat verklaart onmiddellijk de continue acceleratie bij de spiraalbeweging.



De snelheidsvector van de resulterende beweging is de som van twee onderling loodrechte vectoren, en omdat de ene vector continu groeit, doet de somvector dat ook.

Berekening van de snelheid

Een interessante vraag in de analyse-les kan zijn:

Gegeven de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x = t \cdot \cos t \\ y = t \cdot \sin t \end{cases}$$

Hoe verandert de snelheid afhankelijk van t?

Ik volg nu eerst even het geijkte oplossingsschema.
Eerst stap: differentieer x en y naar t. Resultaat:

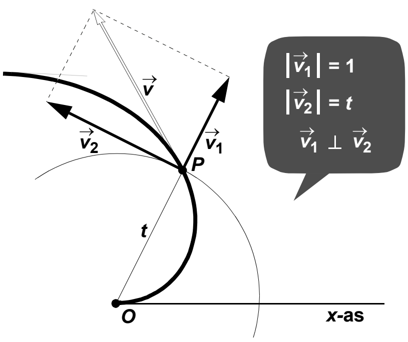
$$\begin{cases} x' = \cos t - t\sin t \\ y' = \sin t + t\cos t \end{cases}$$

Tweede stap: kwadrateren en optellen levert de snelheid in het kwadraat.
Verrassing: sin en cos verdwijnen als sneeuw voor de zon. Noemen we nu $v(t)$ de grootte van de snelheid op het tijdstip t, dan komt er:

$$v(t) = \sqrt{1+t^2}$$

Prima opgave natuurlijk.
Eerst dat differentiëren, waarbij de productregel weer eens geoefend wordt.
Dan de toepassing van $(a \mp b)^2 = a^2 \mp 2ab + b^2$
En ten slotte de 'Pythagoras-gonio-formule'.

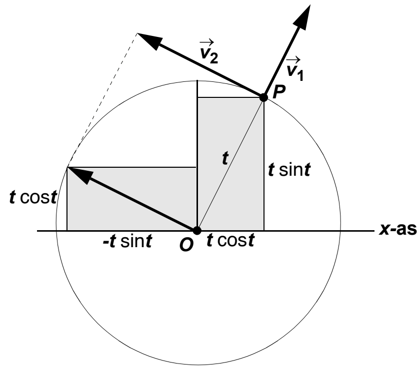
Het kan echter ook zonder al dit 'rekengeweld', namelijk met wat ik hier maar even de kinematische methode noem. Daarbij ontbind ik de snelheidsvector, die natuurlijk gedragen wordt door de raaklijn aan de spiraal, in twee onderling loodrechte componenten. De eerste component $\vec{v_1}$ is de snelheid van de rechtlijnige beweging en die hebben we gelijk 1 verondersteld. De tweede component is de snelheid van de cirkelbeweging en bij een hoeksnelheid van 1 radiaal per seconde en een afstand t tot het centrum is die gelijk aan t.



De lengte van de somvector berekenen we met Pythagoras en zo vinden we als uitkomst opnieuw $\sqrt{1+t^2}$.
Bij deze inzichtelijke oplossing speelt de differentiaal-*rekening* geen rol.

Nu draai ik de zaak om en vraag me af, of ik de afgeleiden van $x = t\cos t$ en $y = t\sin t$ zou kunnen vinden via de kinematische context.
Daartoe bepaal ik de kentallen (ten opzichte van het *Oxy*-stelsel) van de beide vectoren $\vec{v_1}$ en $\vec{v_2}$.

Die van $\vec{v_1}$ zijn natuurlijk: ($\cos t$, $\sin t$)
Omdat $\vec{v_2}$ hier loodrecht op staat en de lengte t heeft, zijn haar kentallen: ($-t \sin t$, $t \cos t$). Een eenvoudige meetkundige verklaring voor wie niet het inproduct paraat heeft, geeft de volgende figuur:



Dit is dezelfde figuur waarmee men zonder rekenwerk de afgeleiden van cos en sin kan verklaren, maar dit terzijde.

De snelheidsvector $\vec{v}$ is de som van de vectoren

$\vec{v_1}$ = ($\cos t$, $\sin t$) en $\vec{v_2}$ = ($-t \sin t$, $t \cos t$)
en heeft dus de kentallen:

($\cos t - t \sin t$, $\sin t + t \cos t$).

En zie, ook zonder kennis van de productregel kunnen we de afgeleiden vinden van $t \cos t$ en $t \sin t$.

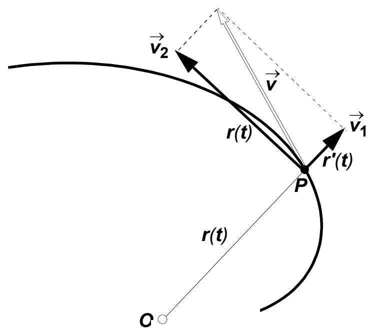
De gelijke-hoek-spiraal

De voorgaande beschouwing kan worden gegeneraliseerd, door de spiraal met analytische voorstelling:

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cdot \cos t \\ y(t) = r(t) \cdot \sin t \end{cases}$$

onder de loep te nemen. Daarbij veronderstel ik dat r een monotone en positief-definiete functie van t is.
De snelheidsvector op het moment t kan dan ontbonden worden in twee onderling loodrechte componenten $\vec{v_1}$ en $\vec{v_2}$ met lengte respectievelijk $r(t)$ en $r'(t)$.
De kentallenparen van $\vec{v_1}$ en $\vec{v_2}$ zijn dan

($r'(t) \cos t$, $r'(t) \sin t$) en ($-r(t) \sin t$, $r(t) \cos t$)



De snelheidsvector van de spiraalbeweging heeft dus de kentallen:

($r'(t) \cos t - r(t) \sin t$, $r'(t) \sin t + r(t) \cos t$).

En dat komt er ook uit als $x = r(t) \cos t$ en $y = r(t) \sin t$

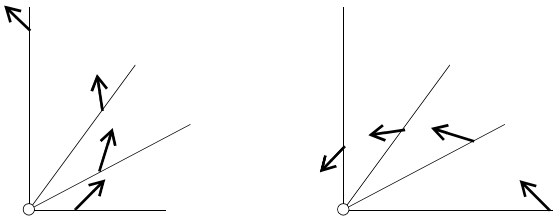
volgens de regels van de kunst worden gedifferentieerd! Als direct gevolg van de stelling van Pythagoras weet ik nu ook dat de lengte van de snelheidsvector gelijk is aan:

$$\sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2}$$

Gelijke-hoek-spiralen

Een speciale vlakke spiraal is die waarbij de bewegingsrichting in elk punt een vaste hoek α met de voerstraal *OP* maakt. Op meetkundige gronden kan ik na het voorgaande inzien dat in zo'n geval de verhouding tussen $r'(t)$ en $r(t)$ een constante moet zijn.

Bij een buitenwaarts gerichte spiraal zal die constante positief zijn, bij een binnenwaartse negatief.



buitenwaarts *binnenwaarts*

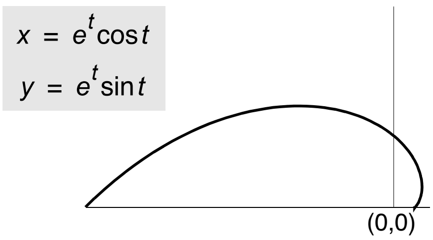
In de figuur is $\alpha = 45°$ genomen.
In dat geval geldt:

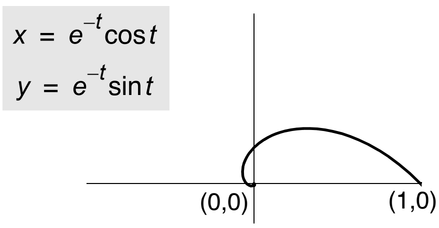
$$\text{óf}\quad r'(t) = r(t) \quad \text{óf}\quad r'(t) = -r(t)$$

