Bijna een half jaar heeft u de tijd gehad om het probleem zelf op te lossen. Want toen presenteerde **Hans van Ditmarsch** dit raadsel tijdens zijn workshop op de NWD. Mede naar aanleiding van de reacties die hij ontving, wordt de oplossing van het raadsel hier gepresenteerd.

Honderd gevangenen en een gloeilamp

Inleiding

Dit raadsel presenteerde ik tijdens de Nationale Wiskundedagen 2007, aan het einde van mijn workshop over logische puzzels:

Aan een groep van honderd gevangenen, gezamenlijk in de gevangeniskantine, wordt medegedeeld dat ze allemaal in isolatiecellen geplaatst zullen worden en daarna één voor één ondervraagd, in een kamer met een lamp met een aan-uitschakelaar. De gevangenen kunnen met elkaar communiceren door de lamp aan of uit te doen (dat is de enige manier waarop ze kunnen communiceren). De lamp is aan het begin uit. Er is geen vaste volgorde van ondervraging, er is geen standaard tijdsduur tussen de ondervragingen, en dezelfde gevangene kan best meerdere keren achter elkaar ondervraagd worden. Als een gevangene ondervraagd wordt, kan deze: niets doen, de lamp uitdoen, de lamp aandoen, of verklaren dat iedereen (ten minste een keer) ondervraagd is. Als dit waar is, worden alle gevangenen vrijgelaten. Anders worden ze allemaal opgehangen. Kunnen de gevangenen, zolang ze nog bij elkaar zijn in de kantine en niet naar de isolatiecellen gebracht zijn, een protocol overeenkomen waardoor ze vrijgelaten worden?

Naderhand kreeg ik daar verschillende goede en originele reacties op, en ook al tijdens de workshop baarde het raadsel opzien. Maar wat is nu het antwoord? Het bedrieglijke van het raadsel is dat het onoplosbaar lijkt. Er is immers maar één bit beschikbaar voor de informatieoverdracht: de lamp kan aan en uit. Maar er zijn wel honderd gevangenen: en het getal 100, dat tussen 64 en 128 ligt, vergt alleen al negen bits om het te representeren. En dan hebben we het nog helemaal niet over het protocol om het raadsel op te lossen. Hoe kan één bit nu voldoende zijn om dat te doen?

Een struikelblok *lijkt* de wiskundige intuïtie: de bewijsmethode van natuurlijke inductie gecombineerd met de informele inductie waarmee we vaak problemen te lijf gaan, suggereert een methode om de oplossing te zoeken, die helaas in dit geval niet ergens toe leidt. Laten we het even hardop doen:

We beginnen met de basis. Stel er is één gevangene: Anna. Wel, de eerste keer dat Anna ondervraagd wordt, weet zij dat iedereen ondervraagd is. Daarvoor is de lamp niet eens nodig. Dus:

> ***Protocol Een***
> Als je ondervraagd wordt, is iedereen ondervraagd.

Laten we er nog één doen. Stel, er zijn twee gevangenen: Anna en Bert. De eerste van de twee die ondervraagd wordt, doet de lamp aan. Stel, zonder verlies aan algemeenheid van de oplossing, dat dit wederom Anna is. Nu is het even afwachten wie er daarna ondervraagd wordt. Als het Bert is, dan ziet Bert dat de lamp aan is, en weet daarom dat Anna reeds ondervraagd is (alleen gevangenen mogen de lamp aan- en uitdoen). Bert kan dan dus naar waarheid zeggen dat iedereen ondervraagd is. En Anna en Bert gaan vrijuit. Als daarentegen de volgende ondervraagde opnieuw Anna is, is de lamp nog aan, en 'denkt ze dus' dat Bert nog niet ondervraagd is, anders was ze al vrijgelaten. We zijn nu wat vaag: Anna's argument is gebaseerd op wat ze in alle redelijkheid vermoedt dat Bert gedaan heeft. Dit kan in dit geval wel zonder afspraak, maar aan de andere kant is er niets op tegen dat Anna en Bert dit met elkaar afspreken: hier komt het protocol om de hoek kijken. Dit kunnen we als volgt verwoorden:

> ***Protocol Twee***
> Als je ondervraagd wordt en de lamp is uit, doe hem dan aan; als je ondervraagd wordt, en jij hebt de lamp eerder aangedaan en de lamp is nog steeds aan, doe dan niets; als je ondervraagd wordt, en de lamp is aan, maar jij hebt hem niet aangedaan, verklaar dan dat iedereen ondervraagd is.

Stel, er zijn drie gevangenen, Anna, Bert en Caroline... Nu wordt het moeilijker. Anna, die weer als eerste ondervraagd wordt, kan de lamp aandoen. Als daarna bijvoorbeeld Bert ondervraagd wordt, kan Bert de lamp weer uitdoen. Stel dat daarna Anna weer ondervraagd wordt, dan weet Anna dat ten minste twee gevangenen nu ondervraagd zijn. Dat schiet op! Als daarna Caroline ondervraagd wordt, weet Caroline echter niet dat een andere gevangene al eerder ondervraagd is: het kan dan ook best zo zijn dat zij als eerste ondervraagd wordt (de tijdsduur tussen ondervragingen is niet bekend)! Wat moet Caroline nu doen? Dat is eigenlijk dezelfde vraag als wat Anna de eerste keer moet doen. Maar laten we nog even doorfantaseren – want het is namelijk fantaseren, we komen er zo echt niet uit: het zou handig zijn als Anna eerst de lamp aan kan doen, daarna zoals hiervoor de lamp weer uit kan zien, en *daarna* de lamp nog een keer aandoet. De volgende keer als ze de lamp weer uit ziet, zou dan dus iedereen ondervraagd moeten zijn? Laten we het formaliseren: het protocol wordt nu:

> ***Protocol Drie***
> Als je ondervraagd wordt en de lamp is uit, doe hem dan aan – houd bij hoe vaak je dat doet; als je ondervraagd wordt, en jij hebt de lamp eerder aangedaan en de lamp is nog steeds aan, doe dan niets; als je ondervraagd wordt en de lamp is aan, maar jij hebt hem niet aangedaan, doe hem dan uit. Als je de lamp twee keer hebt uitgedaan, en je wordt opnieuw ondervraagd en de lamp is aan, verklaar dat alle drie gevangenen ondervraagd zijn. (En voor n gevangenen zouden we dan moeten krijgen: Als je de lamp $n - 1$ keer hebt uitgedaan, en je wordt opnieuw ondervraagd en de lamp is aan, verklaar dat alle n gevangenen ondervraagd zijn.)

Dit protocol levert niet wat we wensen: voor sommige uitvoeringen ervan gaat het goed, maar voor andere niet. Het gaat goed als de ondervragingsvolgorde is: Anna - Bert – Anna – Caroline – Anna. Het gaat fout als de ondervragingsvolgorde is: Anna – Bert – Anna – Bert – Anna. Maar hoe weet Anna nu of Bert dan wel Caroline, die allebei ook zo'n protocol volgen, de gevangene was die op zijn beurt de lamp voor de tweede keer uitdoet? Met andere woorden, voor honderd gevangenen, als de eerste twee gevangenen om de beurt ondervraagd worden en verder niemand, dan zegt Anna na de honderdnegenennegentigste keer ten onrechte dat iedereen ondervraagd is, en worden ze allemaal opgehangen. Niet goed... Met andere woorden, het probleem van dit protocol is dat het soms wel en soms niet werkt. De gevangenen kunnen best een geïnformeerd *gokje* wagen dat iedereen ondervraagd is. Maar om *kennis* te verkrijgen dat iedereen ondervraagd is, is meer nodig.

Even tussendoor – allerlei trucjes waar de lezer wellicht aan gedacht heeft, zijn inderdaad niet toegestaan, en het raadsel is ook geen strikvraag in welke zin dan ook: voelen of de lamp warm of koud is, is niet toegestaan (als de lamp uit is maar warm, weet je dat er iemand voor jou ondervraagd is – maar wat schiet je ermee op?); je mag de lamp ook niet stukslaan als je deze voor de tweede keer aan ziet (waarna de gevangene die een stukgeslagen lamp ziet, maar nog niet zelf een lamp heeft uitgedaan, kan verklaren dat iedereen ondervraagd is – dit geeft een oplossing voor drie gevangenen). En het interval tussen de ondervragingen is variabel: dus de tijd bijhouden heeft geen zin. De ondervragingskamer kan niet worden gezien vanuit de isolatiecellen (daarom zijn het ook *isolatiecellen*), en er is geen geheime klikverbinding tussen de schakelaar van de lamp en de isolatiecellen; je kunt er ook niet de schakelaar horen overgaan... De gevangenen mogen allemaal verschillende namen hebben, of met opeenvolgende getallen van 1 tot 100 geidentificeerd worden, maar dat is allemaal worst om oud ijzer (om een bekend spreekwoord even te verdraaien).

De oplossing komt snel naderbij als we ons realiseren dat een protocol niet aan iedere gevangene dezelfde *rol* hoeft toe te bedelen: aangezien de gevangenen het protocol kunnen afspreken; zolang ze nog in de kantine zijn, kunnen ze elkaar verschillende taken geven. De telling die Anna bijhoudt in het voorbeeld hiervoor, werkt, zolang iedereen maar weet dat *alleen* Anna dit doet. Dit brengt ons tot het volgende protocol.

> ***Protocol Vier***
> De gevangenen wijzen onder elkaar een teller aan. Voor de teller geldt: Als je ondervraagd wordt en de lamp is uit, doe dan niets; als je ondervraagd wordt en de lamp is aan, doe hem dan uit – houd bij hoe vaak je dat doet; als je de lamp $n - 1$ keer hebt uitgedaan, verklaar dan dat alle n gevangenen ondervraagd zijn. Voor de overige gevangenen geldt: Als je ondervraagd wordt en de lamp is uit en je hebt hem nog niet eerder aangedaan, doe hem dan aan; als je ondervraagd wordt en de lamp is uit en je hebt hem al eerder aangedaan, doe dan niets; als je ondervraagd wordt en de lamp is aan, doe dan niets.

Het zal de lezer duidelijk zijn dat dit protocol inderdaad werkt. Voor drie gevangenen, waarbij Anna als teller is aangewezen, zijn de volgende drie uitvoeringen van het protocol succesvol:

i. Bert – Anna – Caroline – Anna
ii. Anna – Bert – Caroline – Anna – Bert – Anna – Caroline – Caroline – Bert – Bert – Anna
iii. Bert – Anna – Bert – Caroline – Bert – Anna

Er is wel een kanttekening: stel dat Anna de teller is en dat van de honderd gevangenen alleen om de beurt Anna en Bert ondervraagd worden. Dan zal het nooit gebeuren dat Anna kan zeggen dat iedereen ondervraagd is. Maar dan werkt het protocol toch niet? Wel, in dat geval komt de oplossing inderdaad nooit dichterbij. Maar dat is dan omdat nooit alle gevangenen ondervraagd worden! We kunnen ons ook nog voorstellen dat eerst alle gevangenen eenmaal na elkaar ondervraagd worden, en daarna tot in de eeuwigheid alleen Anna en Bert om de beurt. Dan is wel iedereen ondervraagd, maar komt de oplossing toch nooit naderbij. Een voorwaarde voor de terminatie van protocol vier is de zogenaamde 'liveness' van het systeem: op ieder moment zal iedere gevangene ooit nog eens ondervraagd worden. Als dat zo is, zal de teller ooit naar waarheid kunnen beweren dat iedereen ondervraagd is.

En we kunnen nog wel andere interessante observaties maken: in uitvoering ii is iedereen al ondervraagd na drie ondervragingen, maar duurt het nog tijden voordat Anna, als teller, dat ook weet en bekend kan maken. Het zal vrijwel altijd het geval zijn dat alle gevangenen ondervraagd zijn voordat de teller dat weet. Uitvoering iii is om andere reden interessant. Ook al is Bert geen 'teller', hij is toch niet op zijn achterhoofd gevallen. De eerste keer dat hij ondervraagd wordt, doet hij de lamp aan. De tweede keer dat hij ondervraagd wordt is de lamp uit en doet hij niets, maar hij weet daarom dat Anna nu ook ondervraagd is en de lamp weer heeft uitgedaan. De derde keer dat hij ondervraagd wordt, ziet hij dat de lamp weer aan is: dat kan dus alleen door Caroline gedaan zijn. En hij kan dan naar waarheid verklaren dat iedereen ondervraagd is, *voordat* teller Anna dat weet! En ook voor honderd gevangenen kunnen er zo op dezelfde manier uitvoeringen optreden waarbij een der niet-tellers al weet dat iedereen ondervraagd is voordat de teller dat weet. Als we dus geïnteresseerd zijn in een zo snel mogelijk terminerend protocol – en dat zijn de gevangenen natuurlijk, want ze willen uit de gevangenis vrijkomen! – dan valt er kennelijk nog wel wat te optimaliseren. Hierover zullen we niet in detail treden. Veel meer dan precies *deze* verbetering weet ik ook niet te melden zolang de tijdsduur tussen ondervragingen variabel is.

Meer optimalisering is te verrichten als die tijdsduur niet variabel is en bekend bij de gevangenen. We gaan dan over van een asynchroon naar een synchroon systeem. Bijvoorbeeld, voor drie gevangenen: als teller Anna niet als eerste ondervraagd wordt, dan weet ze al dat de lamp aan zal zijn als ze ooit ondervraagd gaat worden. Maar als ze als derde ondervraagd wordt, dan weet ze in dat geval nog steeds niet of Bert en Caroline allebei al ondervraagd zijn! Uiteraard zijn er dan weer speciale protocollen te bedenken die echt gebruik maken van de gemeenschappelijke kennis over het tijdsverloop. Voor een ad-hoc oplossing voor drie gevangenen: stel dat de afspraak is dat op de tweede ondervragingsdag een niet-teller het licht uitdoet als het licht al aan is. Bij de uitvoering Bert–Caroline–Anna weet Anna dan op dag drie meteen al dat iedereen ondervraagd is omdat het licht dan uit is. Want bij de uitvoering Bert–Bert–Anna was het licht aangeweest!

Als er iedere dag iemand ondervraagd wordt, hoe lang duurt het dan gemiddeld voordat de honderd gevangenen vrijgelaten worden? Een werkdocument door William Wu, Berkeley, zie http://www.ocf.berkeley.edu/~wwu/papers/100prisonersLightBulb.pdf, bevat een elegante analyse die we ook de Wiskrantlezer niet willen onthouden. Eerst moet een niet-teller ondervraagd worden, om het licht aan te doen. De kans hierop is 99/100. Dan moet de teller ondervraagd worden, om het licht weer uit te doen. De kans daarop is 1/100. Daarna moet een niet-teller die nog niet ondervraagd is, het licht weer aandoen. Die kans is nu 98/100. Daarna de teller weer, dat blijft altijd 1/100. Enzovoorts. De verwachtingswaarde is net andersom. Het verwachte aantal dagen voordat de eerste niet-teller ondervraagd wordt, is 100/99, de verwachting dat daarna de teller ondervraagd wordt is 100/1, dat wil zeggen, honderd dagen, enzovoort. De gemiddelde tijd die verstrijkt voordat de teller kan verklaren dat iedereen ondervraagd is, is dus:

$$\frac{100}{99} + 100 + \frac{100}{98} + 100 + \ldots + \frac{100}{2} + 100 + \frac{100}{1} + 100\,.$$

Dit sommeert tot afgerond 10.418 dagen, wat ruim 28,5 jaar is. Dat valt toch wat tegen, zou ik zeggen, als ik daar gevangen zat. Het is maar goed dat niet alle gevangenen wiskundigen zijn... Overigens valt dit nog op allerlei manieren te optimaliseren, onder de conditie van synchronisatie, bijvoorbeeld door 'hulptellers' aan te stellen die hun resultaten aan een hoofdteller doorgeven op vooraf afgesproken tijdstippen. Zo is de verwachtingswaarde nog te reduceren tot onder de tien jaar, een minimum wordt door Wu niet gegeven en lijkt niet bekend.

