Een van de plenaire lezingen op NWD 2007 ging over de Black-Scholesformule; een formule waarmee de waarde van opties op aandelen bepaald kan worden. De lezing werd door velen als bijzonder ingewikkeld ervaren, waarschijnlijk omdat de gemiddelde NWD-bezoeker niet in opties noch in aandelen handelt... Maar **Wout de Goede** herinnerde zich dat hij van diezelfde formule lesmateriaal had gemaakt inclusief simulaties op de TI-83.

Black-Scholes op de TI-83

Vooraf

Een jaar of wat geleden stuurde ik teams studenten naar scholen om in vijfde en zesde klassen VWO (WB) iets te vertellen over de bètastudies. Zo'n team gebruikte dan één of meer lesuren om de wiskundestudie wat meer bekendheid te geven en in het kader daarvan had ik wat presentaties gemaakt over recent wiskundig onderzoek, want de meeste leerlingen kennen alleen de jaren- of zelfs eeuwenoude schoolwiskunde en vragen zich verbijsterd af wat er in wiskundig onderzoek nu eigenlijk precies gebeurt. 'Omdat de wiskundeleraar alles weet, is met betrekking tot wiskunde alles immers al lang bekend?' Leerlingen zijn trouwens niet de enigen die geen beeld hebben van een wiskundig onderzoeker: toen een bekende wiskundige jaren geleden op televisie als chaostheoreticus optrad, moest hij van de regisseur van het programma persé een witte jas dragen; immers als wetenschapper moet je er toch op zijn minst uitzien als een soort professor Sickbock? En een wiskundig onderzoeker is toch ook een wetenschapper? De arme man perste zijn kolossale lijf in een geleende witte jas die hem veel te klein was en bevestigde zodoende voor de kijkers met zijn uiterlijk het stereotiepe beeld van de wat 'vreemde' figuur uit de wetenschap.

Toen ik op de NWD vrijdagmiddag Svetlana Borovkova hoorde spreken over opties en de Black-Scholesformule, herinnerde ik mij dat ik de hand-out van zo'n presentatie voor leerlingen over die formule, samen met een programmaatje voor de GR, nog ergens op de computer moest hebben staan. In de begintijd van de GR hadden de leerlingen nog geen eigen rekenmachine, maar de promotieteams namen een koffer met circa vijftien exemplaren van de TI-83 mee en de leerlingen konden daar dan, eventueel in tweetallen, mee werken. Inderdaad hoefde ik alleen maar op mijn computer te zoeken en de gevonden Latexfile om te zetten in een Worddocument, de formules in MathType te tikken en de plaatjes uit het bij de tex-file behorende dvi-document te kopiëren (ik ben niet zo handig in het tekenen in Word, dus dit ging aanzienlijk sneller) om één en ander naar de *Nieuwe Wiskrant* te sturen.

Het programma dat ik voor het practicum met de GR (TI-83) had gemaakt, had ik, zoals gezegd, ook nog. Ik heb het met hulp van een student-assistent die werkt voor het webplatform van de RuG op de site http://www.rug.nl/wiskunde/informatievoor/docenten/index gezet, waar het desgewenst door de liefhebber afgehaald kan worden. Jan Feitsma is de naam van de assistent. Hij is al aardig ver met zijn wiskundestudie gevorderd en omdat hij jaren bij mij in de klas heeft gezeten en ook nog eens college bij mij heeft moeten lopen, heeft hij met veel plezier zijn oude wiskundedocent volgens het expertmodel les gegeven en verteld hoe een en ander in zijn werk ging. Van enige zelfwerkzaamheid was geen sprake; ik mocht alleen mijn personeelsnummer en mijn wachtwoord intypen, om toegang te krijgen tot het bewerken van die website. De rest werd mij volkomen uit handen genomen, ik hoefde alleen van tijd tot tijd instemmende geluiden voort te brengen.

Waar het om ging was het volgende: De leerlingen konden een tijdje een optiehandelspelletje tegen de Black-Scholesformule spelen, waarbij de aandelenkoers en de optiehandel worden gesimuleerd (zie figuur 1): het betreft plaatjes van het scherm van een TI-83 (gewoon van links naar rechts te lezen; dus de schermen op één rij komen, na een druk op de ENTER-toets, achtereenvolgens tevoorschijn!) Natuurlijk had ik het programma op de GR beveiligd om te voorkomen dat de rekenmachines volkomen in de war terugkwamen en stuk voor stuk gereset en weer 'geladen' moesten worden. Het 'informaticafreak'-gehalte van de geïnteresseerde leerlingen was namelijk nogal hoog en zij hadden dientengevolge gewoonlijk razendsnel door hoe je zo'n programma moet editen!

Het praatje over de Black-Scholesformule was een succes. Dat je een formule, waarmee recentelijk de Nobelprijs voor de Economie is gewonnen, vrijwel volledig kunt snappen met wat je in de bovenbouw van het VWO op dat moment aan wiskundige kennis in huis hebt en dat je zelfs, als je wat verder bent, met enige moeite zo'n formule zelf zou kunnen afleiden, is een echte eye-opener. Hier de output van het GR-programma:

Bij ‘OPTIEPRIJS?’ wacht de GR tot je een getal hebt ingevoerd, hier 5. Daarna vervolgt het programma met ‘IK DENK: 7.01’ en vervolgens zie je na elke keer 'ENTER' de volgende schermpjes verschijnen.

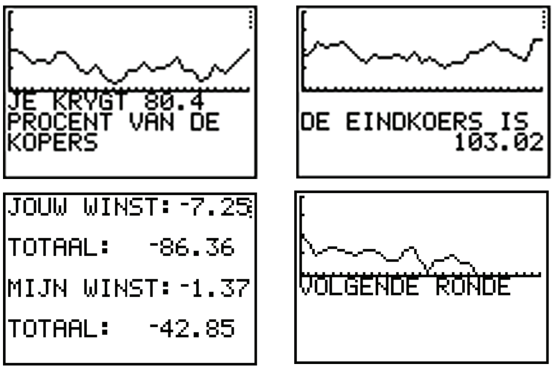

fig. 1 Black-Scholes op de TI-83

Je ziet in dit voorbeeld dat de optiehandel na een aantal keren spelen niet winstgevend bleek te zijn, maar dat de Black-Scholesformule het wel beter deed dan de natte vinger!

De leerlingen kregen na de Powerpointpresentatie over het stukje wiskundig onderzoek een hand-out van dat promopraatje (zoals we die presentaties hadden genoemd), zodat de geïnteresseerde liefhebber een en ander nog eens na kon lezen. Deze hand-out van het promopraatje over de Black-Scholesformule is een tekst op toentertijd leerlingniveau van een artikel bedoeld voor docenten. Dat artikel van professor Dehling[1] is verschenen in *Speeltuin van de wiskunde*[2], een boekje dat elke docent zou moeten bezitten. De tekst van de hand-out volgt hier:

De wiskunde achter de Nobelprijs voor Economie 1997

Wat is een optie waard?

Oorspronkelijke tekst van Herold Dehling.

Inleiding

In het najaar van 1997 werd de Nobelprijs voor Economie uitgereikt aan de Amerikaanse hoogleraren Merton en Scholes voor hun baanbrekend werk op het gebied van de waardering van opties. Als derde naam hoort hier nog die van Black bij, maar hij overleed twee jaar eerder. Hoogtepunt van hun theorie is de befaamde Black-Scholes(-Merton)formule voor de waarde van een Europese call optie op een aandeel. Deze formule is dat

$$f(t,s) = s\Phi\left(\frac{\ln(s/K) + (r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

$$-Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln(s/K) + (r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

waarbij Φ de verdelingsfunctie van de standaardnormale verdeling is:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \text{ (de functie normalcdf op de TI)}$$

Weliswaar een indrukwekkende formule, maar in het volgende ga je snappen wat de symbolen betekenen, een indruk krijgen hoe zo’n formule tot stand komt en er ook nog wat mee werken. Daarbij komen geavanceerde wiskundige onderwerpen ter sprake.

Opties

Het eenvoudigste voorbeeld van een optie is een Europese call optie op een bepaald aandeel, bijvoorbeeld een aandeel Koninklijke Olie. Bij deze optie is vastgelegd de zogenaamde *strikeprijs* K en een uitoefendatum T. Op dit tijdstip T mag de houder van de optie dan voor een bedrag K één aandeel Koninklijke Olie van de uitgever van de optie kopen.

Sinds de introductie ervan in het jaar 1973 heeft de handel in opties een hoge vlucht genomen. Tegenwoordig wordt veel meer in opties dan in de onderliggende aandelen gehandeld. Opties worden om uiteenlopende redenen gekocht. Een groep kopers gebruikt opties om zich in te dekken tegen marktrisico’s. Wie bijvoorbeeld over een aantal maanden een zekere hoeveelheid dollars nodig heeft, kan call opties op dollars aanschaffen en zo het risico van een koersstijging van de dollar afkopen. Een tweede groep kopers van opties is speculatief bezig en geïnteresseerd in het feit dat je bij opties met een relatief kleine inzet grote winsten kunt maken – bijvoorbeeld met een call optie als de aandelenkoers behoorlijk stijgt. Hier staat natuurlijk tegenover dat je een groot risico loopt dat de optie volledig waardeloos wordt als de aandelenkoers onder de uitoefenprijs daalt. Veel sterker dan bij beleggingen in aandelen loop je dus bij beleggingen in opties een fors risico om je hele inleg kwijt te raken.

Iedere optie geeft de houder een recht maar geen verplichting. Omgekeerd legt het aan de uitgever een verplichting op waar geen recht tegenover staat. Het ligt dus voor de hand dat de koper van een optie daarvoor een zeker bedrag zal moeten betalen. Maar wat zou een redelijke prijs zijn? Met precies deze vraag hebben Black, Scholes en Merton zich beziggehouden.

De waarde van een Europese call optie valt vrij gemakkelijk te bepalen op de uitoefendag T. Als je de waarde van het aandeel op tijdstip t noteert met $s(t)$, dan bestaan er op de uitoefendag twee mogelijkheden, namelijk $s(T) \leq K$ of $s(T) > K$.
In het eerste geval is op het uitoefentijdstip de prijs van het aandeel op de beurs kleiner dan de strikeprijs en dus zou de houder wel gek zijn om zijn optie uit te oefenen. Daarmee wordt in dat geval de waarde van de optie 0. In het tweede geval is het verstandig om de optie uit te oefenen. De houder van de optie zal dus voor het bedrag K het aandeel kopen. Als hij dit aandeel direct weer voor $s(T)$ op de beurs verkoopt, heeft hij een winst van $S_T - K$ gemaakt en dat is dus de waarde van de optie op dag T.
Samengevat: de waarde van een Europese call optie op de uitoefendatum T kun je weergeven met de functie $f_T(s) = \max(0, s - K)$ als de koers van het aandeel op tijdstip T gelijk is aan s voor de waarde van een Europese call optie op het uitoefentijdstip T.
De essentiële vraag van de optietheorie is nu: Wat is de waarde van de optie op een willekeurig tijdstip $t < T$?

Binair één-periode model
Zoals vaak bij grote wetenschappelijke ontdekkingen, zit ook bij de Black-Scholes-Mertontheorie de essentie in een heel eenvoudige gedachte; je moet er alleen maar op komen! Deze gedachte valt reeds bij een heel simpel model voor de ontwikkeling van aandelenprijzen in een gegeven periode uit te leggen. Eerst een getallenvoorbeeld:

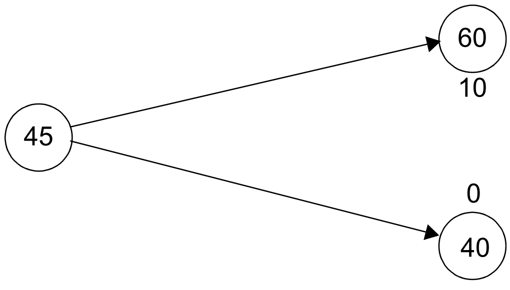

fig. 2 Voorbeeld van een één-periode binair model

Bekijk een periode met lengte 1, tussen de tijdstippen $t = 0$ en $t = 1$. Stel dat de waarde van een aandeel aan het begin van de periode 45 is en dat er slechts twee mogelijke scenario's tussen nu en het einde van de periode kunnen optreden, namelijk dat de prijs daalt naar 40 of dat de prijs stijgt naar 60. Kijk nu naar een Europese call optie met strikeprijs $K = 50$. Je hebt eerder gezien dat de waarde van deze optie aan het einde van de periode, dus op het tijdstip $t = 1$, gelijk aan 0 of 10 is, al naar gelang de aandelenkoers naar 40 daalt of naar 60 stijgt. Maar wat is de waarde van de optie nu, dat wil zeggen op tijdstip $t = 0$?
Stel je in de plaats van de uitgever van de optie. Je bent door de verkoop van de optie een verplichting aangegaan en moet om aan die verplichting te kunnen voldoen aan het einde van de periode het bedrag 0 of 10 ter beschikking hebben, afhankelijk van de ontwikkeling van de aandelenkoers. De essentiële gedachte achter de theorie van Black, Scholes en Merton is nu de volgende: aan het begin van de periode stel je een aandelenportefeuille samen waarvan de waarde aan het einde van de periode gelijk moet zijn aan de waarde van de optie, onafhankelijk van de koersontwikkeling van het aandeel. Dan heb je aan het einde van de periode precies genoeg om de houder van de optie tevreden te stellen. Men zegt dat deze portefeuille de optie dupliceert en noemt het geheel een *hedging strategy*.
Door aanschaf van zo'n duplicerende portefeuille dek je je in tegen het risico van de aangegane verplichting. Aan de aanschaf ervan zijn voor de uitgever kosten verbonden – en dat is precies de waarde van de optie.
Stel dat je alleen in aandelen of in geld kunt beleggen. Neem om de zaak nog eenvoudiger te maken aan dat de rente op geldleningen en op spaarrekeningen 0 is – het geval van positieve rente is niet echt anders, maar zorgt wel voor lastiger formules.
Voor een beleggingsstrategie moet je dus kiezen voor het aantal aandelen (x) dat je wilt houden en voor de hoeveelheid geld (y) die je wilt lenen. Dan heb je aan het einde van de periode in het geval van een dalende koers $40x + y$ en in het andere geval $60x + y$. Voor een duplicatie van de optie moeten deze waarden gelijk zijn aan 0, respectievelijk 10 en dat leidt tot het volgende stelsel van twee eerstegraads vergelijkingen met twee onbekenden:

$$60x + y = 10$$

$$40x + y = 0$$

De oplossing van dit stelsel is $x = \frac{1}{2}$ en $y = -20$. Je beleggingsstrategie ziet er dus als volgt uit: koop $\frac{1}{2}$ aandeel en leen 20. Ongeacht de koersontwikkeling van het aandeel heb je aan het einde van de periode de waarde van de optie: in het geval van een stijgende koers heeft je halve aandeel de waarde 30, daarvan zijn 20 nodig om de lening af te lossen en blijven 10 over om de houder van de optie tevreden te stellen. In het geval van een dalende koers, heb je 20 aan aandelen, dit hele bedrag wordt gebruikt ter aflossing van de lening en vervolgens blijft er dus niets over, maar dat hoeft ook niet omdat de optie nu de waarde 0 heeft.
De hier beschreven strategie kost in het begin geld: je koopt $\frac{1}{2}$ aandeel voor de prijs van 22,50, daartoe leen je 20 bij de bank en je hebt dus nog 2,50 extra nodig. Dit bedrag zul je aan de koper voor de optie vragen en de waarde van de optie is dus aan het begin 2,50.

Waarom zal op de optiemarkt alleen de hier berekende prijs gelden en geen andere? Dit heeft te maken met het idee dat er op een perfecte markt geen arbitragegelegen-

heid mag bestaan, dat wil zeggen een gelegenheid om zonder risico geld te verdienen – anders zou namelijk iedereen dat kunnen doen en dat zou de mogelijkheid om zeep helpen, immers waar moet dit door iedereen verdiende geld dan vandaan komen?
Afwijkingen van de optieprijs van de hier berekende 2,50 naar boven of beneden zullen een arbitragemogelijkheid openen. Stel namelijk dat de prijs hoger is dan 2,50 – nu is het voordelig om opties uit te geven. Voor 2,50 koop je de portefeuille die de waarde van de optie perfect reproduceert en dan hou je nog geld over dat je in eigen zak kunt steken! Omgekeerd, als de prijs van de optie beneden 2,50 ligt, wordt het voordelig om opties te kopen. Je kunt dan namelijk precies het omgekeerde van de strategie van de uitgever doen en $\frac{1}{2}$ aandeel verkopen en 20 op je bankrekening zetten – deze strategie levert je in het begin direct 2,50 op, meer dan je voor de optie betaald hebt en dus hou je weer iets over.
Hoe stel je dus de beginwaarde van een optie vast? Kijk naar de eindwaarden en naar de hedging strategie die nodig is om geen risico te lopen.

Binair één-periode model: algemene formules

Wat in het voorgaande voor een getallenvoorbeeld is gedaan, kan zonder veel problemen ook algemeen.
Neem nog steeds de rente op de geldmarkt 0. Deze aanname maakt bij een eerste behandeling de formules eenvoudiger. Aan de andere kant is het gemakkelijk om later naar het algemene geval over te gaan door alle prijzen met de marktrente af te prijzen.
Noteer met s de huidige prijs van het aandeel en met s_d en s_u de twee mogelijke prijzen aan het eind van de periode, waarbij $s_d < s_u$. Van deze prijzen mag je verder aannemen dat $s_d < s < s_u$, want anders zou er weer een arbitragemogelijkheid bestaan. Stel je namelijk bijvoorbeeld dat s_d en s_u beide groter zijn dan s, dan is er een risicovrije strategie om geld te verdienen: leen geld bij de bank en beleg in aandelen!

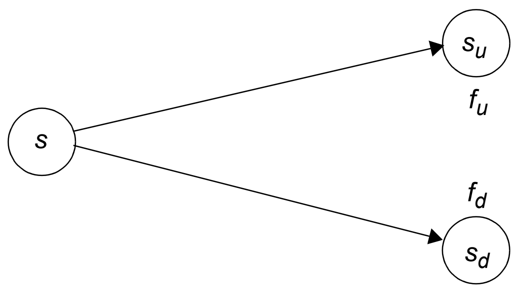

fig. 3 Algemeen één-periode binair model

De waarde van de optie aan het einde van de periode zal f_d en f_u zijn, afhankelijk van de ontwikkeling van de prijs van het aandeel (zie figuur 3).
Nu de beleggingsportefeuille die de claim dupliceert, ongeacht de waardeontwikkeling van het aandeel. Met x aandelen en met y geleend geld krijg je de vergelijkingen:

$$s_d \cdot x + y = f_d$$

$$s_u \cdot x + y = f_u$$

Dit stelsel heeft de oplossing

$$x = \frac{f_u - f_d}{s_u - s_d} \quad \text{en} \quad y = s_u \cdot \frac{f_u - f_d}{s_u - s_d} \quad .$$

De waarde f van de portefeuille op tijdstip 0 en dus, volgens de eerdere redeneringen, de huidige waarde van de optie, is dan:

$$f = s \cdot x + y = s \cdot \frac{f_s - f_d}{s_u - s_d} + f_u - s_u \cdot \frac{f_s - f_d}{s_u - s_d} =$$

$$= \frac{s_u - s}{s_u - s_d} f_d + \frac{s - s_d}{s_u - s_d} f_u$$

De formule is met opzet in de vorm op de tweede regel geschreven: de huidige waarde van de optie kun je nu herkennen als een gewogen gemiddelde van de toekomstige waarden. Stel namelijk

$$q = \frac{s_u - s}{s_u - s_d} \text{ en } q' = \frac{s - s_d}{s_u - s_d} .$$

Merk op dat $0 \le q \le 1$ en dat $q + q' = 1$, zodat $q' = 1 - q$.