Als ik het startpunt in (1, 0) kies, dus $r(0) = 1$, dan weet ik uit de analyse dat moet gelden:

$$\text{óf}\quad r(t) = e^t \quad \text{óf}\quad r(t) = e^{-t}$$

Maar ook bij een andere hoekwaarde, mits $\neq 90°$ (!), vind ik een exponentieel verband tussen r en t.
Hieronder zijn beginstukjes van beide spiralen getekend.





De snelheden als functie van t waarmee de spiralen worden doorlopen, zijn nu respectievelijk

$$v(t) = \sqrt{2} \cdot e^t \qquad \text{en} \qquad v(t) = \sqrt{2} \cdot e^{-t}$$

In de natuur

Als ik me bij de binnenwaartse gelijke-hoek-spiraal voorstel dat de oorsprong een kaarsvlam is en de cursor die ik via trace op het scherm van de GR over de spiraal laat bewegen een vliegend motje, dan zie ik hoe het arme insect als spoedig zijn dood tegemoet vliegt. Dat is geen fantasie, dat is harde werkelijkheid! Dit verschijnsel wordt 'menotaxis' genoemd: het insect oriënteert zich op de lichtbron en vliegt onder een constante hoek met de lichtstraal die zij waarneemt. Doet zij dit buiten bij maanlicht, dan loopt zij geen gevaar. Zij vliegt dan bijvoorbeeld volgens een schroeflijn, een driedimensionale spiraal met het centrum heel ver weg.

Menotaxis komt ook voor in een vriendelijker context: in de oorsprong ligt een korreltje suiker en de cursor is een mier die zich via een binnenwaartse gelijke-hoek-spiraal daar naartoe beweegt.

Tot zover de gelijke-hoek-spiraal die veelvuldig in de natuur opduikt (een fraai voorbeeld is de Nautilus schelp) en die ook wel de naam *logaritmische spiraal* draagt.

Voor wie vertrouwd is met poolcoördinaten (ook beschikbaar op de GR): de buitenwaartse gelijke hoekspiraal (met $\alpha = 45°$) heeft in poolcoördinaten de vergelijking

$$r = e^{\varphi} \qquad \text{ofwel} \qquad \varphi = {}^{e}\log r$$

en dat verklaart die andere naam.

Vectoren, ja of nee?

Spiraalvormige krommen vormen een boeiend onderwerp, waarbij allerlei wiskundige subdomeinen een rol spelen: meetkunde, goniometrie, differentiaalrekening (en als we de lengte van een spiraal willen berekenen, ook de integraalrekening), en ten slotte 'vectoren' (in de kinematische en differntiaalmeetkundige context!).

Dat ik niet van 'vectormeetkunde' spreek, is opzet. Die benaming doet te veel denken aan het voormalige en nogal steriele wiskunde-II-programma uit de jaren zeventig. Freudenthal drukte in zijn werk *Mathematik als pädagogische Aufgabe* zijn bedenkingen tegen de vectormeetkunde als volgt uit: '*Die Geometrie die mit linearer Algebra auf der Schüle möglich ist, ist ein trübes Abwasser*'.

Omdat de vectoren weer opduiken in de nieuwe programmavoorstellen, wil ik hier van de gelegenheid gebruik maken om een lans te breken voor wat ik dan maar liever 'vectoranalyse' noem. Een mooie voorbereiding hierop is te vinden in een oud IOWO-pakketje (over goniometrische verhoudingen en aanverwante zaken) van Jan de Lange, bestemd voor het derde leerjaar van het voortgezet onderwijs en met als titel 'Vlieg er eens in'. En om elk misverstand te voorkomen: die titel sloeg niet op het verschijnsel menotaxis.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl