Breuksplitsen, dat kwam je tegen als je op een slimme manier primitieven moest bepalen. Maar hoe ging het ook al weer? **Piet Lemmens** frist het geheugen op met drie berekeningsmethoden en drie bewijzen.

Breuksplitsing, het hoe en waarom

Inleiding

Dit artikel pretendeert geen originaliteit. Het wil slechts tegemoet komen aan een algemeen gebrek aan kennis van de details over breuksplitsing, door drie berekeningsmethoden en drie bewijzen te presenteren.

We kennen allemaal de stelling dat een rationaal polynoom in x, dus het quotiënt van twee polynomen in x, te schrijven is in de vorm

$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \sum_{w}\left(\sum_{n=1}^{m_w} c_{n,w}(x-w)^{-n}\right) \qquad (1)$$

Hierin is h een polynoom, de buitenste som loopt over de nulpunten van g, en in de binnenste som is m_w de multipliciteit van nulpunt w en zijn de $c_{n,w}$ constanten. De gelijkheid is uiteraard alleen geldig buiten de verzameling van nulpunten van g.

Opmerking

Voor het gemak veronderstellen we dat we werken in $\mathbf{C}[x]$, de verzameling van polynomen in x met coëfficiënten in de complexe getallen, zodat we gebruik kunnen maken van de hoofdstelling van de algebra die ons verzekert van het bestaan van (complexe) nulpunten van g, en dat het aantal ervan, rekening houdend met hun multipliciteiten, gelijk is aan de graad van g, dus $\sum_w m_w = \text{graad }(g)$.

Voorbeelden

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = x + 3 - \frac{1}{x-1} + \frac{8}{x-2}$$

$$\frac{x^2+x+1}{(x-2)^2(x-1)} = -\frac{2}{x-2} + \frac{7}{(x-2)^2} + \frac{3}{x-1}$$

Meestal wordt uitvoerig geoefend op het uitrekenen van deze splitsing in partiële breuken (partial fractions), maar is er weinig of geen aandacht voor een bewijs van deze stelling.

In alle rekenmethoden wordt het polynoom h bepaald door een deling met rest: $f(x) = h(x) \cdot g(x) + r(x)$ met graad(r) < graad(g), zodat we ons verder alleen zullen concentreren op de breuksplitsing van $\frac{f}{g}$ met graad(f) < graad(g).

De berekening van de coëfficiënten

Aannemend dat breuksplitsing mogelijk is, kunnen we de coëfficiënten $c_{n,w}$ op verschillende manieren berekenen.

Eerste methode: lineair stelsel
Voor de manier die na succesvolle berekening garandeert dat het resultaat ook werkelijk gelijkheid geeft in vergelijking (1), vermenigvuldigen we linker- en rechterlid met $g(x)$. Dan staan links en rechts polynomen, en voor gelijkheid is nodig en voldoende dat de coëfficiënten bij dezelfde machten van x links en rechts gelijk zijn. Dit resulteert in een stelsel van lineaire vergelijkingen voor de $c_{n,w}$.

Tweede methode: substitutie van nulpunten
Een manier die wat sneller tot resultaat leidt, begint ook met de vermenigvuldiging met $g(x)$, maar nu vult men links en rechts voor x achtereenvolgens de verschillende nulpunten w van g in, waardoor $c_{m_w,w}$ direct berekend kan worden. Hiermee zijn alle onbekenden berekend als voor alle nulpunten w van g geldt $m_w = 1$.

In feite is dit het begin van het algoritme in het eerste bewijs (zie verderop), en de berekening kan eventueel volgens dat bewijs worden voortgezet. Men kan echter ook verder gaan met het lineaire stelsel van de eerste methode dat nu vereenvoudigd is.

Derde methode: afgeleiden nemen
Een manier die vooral theoretisch van belang is, begint met het kiezen van een nulpunt v van g. Door linker- en rechterlid van vergelijking (1) te vermenigvuldigen met $(x-v)^{m_v}$, krijgen we links en rechts functies die rond $x = v$ in een Taylorreeks te ontwikkelen zijn, waarvan de som van de eerste m_v termen in het rechterlid is

$$\sum_{n=0}^{m_v - 1} c_{m_v - n, v}(x-v)^n$$

Uiteraard moet dat ook het beginstuk zijn van de Taylorreeks van

$$F(x) = (x-v)^{m_v} \cdot \frac{f(x)}{g(x)}$$

rond $x = v$. Bijgevolg is

$$(n!) \cdot c_{m_v - n, v} = F^{(n)}(v)$$

de n-de afgeleide van F in $x = v$, voor $n = 0, \ldots, m_v - 1$. Op dit resultaat zullen we ons beroepen in het derde bewijs (zie verderop).

Waarschuwingen

Bij de eerste rekenmethode hebben we a priori geen zekerheid dat het stelsel oplosbaar is. Mochten we per ongeluk vergeten zijn eerst het polynoom h in (1) af te zonderen en is graad(f) ≥ graad(g), dan loopt de eerste rekenmethode vanzelf spaak, maar bij de tweede en derde rekenmethoden kunnen we uitkomsten vinden die pas bij controle achteraf valse oplossingen blijken te zijn. Zo geven de tweede en derde rekenmethoden voor bijvoorbeeld $\frac{x^3}{(x-1)(x-2)}$ als oplossing $\frac{-1}{x-1} + \frac{8}{x-2}$.

Bewijzen voor breuksplitsing

In het geval dat g slechts één wortel heeft (eventueel meervoudig), geeft de eerste rekenmethode wel duidelijk een unieke oplossing, omdat we blijkbaar $f(x)$ moeten schrijven als een lineaire combinatie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m_v - 1} c_{m_v - n, v}(x-v)^n$$

waaruit de $c_{i,v}$ oplopend vanaf $i = 1$ gemakkelijk iteratief te berekenen zijn. We zullen ons bij de bewijzen daarom beperken tot die gevallen waarin graad(f) < graad(g) en g minstens twee verschillende nulpunten heeft.

Eerste bewijs

Het meest algemeen bekende bewijs herleidt $\frac{f}{g}$ tot $\frac{f_1}{g_1}$ waarin f_1 en g_1 weer polynomen zijn met graad(f_1) < graad(g_1) en g_1 een echte deler van g. In het bijzonder is elk nulpunt van g_1 ook nulpunt van g, met hoogstens dezelfde multipliciteit, en graad(g_1) < graad(g). Als g_1 nog onderling verschillende nulpunten heeft, is inductie mogelijk.

We kiezen een nulpunt v van g en definiëren g_1 door $(x-v)g_1(x) = g(x)$.
Verder definiëren we g_2 door $(x-v)^{m_v} g_2(x) = g(x)$.
Dit impliceert $g_2(v) \neq 0$.

Nu volgt

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(v)}{g_2(v)(x-v)^{m_v}} = \frac{f(x) - g_2(x) \cdot \frac{f(v)}{g_2(v)}}{g(x)}$$

In het rechterlid is de teller een polynoom dat voor $x = v$ de waarde 0 heeft, dus is deze teller deelbaar door $(x - v)$ met quotiënt f_1, en het resultaat is dat met $c_{m_v, v} = \frac{f(v)}{g_2(v)}$ geldt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = c_{m_v, v}(x-v)^{-m_v} + \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Tweede bewijs

We herleiden $\frac{f(x)}{g(x)}$ tot de vorm

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q_1(x)(x-v)^{-m_v} + \frac{q_2(x)}{g_2(x)}$$

waarin v en het polynoom g_2 zijn als in het eerste bewijs, en q_1 en q_2 polynomen zijn met graad(q_1) < m_v en graad(q_1) < graad(g_2). We hoeven ons verder dus alleen nog te bekommeren om de term $\frac{q_2}{g_2}$ en ligt, indien nodig, de weg naar inductie weer open.

Voor de herleiding gebruiken we het algoritme van Euclides voor polynomen. De polynomen $(x-v)^{m_v}$ en $g_2(x)$ hebben geen gemeenschappelijke nulpunten, en er is dus geen polynoom van graad ≥ 1, waardoor beide deelbaar zijn zonder rest. We nemen meteen maar het algemene geval dat g het product is van twee polynomen k_1 en k_2, beide van graad ≥ 1, en niet beide deelbaar door eenzelfde polynoom van graad ≥ 1. We zullen bewijzen dat

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q_1(x)}{k_1(x)} + \frac{q_2(x)}{k_2(x)}$$

met graad(q_1) < graad(k_1) en graad(q_2) < graad(k_2). Daartoe voeren we herhaaldelijk delingen met rest uit:

$$k_n(x) = f_n(x) \cdot k_{n+1}(x) + k_{n+2}(x)$$

voor n vanaf $n = 1$.

Telkens wordt k_{n+2} hierdoor gedefinieerd als een polynoom met graad(k_{n+2}) < graad(k_{n+1}). We stoppen bij $n = m$ zodra graad(k_{m+2}) = 0, dus als $k_{m+2}(x)$ een constante is. Dan is $k_{m+2} \neq 0$, want anders zouden k_1 en k_2 beide deelbaar zijn door k_{m+1} van graad ≥ 1. Door terugrekenen en vermenigvuldigen met $\frac{f(x)}{k_{m+2}}$, krijgen we

$$f(x) = f_2(x) \cdot k_1(x) + f_1(x) \cdot k_2(x)$$

waarin f_1 en f_2 polynomen zijn. Vervolgens delen we f_2 door k_2 met quotiënt f_3 en rest q_2, waarna met $q_1 = f_1 + f_3 \cdot k_1$ geldt dat

$$f(x) = q_2(x) \cdot k_1(x) + q_1(x) \cdot k_2(x)$$

Nu hebben we graad(q_2) < graad(k_2), dus f en $q_2 \cdot k_1$ zijn beide van lagere graad dan g (immers $g = k_1 \cdot k_2$, en er volgt dat graad(q_1) < graad(k_1). Aldus is het gestelde doel bereikt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q_1(x)}{k_1(x)} + \frac{q_2(x)}{k_2(x)}$$

Derde bewijs

We tonen aan dat de polynomen $p_{n,w} = g(x)(x-w)^{-n}$ voor de verschillende nulpunten w van g en $1 \le n \le m_w$ een over **C** lineair onafhankelijk stelsel P vormen in **C**[x]. Daar hun aantal gelijk is aan graad(g) en graad($p_{n,w}$) < graad(g) is P een basis over **C** van de lineaire deelruimte van alle polynomen p met graad(p) < graad(g). Dientengevolge kan f eenduidig worden geschreven in de vorm

$$f(x) = \sum_w \left(\sum_{n=1}^{m_w} c_{n,w} \cdot p_{n,w}(x) \right).$$

waaruit na deling door $g(x)$ formule (1) onmiddellijk volgt.

Voor het aantonen van de lineaire onafhankelijkheid nemen we een lineaire combinatie over **C** van de polynomen van P die het nulpolynoom oplevert:

$$0 = \sum_w \left(\sum_{n=1}^{m_w} d_{n,w} \cdot p_{n,w}(x) \right)$$

met coëfficiënten in **C**. Delen we linker- en rechterlid door $g(x)$, dan krijgen we een breuksplitsing van $0 = \frac{0}{g(x)}$.

Uit de derde berekeningsmethode zien we nu direct dat voor alle coëfficiënten geldt $d_{n,\mathrm{w}} = 0$.

Overigens levert ook de tweede rekenmethode dit resultaat. Hiermee is de onafhankelijkheid vastgesteld.

Piet Lemmens
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Literatuur

Courant, R. (1937). *Differential and Integral Calculus, Volume I, seond edition*. London: Blackie & Son.

Jacobson, N. (1974). *Basic Algebra I.* San Francisco: Freeman.

Lang, S. (1966). *Linear Algebra*. Reading: Addison-Wesley.

Foto: Tammo Jan Dijkema