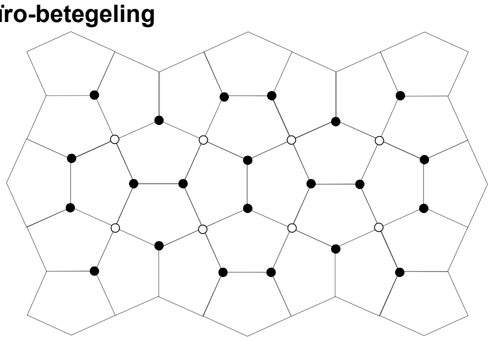
Wat te bewijzen is (38)

Rubriek

Het *Woordenboek van merkwaardige en interessante meetkunde* van David Wells (een uitgave van Bert Bakker) doet zijn naam werkelijk eer aan. Het is een alfabetisch geordende verzameling meetkundige wetenswaardigheden, verluchtigd met fraaie figuren. Maar, net als een echt woordenboek, beperkt het zich tot beknopte omschrijvingen. Het aardige van die opzet is dat je je als geïntereseerde lezer uitgedaagd kunt voelen om te heruitvinden. Dat overkwam mij naar aanleiding van wat ik het eerst tegenkwam onder de letter C:

Caïro-betegeling



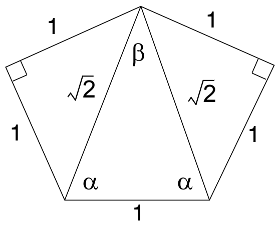
Met symmetrische, wél gelijkzijdige maar niét gelijkhoekige, vijfhoeken, kan een periodiek tegelpatroon worden gelegd. In Caïro zijn daar straten mee geplaveid.

Hoe maak je een Caïro-tegel

Wat opvalt in het patroon is dat er zowel punten zijn waar vier tegels bij elkaar komen als punten die zijn ingesloten door drie vijfhoeken. Kortom: de 'knooppunten' zijn óf van de orde 4 (zwart), óf van de orde 3 (wit).

De witte punten leren ons dat de vijfhoekige tegel twee rechte hoeken moet hebben. Voor de overige drie hoeken, waarvan er twee aan elkaar gelijk zijn, blijft er dan 360° over. Vandaar dat drie vijfhoeken netjes passen om een zwart punt. Een voor de hand liggende vraag is dan hoe groot die hoeken zijn.

Stel voor het gemak de basis van de vijfhoek gelijk aan 1. Het is dan duidelijk dat twee diagonalen de lengte $\sqrt{2}$ moeten hebben.



Let nu op de driehoek in het midden met zijden 1, $\sqrt{2}$ en $\sqrt{2}$ en met hoeken α, α en β.

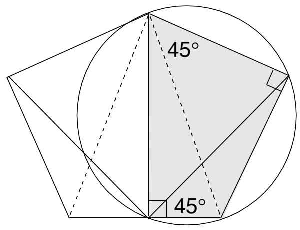
Er geldt eenvoudig: $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Helaas geeft dit geen 'mooie' hoek.

Mijn GR zegt: $\alpha \approx 69,3°$. Twee hoeken van de Caïro-vijfhoek zijn dus ongeveer gelijk aan 69,3° + 45° = 114,3°. Voor de grootste hoek blijft dan 131,4° over.

Constructie van de tegel

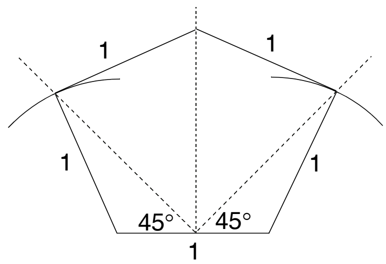
Dat de hoeken niet mooi uitkomen, betekent natuurlijk niet dat de vijfhoek niet met passer en liniaal kan worden geconstrueerd. De constructie is zelfs bijzonder eenvoudig: een kwestie van drie driehoeken aan elkaar plakken.

Er is nog een andere methode die berust op het feit dat de symmetrie-as van de Caïro-vijfhoek die vijfhoek verdeelt in twee koordenvierhoeken.



In de grijsgetinte vierhoek zijn twee overstaande hoeken 90° en dat garandeert dat de vier hoekpunten op een cirkel liggen. Omdat de gestippelde diagonaal een hoek van 45° met een zijde maakt, doet de andere diagonaal dat met de tegenoverliggende zijde (zie figuur).

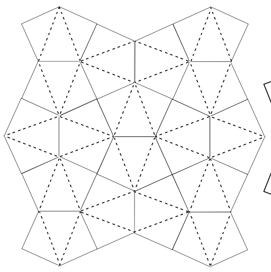
Deze wetenschap leidt tot een alternatieve constructie:

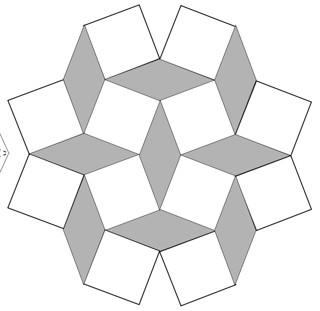


Snijd de cirkels met straal 1 om de eindpunten van de basis met de beide lijnen door het midden van de basis die hoeken van 45° met de basis maken. Dat levert twee hoekpunten op. Het completeren van de vijfhoek is nu verder een koud kunstje.

Ruiten en vierkanten

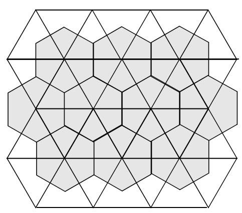
Periodieke tegelpatronen kunnen weer aanleiding zijn tot andere interessante vlakvullingen. Als we bij onze Caïrobetegeling de diagonalen vanuit de basis betrekken, ontstaat er een fraai patroon van ruiten en vierkanten. Merk op dat bij deze nieuwe betegeling alle knooppunten gelijkwaardig zijn: elk punt is van de orde 4 en de twee vierkanten en twee ruiten rondom een knooppunt zijn steeds op dezelfde wijze geordend.



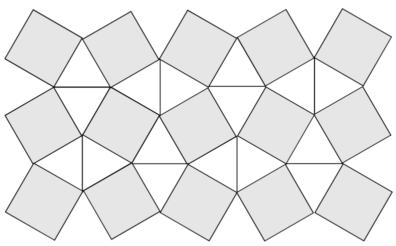


Duale patronen

Een beproefde manier om uit vlakvullingen nieuwe vlakvullingen te maken berust op het *dualiteitsbeginsel*.
Laat ik dit principe uitleggen aan de hand van de betegeling met gelijkzijdige driehoeken. Rondom elk knooppunt liggen zes driehoeken. Als de middelpunten van aangrenzende driehoeken met elkaar worden verbonden, ontstaat een patroon van regelmatige zeshoeken, de bekende honingraat.

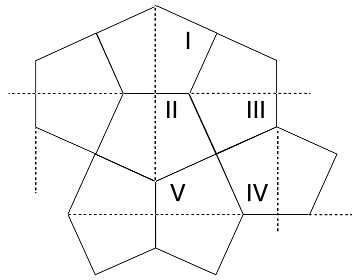


We noemen het driehoekspatroon en het zeshoekspatroon *duale* patronen. Merk op dat bij het eerste patroon de tegels drie zijden hebben en de knooppunten van de orde 6 zijn, terwijl dat bij het duale patroon precies andersom is: zes zijden en knooppunten van de orde 3.
David Wells merkt in zijn 'woordenboek' achteloos op dat de duale van het Caïro-patroon een bekende halfregelmatige vlakvulling is, bestaande uit vierkanten en gelijkzijdige driehoeken.



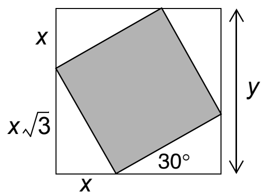
Dit patroon vertoont grote gelijkenis met bovenstaand patroon van ruiten en vierkanten.
Bij toepassing van het dualiteitsprincipe worden inwendige punten van aangrenzende tegels met elkaar verbonden. Omdat het Caïro-patroon uit vijfhoeken bestaat en omdat het twee soorten knooppunten heeft (orde 3 en orde 4), zal het duale patroon knooppunten van de orde 5 hebben en uit driehoeken en vierhoeken bestaan. De vraag is echter of het lukt om de inwendige punten zó te kiezen dat er *regelmatige* drie- en vierhoeken ontstaan.
Dat de knooppunten van het duale patroon op de symmetrie-assen van de tegels moeten liggen, lijkt evident.

Willen de punten op de assen van de vijfhoeken I, II en III een gelijkzijdige driehoek vormen, dan moeten de verbindingslijnen van I naar III en van II naar III hoeken van 30° met de symmetrie-as van III maken.



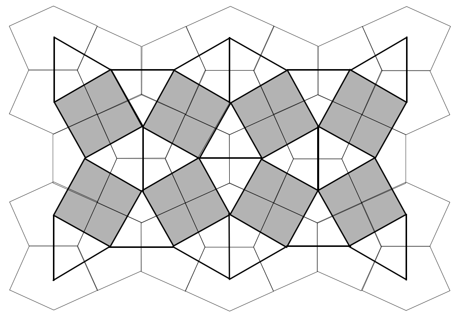
Van de gezochte knooppunten in II, III, IV en V weet ik nu dat ze op de zijden van het vierkant gevormd door de symmetrie-assen van die vier tegels liggen, en dat ze hoeken van 30° en 60° maken met de zijden van dat vierkant. Bovendien moeten zij zelf ook een vierkant vormen. Dat is genoeg om de plaats van de knooppunten te bepalen.

Stel weer de basis van de Caïro-tegel gelijk aan 1, dan is de hoogte van de tegel gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{7}$.
De zijden van een vierkant gevormd door de symmetrie-assen van vier buurtegels hebben de lengte $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}$.
De berekening van de afstand x van een inwendig punt tot de basis van de tegel, verloopt nu op rolletjes:



$$y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{7}$$
$$y = x + x\sqrt{3}$$
$$x = \frac{1 + \sqrt{7}}{2(1 + \sqrt{3})} \approx 0,6672$$

De knooppunten van het duale patroon blijken iets boven de helft van de hoogte (≈ 1,3329) van een tegel te liggen.



In de figuur is dit gerealiseerd. Hoewel dit bij een eerste oogopslag misschien wel zo lijkt, is de zijde van een grijs vierkant niet parallel met een zijde van een onderliggende vijfhoek. De hoek die zij maken is klein, dat wel; een berekening leert dat die ongeveer 4,3° is.

Zou het Caïro-patroon niet een motiverende aanleiding kunnen zijn voor een wiskundig onderzoek te verrichten door HAVO/VWO-leerlingen? En is het niet hemeltergend dat de 'echte' meetkunde in de bovenbouw van het VWO opnieuw dreigt te verdwijnen?

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl