

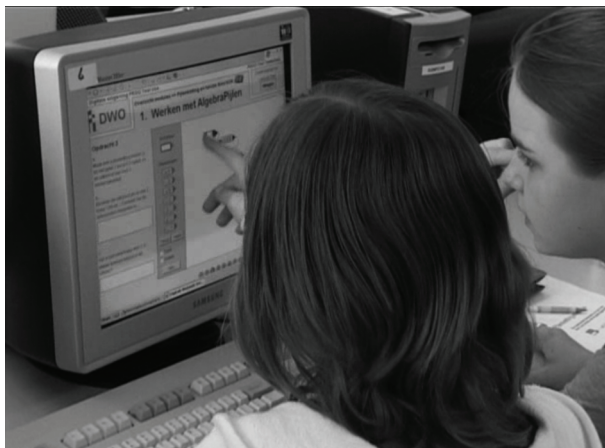
Een leerarrangement voor het ontwikkelen van een veelzijdig functiebegrip met contextrijke opdrachten en het applet *Algebrapijlen* is uitgevoerd in een experiment van zeven lessen in een tweede klas HAVO/VWO. In dit artikel beschrijven **Sjef van Gisbergen, Peter Boon, Michiel Doorman en Paul Drijvers** hoe de combinatie van applet en context een krachtige leeromgeving vormt.

Applet en context als krachtige combinatie

Inleiding

Sinds september 2006 wordt er gewerkt aan het LIO-onderzoek¹ 'Applet als instrument voor een veelzijdig functiebegrip'. Dit onderzoek wordt gefaciliteerd door de Nederlandse organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO). Het onderzoek heeft tot doel de vraag te beantwoorden, hoe het gebruik van applets een veelzijdig functiebegrip kan bevorderen bij leerlingen van de tweede klas van HAVO en VWO. Het onderzoek is ingebed in een groter onderzoek van het NWO-PROO-programma over het gebruik van technologisch gereedschap, dat wordt uitgevoerd door het Freudenthal Instituut².

Een eerste artikel over het onderzoek werd in de *Nieuwe Wiskrant* van maart 2007 gepubliceerd onder de titel *Het ligt aan de belminuten hoeveel eruit komt*³. Het gaat over een speciaal voor dit onderzoek ontworpen lessenserie van zeven lessen die is gegeven in een 2 HAVO/VWO-klas van het St. Gregorius College te Utrecht. In het genoemde artikel worden de eerste twee lessen van deze reeks beschreven. De leerlingen werken in deze lessen aan drie verschillende open problemen, en worden aangezet tot nadenken en discussiëren over variabelen, afhankelijkheid en formules, en over representaties zoals pijlenkettingen, tabellen en grafieken. Deze twee lessen eindigen met een introductie van de pijlenketting. In de vijf lessen die daarop volgen, is gewerkt met het applet waarin pijlenkettingen een centrale rol spelen: *Algebrapijlen*.



In het artikel dat nu voor u ligt, wordt beschreven hoe het inzetten van dit applet *Algebrapijlen* uitwerkt bij contextrijke opgaven. Deze uitwerking wordt geïllustreerd met twee fragmenten waarin leerlingen werken met dit applet. Allereerst worden verschillende stadia van inzicht in functies beschreven. Vervolgens wordt het applet *Algebrapijlen* beschreven. De opzet van het onderzoek en de manier waarop de data zijn verzameld, worden kort toegelicht. Daarna volgen fragmenten uit het leerproces van een tweetal leerlingen dat tijdens de lessen in het computerlokaal met het applet werkt. Uit deze fragmenten wordt duidelijk dat de combinatie van applet en context een krachtige leeromgeving vormt. Het applet nodigt de leerlingen uit tot onderzoekgedrag en de context biedt hen aanknopingspunten voor het geven van betekenis aan wat zij in het applet zien gebeuren.

Aspecten van het functiebegrip

Bij aanvang van het experiment zien de leerlingen een functie als een rekenprocedure; de functie is een beschrijving van de berekeningen die je stap voor stap moet doen om bij een bepaald invoergetal het uitvoergetal uit te rekenen. Dat blijkt uit de interviews die we vooraf hebben afgenomen.

We onderzoeken in dit experiment in hoeverre het lesmateriaal en het onderwijs en vooral het gebruik van het applet bijdragen aan het ontwikkelen van een uitgebreider functiebegrip. Dit functiebegrip kent de volgende facetten:

- Een invoer-uitvoertoekenning.
De functie is een invoer-uitvoertoekenning die rekenprocessen helpt organiseren en uitvoeren. Er ontstaat inzicht in hoe de uitvoer bepaald wordt door de invoer. Het oorspronkelijk lokale karakter wordt meer globaal: de functie is niet alleen een relatie tussen in- en uitvoergetallen, maar ook tussen domein en bereik. Functies kunnen worden vergeleken op globale kenmerken, zoals mate van stijgen of dalen.
- Een dynamisch proces.
Hier gaat het om het besef dat de onafhankelijke variabele een bepaald domein doorloopt, en daarmee de variatie van een afhankelijke variabele over een be-

reik bepaalt. De vraag naar het hoe en waarom van dit gezamenlijke dynamische proces wordt opgeroepen: wat gebeurt er met de afhankelijke variabele als de onafhankelijke toeneemt, bijvoorbeeld met één eenheid? Hoe kun je dat zien in de tabel en in de grafiek, of verklaren uit de formule? De aandacht voor de verschillende representaties nodigt uit tot de kijk op de functie als wiskundig object.

- Een wiskundig object.

Een functie is een wiskundig object dat op verschillende manieren kan worden voorgesteld: als pijlenketting, als tabel, als grafiek, als formule. Met elke voorstelling kijk je als het ware vanuit een ander perspectief naar hetzelfde object. Het gaat om een geïntegreerd functiebeeld dat redeneren op een globaal niveau mogelijk maakt: hoe zie je een bepaalde eigenschap van de grafiek terug in de tabel of in de formule, hoe kun je beslissen of twee functies tot een zelfde ‘familie’ behoren?

Voor het onderzoek hebben we een hypothetisch leertraject ontwikkeld waarin we acties van leerlingen met het applet koppelen aan bovengenoemde facetten. Als een leerling bijvoorbeeld het invoergetal zoekt waarvoor het uitvoergetal 100 is en hij doet dat door steeds een nieuw getal in te voeren, terwijl een andere leerling kiest voor het oproepen van een tabel of grafiek, dan zegt dat iets over een verschil in het functiebegrip van deze leerlingen. In het hypothetisch leertraject wordt beschreven wat we verwachten qua leerlingactiviteiten en wat dat ons zegt over het functiebegrip van die leerling. Zo verwachten we bijvoorbeeld een ontwikkeling in het gebruik van de pijlenketting, die aanvankelijk een middel zal zijn om berekeningen te organiseren en uit te voeren, en geleidelijk aan een representatie wordt om over functies te redeneren. Door een experiment willen we onderzoeken of onze verwachtingen terecht zijn en in hoeverre de ontwikkeling van het beoogde functiebegrip door onze activiteiten wordt ondersteund.

Het applet

In het onderwijsexperiment wordt zowel met pen en papier als met digitaal gereedschap gewerkt. Het lesmateriaal omvat zowel een flexibel parallellogram dat de leerlingen in de eerste lessen gebruiken om een verband te vinden tussen vorm en oppervlakte, als posters voor presentaties, kaarten met bewerkingssymbolen om ‘levende pijlenkettingen’ te maken en kaarten met functierepresentaties die aan elkaar gekoppeld moeten worden. In dit artikel beperken we ons tot het digitale gereedschap, dat bestaat uit het applet ingebed in een digitale leeromgeving.

Het belangrijkste digitale gereedschap is dus het applet *Algebrapijlen* (zie www.wisweb.nl). Dit applet maakt het mogelijk om invoer-uitvoerkettingen van bewerkingen te

maken. Deze kettingen kunnen worden toegepast op getallen, maar ook op variabelen. Er kunnen tabellen, formules en (punt)grafieken worden gemaakt. Kettingen kunnen worden uitgebreid, verbonden en vergeleken. Figuur 1 geeft een indruk van de belangrijkste mogelijkheden van het applet.

Je kunt in het applet onder andere in- en uitvoervakjes naar je werkveld slepen, kiezen uit verschillende bewerkingen en de getallen in die bewerkingen aanpassen, een tabel of grafiek wel of niet zichtbaar maken, scrollen in de tabel en de grafiek doorlopen met ‘trace’.

Het applet is ingebed in een digitale leeromgeving, de Digitale Wiskunde Omgeving (DWO). In de DWO wordt al het werk van de leerlingen opgeslagen op een centrale server. Daardoor kunnen de leerlingen hun werk later terugzien, verbeteren en ermee doorgaan op een ander tijdstip en op een andere plaats, bijvoorbeeld thuis. Voor de docent betekent de DWO dat de voortgang van de leerlingen eenvoudig kan worden nagegaan, dat de resultaten van de hele klas eenvoudig in beeld komen en dat daarnaast het werk van de individuele leerling kan worden beoordeeld.

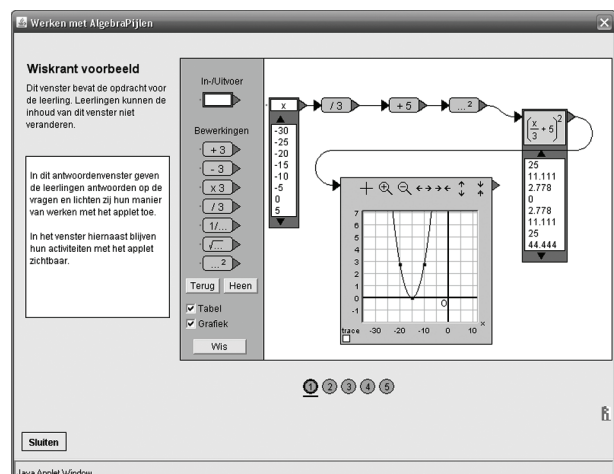


fig. 1 Het applet *Algebrapijlen* ingebed in de DWO

De DWO biedt ook de mogelijkheid om opdrachten en vragen op te nemen, die de leerlingen buiten het venster van het eigenlijke applet kunnen beantwoorden. Op die manier ontstaat als het ware een digitaal werkboek. In het venster linksboven in figuur 2 staat de opdracht. De leerlingen werken in het appletvenster rechts en formuleren hun antwoord in het venster linksonder.

Onderzoeksopzet

We hebben een leerarrangement van zeven lessen ontworpen dat enerzijds het applet in de DWO omvat en anderzijds lesmateriaal en opdrachten voor de leerlingen,

die gedeeltelijk op papier en gedeeltelijk digitaal worden aangeboden. Onder andere omdat de combinatie en integratie van papierwerk en digitaal werk nieuw is voor de docent, is ook een docentenhandleiding ontworpen.

Het onderwijsexperiment vindt weer plaats in een 2 HAVO/VWO-klas van het St. Gregorius College te Utrecht en levert verschillende typen gegevens. Van alle leerlingen zijn de papieren en digitale uitwerkingen verzameld. Een aantal leerlingen is gefilmd tijdens het werken. Daarnaast zijn klassikale delen van de lessen gefilmd en is de docent gevolgd in haar interacties met leerlingen terwijl die in tweetallen of in groepjes aan het werk zijn.

Tijdens de lessen in het computerlokaal zijn er zogeheten screenvideo's gemaakt van twee tweetallen. Dit houdt in dat alles wat dat tweetal in dat lesuur doet op de computer en alle uitspraken die zij daarbij doen, wordt opgeslagen op de harde schijf. Op een later tijdstip is dat alles precies zo weer te zien en te beluisteren.

Applet en context

In het lesmateriaal is er een wisselwerking tussen de context en de functievoorstellingen in het applet, zoals de ketting, tabellen en grafieken. Dat samen vormt een krachtige leeromgeving. Het applet nodigt de leerlingen uit om te praten over wat zij voor zich zien en de context helpt hen bij het kiezen van de juiste woorden en begrippen bij deze abstracte voorstellingen. De leerlingen werken in tweetallen om de communicatie over en weer te stimuleren. Door met elkaar te overleggen over hun initiatieven en handelingen is er sprake van reflectie en heroverweging⁴.