Je ziet dat de huidige waarde van de optie juist het gewogen gemiddelde is van de toekomstige waarden met de gewichten q en $1 - q$. Je kunt q en $1 - q$ opvatten als kansen en de laatste formule zegt dan dat de huidige waarde van de optie de verwachte toekomstige waarde bij gebruik van deze kansen is. Het zal duidelijk zijn dat het hier om technische kansen gaat die in elk geval niet direct iets te maken hebben met kansverdelingen op de aandelenmarkt. Maar deze manier om de huidige waarde als verwachtingswaarde van toekomstige waarden uit te drukken maakt het nu mogelijk om de rijke techniek van de kansrekening te gaan gebruiken.
De gewichten q en $1 - q$ hebben ook een bijzonder verband met de prijzen van het aandeel. Je kunt gemakkelijk narekenen dat $s = q \cdot s_d + (1 - q) \cdot s_u$, dus dat de huidige koers van het aandeel gelijk is aan het met de gewichten q en $1 - q$ gewogen gemiddelde van de koersen aan het einde van de periode.
Als je deze gewichten weer als kansen opvat, dan betekent dit dat de huidige koers gelijk is aan de verwachtingswaarde van de koers aan het einde van deze periode. Een kansmodel met deze eigenschap heet in de kansrekening ook wel een *martingaal*. In termen van kansbomen is een martingaal een boom met dusdanige gewichten dat alle takken in balans zijn. Oorspronkelijk werden martingalen bestudeerd als modellen voor eerlijke spelen, dat wil zeggen spelen waarbij de verwachte uitkering in iedere ronde gelijk is aan de inzet. De daarbij ontwikkelde martingaal-theorie heeft inmiddels ingang gevonden in

bijna alle deelgebieden van de kansrekening. Je kunt tenslotte nog even kijken wat de algemene formule voor het concrete getallenvoorbeeld van de vorige paragraaf oplevert. Om van de tak in figuur 3 een martingaal te maken, moet je de gewichten q en $1-q$ zo kiezen dat $45 = q \cdot 60 + (1-q)40$, dus moet $q = \frac{1}{4}$ en $1 - q = \frac{3}{4}$ zijn. De waarde van de optie aan het begin van de periode is de verwachting van de waarden aan het einde, met deze getallen als kansen en dus $f = \frac{1}{4} \cdot 10 + \frac{3}{4} \cdot 0 = 2,50$, zoals je ook direct al gevonden had.

Even resumeren: hoe bepaal je de waarde van een optie op tijdstip $t = 0$?
Kijk naar de waarde van het aandeel op $t = 0$ en naar de beide mogelijke waarden op tijdstip $t = 1$. Kies gewichten q en $1 - q$ langs de takken zo, dat de beginwaarde gelijk is aan het gewogen gemiddelde van de waarden bij de takken. De waarde van de optie vind je door dezelfde gewichten te gebruiken bij het wegen van de beide waarden van de optie op $t = 1$.
Het is nu ook gemakkelijk om de bijbehorende hedging strategie vast te leggen: de waardeverandering Δf van de duplicerende portefeuille in een periode kan alleen veroorzaakt worden door een verandering in de aandelenkoers – de waarde van de belegging in contanten blijft namelijk onveranderd. Als je x aandelen in portefeuille hebt en de aandelenkoers verandert met Δs, dan verandert de waarde van je portefeuille met $\Delta f = x \cdot \Delta x$.
Hieruit volgt

$$x = \frac{\Delta f}{\Delta s}$$

De hedging procedure die je zo krijgt wordt ook wel een delta-hedge genoemd. Kijk nog even naar het voorbeeld uit de vorige paragraaf. Hier is $\Delta f = 7,5$ en $\Delta s = 15$ en dus

$$x = \frac{\Delta f}{\Delta s} = \frac{1}{2}$$

Deze berekening krijg je langs de bovenste tak, maar de andere tak levert hetzelfde resultaat.

$$\frac{-2,5}{-5} = \frac{1}{2} \ .$$

Het binaire één-periodemodel is natuurlijk geen realistisch model, zeker niet als het om een langere periode gaat. Maar het is heel goed bruikbaar als bouwsteen voor binaire bomen en met een voldoende fijnmazige boom kom je al dichter bij de werkelijkheid, maar hoe krijg je een continu model?
En de vraag die ook nog moet worden beantwoord is: hoe schat je toekomstige aandelenkoersen?

Algemene binaire boom-modellen
Een binaire boom modelleert de aandelenkoers gedurende een aantal, zeg n, periodes. Binnen één periode is het model gewoon een binaire tak, dat wil zeggen dat er twee mogelijke ontwikkelingen van de aandelenkoers zijn.