Hieronder bespreken we twee fragmenten om de kracht van die leeromgeving duidelijk te maken. Deze fragmenten komen uit een screenvideo van een tweetal meisjes, Michelle en Iris.

De dynamiek van het bellen

Na enkele opdrachten waarin de leerlingen het applet op de computer verkennen en de pijlenketting gebruiken om berekeningen te maken, beginnen Iris en Michelle aan opdracht vijf van *Werken met algebrapijlen* (zie figuur 2).

In deze opdracht wordt gevraagd een pijlenketting te maken voor de berekening van de kosten bij het belabonnement Tom Vaak. Vervolgens moeten zij de kosten berekenen bij 300 minuten en daarna moeten zij verklaren wat er met het punt in het assenstelsel gebeurt als het aantal belminuten 10 groter wordt.

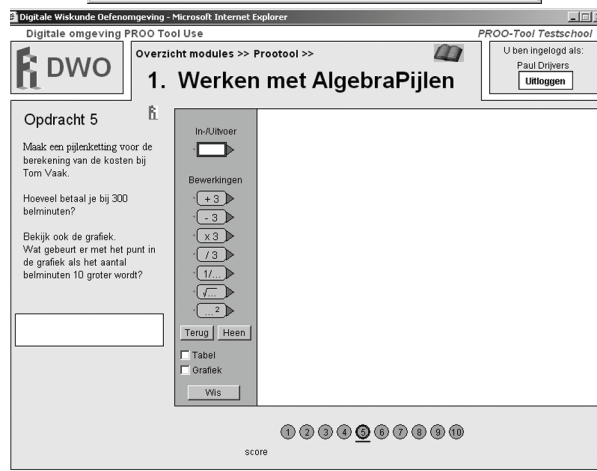
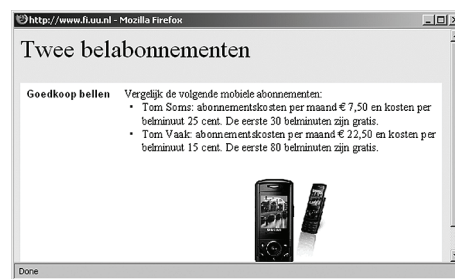


fig. 2 Opdracht 5

De taken en leerdoelen in deze opdracht zijn:

- Leerlingen maken voor het eerst een pijlenketting met meerdere bewerkingen. De gegevens uit de context moeten zij op een juiste manier omzetten in de pijlenketting. Doel is hier het kiezen van de onafhankelijke variabele, het bepalen van de volgorde van de bewerkingen en het plaatsen van de juiste labels.
- Leerlingen maken voor het eerst een grafische weergave van de in- en uitvoer in een assenstelsel. Doel is hier het beheersen van de techniek om het applet de grafiek (in dit geval een punt) te laten tekenen, het realiseren dat de invoer op de horizontale as en de uitvoer op de verticale as zijn terug te vinden en het correct schalen van de assen.
- Leerlingen onderzoeken wat er gebeurt met het punt in het assenstelsel als de invoer 10 minuten groter wordt. Doel is hier het realiseren dat de invoer de uitvoer verandert. Dat is gemakkelijk te zien in de pijlenketting, maar wat betekent dat voor het punt in het assenstelsel? De pijlenketting representeert meer een verband tussen in- en uitvoer dan een rekenvoorschrift, een begin van het ervaren van gekoppelde verandering.

Hoe pakken Michelle en Iris deze opdracht aan? Zoals wij al hadden verwacht, ondervinden zij geen noemenswaardige problemen bij het maken van de pijlenketting. In de vorige les hadden de lerares en enkele leerlingen al een pijlenketting gemaakt, maar dan voor het bord, door middel van kartonnen bordjes. Michelle en Iris tikken 300 in

het invoervak en lezen 55.5 af in het uitvoervak. Dan vullen zij als invoer 310 in, dat geeft als uitvoer 57. Aldus vinden zij de toename van de kosten.

Vervolgens wordt gevraagd wat er gebeurt met het punt in de grafiek als het aantal belminuten 10 groter wordt. De leerlingen laten in het applet een assenstelsel verschijnen, maar vergeten de pijlenketting met het assenstelsel te verbinden waardoor ze geen punt zien. Er volgt het gesprek dat hieronder is beschreven. Uiteindelijk lukt het hen wel. Zie de opdracht en hun eindresultaat in figuur 3.

Iris: Ik zie geen punt.
 Michelle klikt op de pijltjes waarmee de assen kunnen worden geschaald.
 Michelle: Ik doe hem een stukje omhoog.
 Michelle klikt tot er 100.000 euro kosten langs de verticale as verschijnt.
 Iris: Da's wel een beetje ver.
 Michelle schaaft nu de horizontale as.
 Michelle lacherig: Hé, hij gaat wel heel ver, hij gaat wel tot een miljoen!
 Iris: Michelle, wat doe je?
 Michelle: Hij moet bij 57 uitkomen.
 (Dit is niet correct, want dat dient bij de verticale as te worden afgelezen.)
 Michelle schaaft de horizontale as zodat 0 tot en met 120 zichtbaar is, maar de leerlingen zien nog steeds geen punt. Dan ontdekt Iris dat zij de ketting abusievelijk nog niet met het assenstelsel hebben verbonden; zij verbindt ze nu wel. Zij zien nu nog steeds geen punt, maar Iris zegt zonder aarzeling:
 Iris: Ga eens ietsje daarheen (duidend op het schalen van de horizontale as, en ja hoor, het punt verschijnt). 'Aha', klinkt het tevreden, alsof men een groots mysterie heeft opgelost.
 De leerlingen vullen achtereenvolgens 300 en 310 in bij de invoer en kijken hoe het punt in het assenstelsel beweegt. Er ontstaat een hevige discussie over wat er nu eigenlijk groter wordt, de kosten of het aantal belminuten.
 Michelle: Wacht, als je 10 minuten groter doet, dan verschuift het naar rechts, dan wordt het getal groter.
 Iris: Nee, ook een beetje naar boven.
 Michelle: Oh, ja, maar worden de kosten dan duurder of goedkoper?
 Iris: Hoger, dan worden de kosten hoger.

De context en het zoeken naar de grafiek nodigen Michelle en Iris uit na te denken over wat zij zien. Zij zien het betreffende punt niet in het assenstelsel en gaan op zoek. Dat je de assen van het applet kunt oprekken zover je wilt verbaast hen; honderdduizend euro kosten en een miljoen minuten bellen is wel wat veel. Zij zoeken de grafiek en praten over waar je de beltijd zou moeten zien en waar de kosten. Zij denken na over op welke as je de invoer kunt vinden en over de samenhang van het horizontaal en ver-

ticaal verschuiven van het punt. Ondanks dat het in dit fragment in het begin misgaat, is het nuttig dat de leerlingen met dit soort trial-and-improve processen onderzoekend bezig zijn. Zij spreken vermoedens uit die onmiddellijk onderhevig zijn aan kritiek van de ander. Het applet dient als een soort testmachine; 'nee hoor, kijk maar, als je...' Michelle en Iris onderzoeken de dynamiek in de grafiek door nog eens opnieuw te kijken wat er gebeurt als zij achtereenvolgens 300 en 310 als invoer kiezen.

Als je in de DWO kijkt naar het antwoord dat dit tweetal geeft: 'Dan worden de kosten hoger en gaat het punt in de grafiek naar rechts', dan zie je niet veel meer terug van de rijke conversatie die Michelle en Iris voerden bij deze vraag. Een ander tweetal antwoordt: 'Dan verschuift het punt een beetje', of weer een ander 'Het gaat in een schuine lijn omhoog'. Leerlingen zijn niet erg kritisch op het antwoord dat zij intypen. Zij vinden al snel dat hun antwoord voldoet. De resultaten van alle leerlingen in de DWO laten inderdaad zien dat in deze opdracht de pijlenketting redelijk goed is gemaakt, maar dat de antwoorden op de vraag van de beweging van het punt vaag en onvolledig zijn.

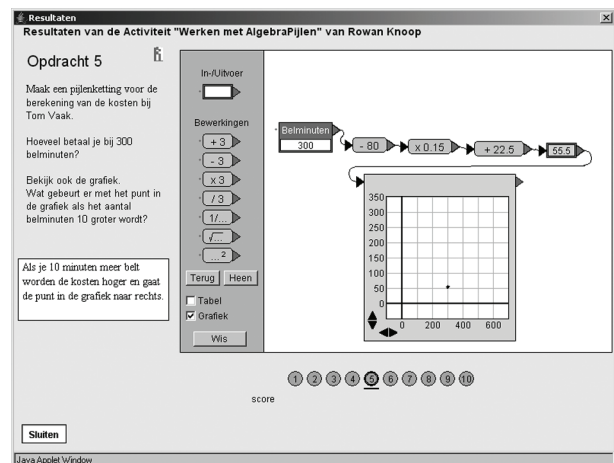


fig. 3 Opdracht 5 met de uitwerking van de leerlingen

Mogelijke hoogten en oppervlakten

Even later werken deze leerlingen aan opdracht 7 (zie figuur 4).

Deze opdracht gaat over de draibare ruit van de eerste les van het experiment: een ruit met zijden van 10 cm die draaibaar is in de hoekpunten, om aldus te experimenteren met verschillende standen en oppervlakten. De leerlingen wordt gevraagd een pijlenketting en grafiek te maken bij de bijbehorende formule:

$$\text{hoogte} \cdot 10 = \text{oppervlakte}.$$

En vervolgens wordt gevraagd naar de kleinste en de grootste waarde van de oppervlakte.

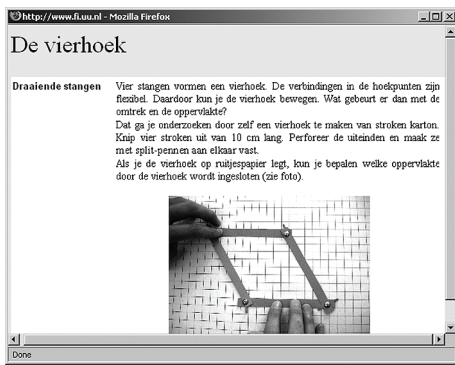


fig. 4 Opdracht 7 en beschrijving van flexibel parallellogram

De taken en leerdoelen bij deze opdracht zijn:

- Leerlingen maken een pijlenketting en een puntengrafiek en gebruiken eventueel de tabel bij exploratie. Doel is hier het kennen van verschillende representaties van een functie en het zien van de verbanden tussen de representaties. Zo ontstaat een toenemend inzicht in het objectkarakter van een functie.
- Leerlingen bedenken welke getallen zij als invoer kunnen of mogen gebruiken en onderzoeken hoe groot de uitvoer wordt. Doel is hier het inzicht dat de pijlenketting (functie) een verband is tussen de domein- en bereikverzamelingen.

We kijken weer naar hoe Michelle en Iris de opdracht aanpakken. Zij hebben de pijlenketting gemaakt en het assenstelsel aangevinkt (zie figuur 5). De vraag is welke de kleinste en welke de grootste waarden van de oppervlakte zijn (zie protocol hiernaast).

Het betekenis geven aan een abstracte voorstelling gaat met behulp van termen uit de context. Het feit dat invoer nul als uitvoer nul oplevert, wordt door Iris vertaald als 'Als je niks hebt, is er ook geen oppervlakte'. Zij praten erover dat de uitvoer van de invoer afhangt en realiseren zich gaandeweg dat die pijlenketting voor alle invoer het goede antwoord geeft. 'Bij dat vierhoekding wordt de oppervlakte 10 keer 10 en anders wordt het oneindig keer 10'.

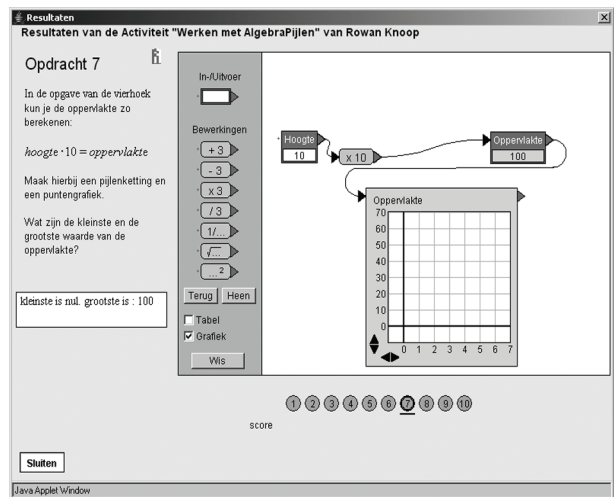


fig. 5 Opdracht 7 met uitwerking van de leerlingen

Michelle: 100 is toch de grootste.
 Iris: Nee, 10 is de grootste.
 Michelle: Dat zei ik toch, 10 keer 10 is 100.
 Iris: Kijk, 0 is de kleinste want dan komt er ook 0 uit.
 Michelle: Goh.
 Iris: Als je niks hebt, is er ook geen oppervlakte.
 Michelle: Ja, maar ze vragen de grootste waarde.
 Iris: En de kleinste.
 Michelle: Ja, de kleinste is nul.
 Iris begint het antwoord in te vullen in het antwoordvak: 'kleinste is nul, grootste ...'
 Iris: Grootste is... hm... grootste is toch zo groot als je wilt.
 Michelle: 100
 Iris: Nee, want 10 is de grootste als je zo'n vierhoekding hebt, maar...
 Michelle: Ja maar deze (Michelle is bezig de y-as op te schalen) gaat heel ver hé.
 Iris: Ja, daarom
 Michelle: Wacht even... Juffrouw?
 De juffrouw wordt erbij gehaald.
 Iris: Moet je hierbij rekenen met dat schuifbare ding of iets keer tien? Want hier kan het oneindig keer 10 zijn, maar niet als je dat schuifbare ding pakt van 10 keer 10.

Het 'zo groot als je wilt' kunnen maken van de getallen op de assen ondersteunt het begrip dat je als invoer en uitvoer van een pijlenketting een hele verzameling getallen kunt gebruiken. De uitspraak: 'de grootste oppervlakte is oneindig keer 10' maakt duidelijk dat zij goed begrijpen waarover het gaat in deze opdracht. De leerlingen voelen hier zelf de noodzaak van het bepalen van een domein en vragen letterlijk: 'Mevrouw, moeten we hier kijken voor de vierhoek die u hebt uitgedeeld in de eerste les of mag de vierhoek zo groot zijn als maar kan?'

Conclusie

Het applet en de context vormen samen een krachtige combinatie. Die kracht ligt vooral in het feit, dat de con-

text fungeert als een raamwerk dat leerlingen ondersteunt om woorden te vinden om te beschrijven en te begrijpen wat er in het applet gebeurt. Ook maken zij veronderstellingen binnen de context die zij met behulp van het applet, dat immers snel rekt en plaatjes en tabellen maakt, kunnen onderzoeken.

In de discussie over de grafiek van de telefoonabonnementen over wat er nu eigenlijk verandert, de minuten, de euro's of beide, dwingt de grafiek de leerlingen goed na te denken over het verband tussen de verschillende representaties van de functie. De context biedt hen houvast en voorziet hen van de nodige woorden bij deze discussie.

Het gesprek over het assenstelsel bij de grafiek die het verband aangeeft tussen hoogte en oppervlakte, gaat enerzijds over de mogelijkheden van het applet en anderzijds over de concrete vierhoek waar de leerlingen in de eerste les mee manipuleerden. Het wordt de leerlingen duidelijk dat zij een keuze moeten maken. Óf de context óf de mogelijkheden van het applet zijn doorslaggevend voor het afbakenen van domein en bereik.

De combinatie van applet en contextrijke opdrachten levert de vragen, de verwondering en het houvast die de leerlingen uitnodigen tot experimenteren, reflecteren, heroverwegen en herformuleren. Een krachtige combinatie dus.

*Sjef van Gisbergen, Peter Boon,
Michiel Doorman, Paul Drijvers,
Freudenthal Instituut*

Oproep

In april-mei 2008 vindt een nieuwe experimenteeronde plaats. We zoeken nog docenten die in hun tweede klas HAVO/VWO hieraan ongeveer 10 lessen willen besteden. Bent u geïnteresseerd, kijk dan op www.fi.uu.nl/tooluse en stuur een mail aan prootool@fi.uu.nl.

Noten

- [1] LIO, het programma Leraar in Onderzoek, van de Nederlandse organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek, www.nwo.nl.
- [2] Dit onderzoek wordt gesubsidieerd door de Programmaraad Onderwijs Onderzoek van NWO onder nummer 411-04-123.
- [3] Doorman, M., P. Drijvers, P. Boon & S. van Gisbergen (2007). Het ligt aan de belminuten hoeveel eruit komt. *Nieuwe Wiskrant, Tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs*, 26(3), 42-46.
- [4] Dekker, R. & M. Elshout-Mohr (1998). A process model for interaction and mathematical level raising. *Educational Studies in Mathematics*, 36, 303-314.

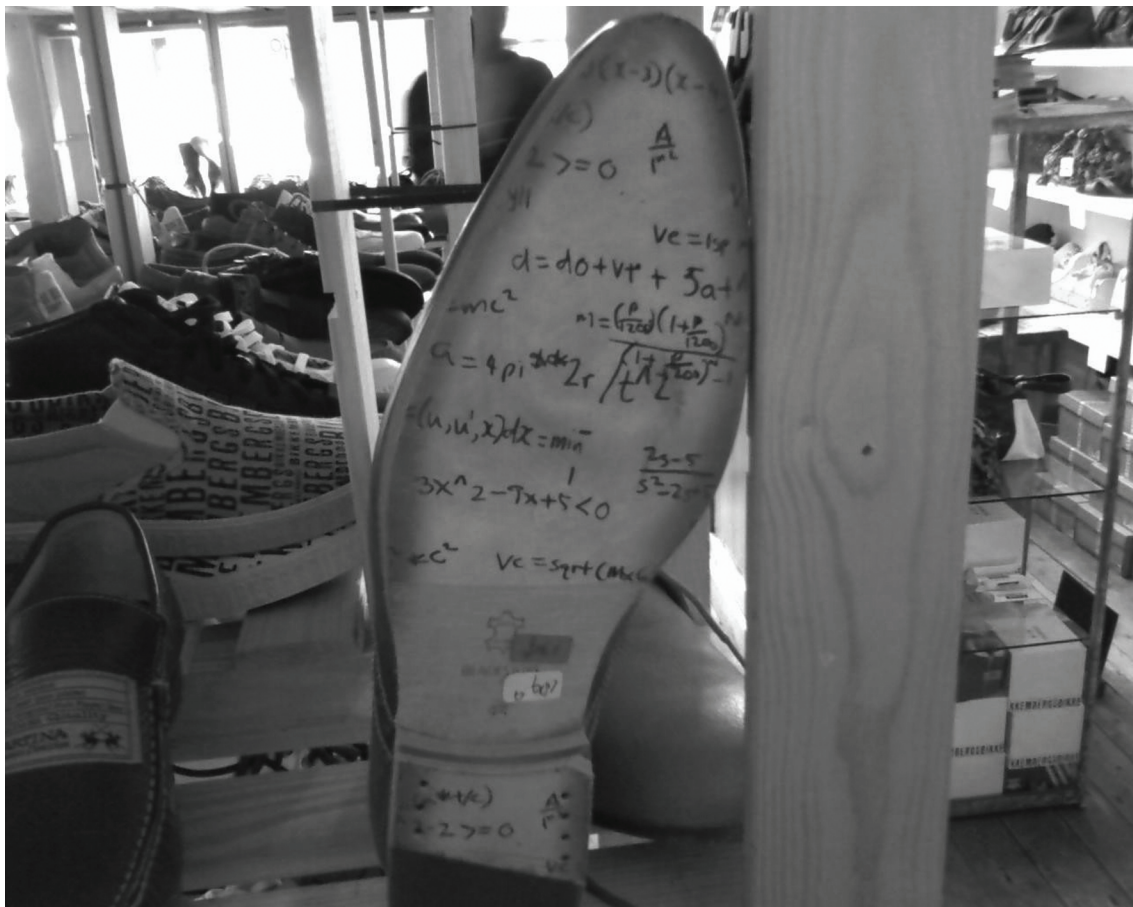


Foto: Harm ten Napel