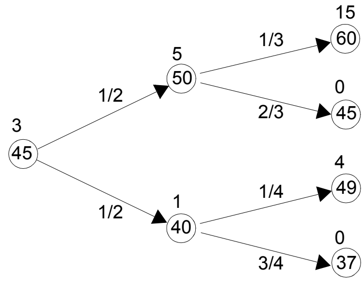

fig. 4 Voorbeeld van een twee-perioden binair model

Met behulp van de technieken uit de vorige paragraaf kun je ook de waarde van een optie in een binaire boom bepalen. Om te beginnen, bereken je de gewichten die van de boom een martingaal maken (zie figuur 4). Nu kun je de waarde van de optie op iedere plaats in de boom recursief berekenen, beginnend bij het uitoefentijdstip n. Het eindresultaat, de waarde van de optie op tijdstip $t = 0$, kun je ook direct in één keer uitrekenen, namelijk als verwachte optiewaarde op tijdstip n waarbij de verwachtingen met betrekking tot de kansen langs de takken van de boom genomen worden. Concreet betekent dit dat je ieder pad van $t = 0$ naar $t = n$ volgt en daaraan als kans het product van de gewichten langs dit pad toekent. Het met deze kansen gewogen gemiddelde van de mogelijke optiewaarden op tijdstip n is dan de beginwaarde van de optie.
In figuur 4 is deze procedure voor een twee-perioden boom uitgewerkt. Omcirkeld vind je de aandelenprijzen van het model. Vervolgens zijn de martingaal-gewichten berekend. Als voorbeeld is een Europese call optie met strikeprijs $K = 45$ genomen, waarvan de waarde op tijdstip $t = 2$ gelijk is aan $\max(0, S_2 - 45)$. Deze getallen staan boven de cirkels. Vanhieruit bereken je dan recursief de optieprijzen in de voorafgaande tijdstippen.
De hedging strategie in dit voorbeeld kun je weer met de deltaregel vinden. In de eerste periode is

$$x = \frac{5-3}{50-45} = \frac{2}{5} \text{ en dus } y = f - sx = 3 - 45 \times \frac{2}{5} = -15.$$

De strategie bestaat dus uit het aanschaffen van $\frac{2}{5}$ aandeel en het lenen van 15. De strategie in de tweede periode hangt af van de koersontwikkeling in de eerste periode: als de koers naar 50 omhooggegaan is, dan wordt $x = \frac{15-5}{60-50} = 1$ en $y = 5 - 50 = -45$ en in het andere geval, dus als de koers in de eerste periode omlaaggegaan is, wordt $x = \frac{1}{3}$ en $y = -12\frac{1}{3}$.
Je ziet hier dus dat de portefeuille aan het einde van iedere periode aan de koersontwikkeling in de voorafgaande periode aangepast moet worden. Zoiets heet dan ook een dynamische hedging strategie.

Cox-Ross-Rubinstein binomiaal model
Een bijzonder geval van de binaire boom is een binomiale boom waarbij de stappen naar boven en beneden bij iedere tak volgens eenzelfde verhouding gaan. Dit model, in 1979 voorgesteld door Cox, Ross en Rubinstein, leent

zich vooral voor de limietovergang als je de boom steeds fijner laat worden.

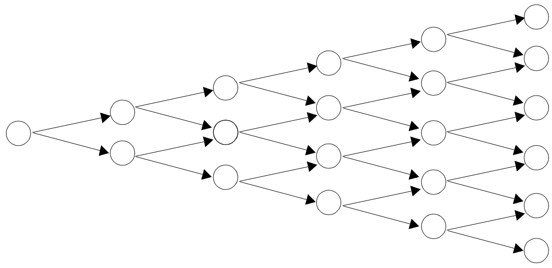

fig. 5 Binomiale boom volgens het Cox-Ross-Rubinstein model

In het binomiale model heb je in iedere periode twee mogelijkheden voor de ontwikkeling van de aandelenprijs: deze kan van s naar $s \cdot u$ stijgen of naar $s \cdot d$ dalen. De factoren u en d zijn voor alle takken hetzelfde en voldoen aan $d < 1 < u$, want anders zou er een mogelijkheid voor arbitrage zijn. De boom die je op deze takken opbouwt recombineert, dat wil zeggen dat takken weer samenkomen, maar dat maakt voor de verdere analyse weinig uit (zie figuur 5).
Om de waarde van een optie in het binomiale model te kunnen berekenen, heb je de gewichten q en 1 - q nodig die van de boom een martingaal maken. Daarvoor moet $q \cdot s \cdot u + (1-q) \cdot s \cdot d = s$ gelden, of ook $qu + (1-q)d = 1$. Dit heeft als oplossing:

$$q = \frac{1-d}{u-d} \text{ en } 1-q = \frac{u-1}{u-d}$$

Merk op dat je overal in de boom dezelfde gewichten q en $1 - q$ tegenkomt; dit wordt natuurlijk door de bijzondere structuur van de binomiale boom veroorzaakt.
De waarde van een optie kan vervolgens recursief berekend worden, beginnend met de waarde $f_T(s)$ op het uitoefentijdstip T.
Door nu gebruik te maken van een aantal resultaten uit de kansrekening, onder meer het benaderen van kansverdelingen met een normale verdeling, is op deze manier de Black-Scholesformule voor $t = 0$ en $r = 0$ vinden.
Een continu model voor de koersontwikkeling van een aandeel in het tijdsinterval $[0, T]$ krijg je door dit interval in steeds kleinere periodes van lengte Δt op te splitsen en zo een rij van binomiale bomen met steeds dichtere vertakkingen te construeren. Het continue model is de limiet van dit proces als je Δt naar 0 laat gaan.
Als je de periodes steeds korter laat worden, zullen ook de groeifactoren u en d aangepast moeten worden. Als deze constant zouden zijn, explodeert namelijk het hele prijsproces en daar komt geen zinnige limiet uit tevoorschijn. De prijsstappen zullen kleiner worden als Δt afneemt. Door nu deze modelparameters listig te kiezen, kun je ervoor zorgen dat er niets mis gaat bij de limietovergang. Het blijkt dat de keuze $d = 1 - a\sqrt{\Delta t}$ en $u = 1 + b\sqrt{\Delta t}$ het doet. Let wel even op: de drie parameters a, b en q zijn niet onafhankelijk van elkaar, want q is een functie van u en d en dus van a en b. Precies zit de zaak als volgt in elkaar:

$$q = \frac{1-d}{u-d} = \frac{a\sqrt{\Delta t}}{(a+b)\sqrt{\Delta t}} = \frac{a}{a+b}$$

en dus $1 - q = \dfrac{b}{a+b}$.

De grootheid σ^2 uit de Black-Scholesformule staat voor ab en heet de volatiliteit van de aandelenprijs. Deze geeft grofweg weer hoe grillig de aandelenkoers in de tijd verloopt. Hoe groter a en b, hoe groter de bewegingen op de aandelenmarkt.

Je hebt nu de wel eenvoudigste toegang tot de waardering van Europese opties gezien. Ook in de praktijk gebruikt men veelal boommodellen, bijvoorbeeld om prijzen voor ingewikkelde opties numeriek te bepalen.

Kijk nu nog eens naar de Black-Scholesformule: $f(t, s)$is de waarde van de optie op tijdstip t, terwijl de aandeelkoers op dat moment s is.
Je krijgt deze waarde als volgt: vermenigvuldig de huidige koers s met een kans Φ, die afhangt van s en de strikeprijs K, de marktrente r, de volatiliteit σ^2 en de resterende looptijd $T - t$. De volatiliteit moet je schatten uit het verloop van de koers van het aandeel in het recente verleden. Vervolgens verminder je dit getal met de strikeprijs K, vermenigvuldigd met een factor die afhangt van de marktrente r en de resterende looptijd $T - t$ en met een kans Φ die van dezelfde grootheden afhangt als de eerste, maar wat kleiner is.

Wout de Goede
Faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen,
Universiteit Groningen

Noten

[1] Prof. Dr. Herold Dehling Ruhr-Universität Bochum, 44780 Bochum, Deutschland.

[2] Dehling, H. (1999). De wiskunde achter de Nobelprijs voor Economie 1997. In: B. de Smit, J. Top (red.) *Speeltuin van de wiskunde*. Diemen: Veen Magazines.

Literatuur

Black, F. & M. Scholes (1973). The pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy 81*, 637 - 659.

Cox, J.C., S.A. Ross & M. Rubinstein (1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics 7*, 229-263.

Hull, J.C. (1997). *Options, Futures and Other Derivatives*. Prentice Hall International.