Tot slot nog een variant op het raadsel: stel dat niet bekend is of het licht in eerste instantie aan of uit is; en, als voorheen, er is niets bekend over de tijdsduur tussen de ondervragingen. Wat is dan een protocol om het probleem op te lossen? De oplossing die we hiervoor gaven werkt nu niet meer, ook niet als we de teller één verder door laten tellen. Bijvoorbeeld voor drie gevangenen, is het nu lastig om de volgende uitvoeringen van elkaar te onderscheiden:

iv. (licht aan) – Anna – Caroline – Anna – Bert – Anna
v. (licht uit) – Bert – Anna – Caroline – Anna – Bert – Anna

Als Anna slechts tot twee telt, verklaart ze bij iv na de tweede keer ondervraagd te zijn ten onrechte dat iedereen ondervraagd is. Als we Anna daarentegen tot drie laten tellen, dan komt ze bij v nooit aan die verklaring toe, hoe vaak ook Anna, Bert, en Caroline ondervraagd zullen blijven worden in de toekomst: zowel Bert als Caroline hebben het licht precies een keer aangedaan, en Anna doet daarna dat licht weer uit, en daar blijft het bij. We kunnen het protocol nu opnieuw aanpassen – de truc is dat we moeten compenseren voor de onzekerheid dat Anna één keer teveel het licht moet uitdoen, omdat het initieel aan had kunnen zijn.

Protocol Vijf

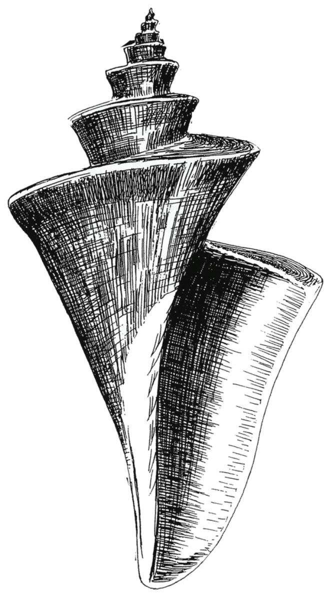
De gevangenen wijzen onder elkaar een teller aan. Voor de teller geldt: Als je ondervraagd wordt en de lamp is uit doe dan niets; als je ondervraagd wordt en de lamp is aan, doe hem dan uit – houd bij hoe vaak je dat doet; als je de lamp $2n - 2$ keer hebt uitgedaan, verklaar dan dat alle *n* gevangenen ondervraagd zijn. Voor de overige gevangenen geldt: Als je ondervraagd wordt en de lamp is uit en je hebt hem nog niet twee keer aangedaan, doe hem dan aan; als je ondervraagd wordt en de lamp is uit en je hebt hem al twee keer eerder aangedaan, doe dan niets; als je ondervraagd wordt en de lamp is aan, doe dan niets.

Laten we het weer bij drie gevangenen houden. Er moet dan vier keer ondervraagd worden. In het ergste geval was het licht aan het begin aan, 1; heeft een van Bert of Caroline het licht al twee keer aangedaan, stel dit is Bert, 2; en heeft Caroline het licht pas één keer aangedaan, 1. Anna hoeft dus niet te wachten totdat Caroline het licht twee keer aangedaan heeft. Maar drie keer is te weinig: want dat krijgen we al als het licht initieel aan is en Bert het twee keer heeft aangedaan, zonder dat Caroline ooit ondervraagd is.

In het algemeen hoeft de teller niet te wachten totdat de laatste niet-teller die het licht nog niet twee keer heeft aangedaan, dat voor de tweede keer heeft gedaan. Maar alle overige niet-tellers moeten dat wel doen. We krijgen dus: $1 + 2(n-2) + 1 = 2n - 2$. En $2n - 3$ is echt niet genoeg: want dat bereiken we al als iedereen behalve één niet-teller het licht al twee keer heeft aangedaan, en het licht initieel aan is.

Hans van Ditmarsch,
University of Otago, Nieuw-Zeeland &
IRIT, Toulouse, Frankrijk

De Nationale Wiskunde Dagen 2008



Op 1 en 2 februari 2008 wordt de veertiende editie van de NWD georganiseerd in Noordwijkerhout. De inschrijving is inmiddels geopend.
Voor meer informatie, zie: http://www.fi.uu.nl/nwd.

Een openbare middag op de NWD 2008

De afgelopen jaren werd ook door niet-docenten gevraagd: 'waar is die NWD toch?', zodat men langs kon komen. Dan moest er helaas op worden gewezen dat de doelgroep beperkt en de conferentie vol was. Geen mogelijkheden dus, terwijl nieuwe toepassingen en ontwikkelingen in de wiskunde voor iedereen interessant kunnen zijn. Zeker ook voor jongeren die zich oriënteren op hun studie.

Vandaar een nieuw onderdeel van de NWD waarbij, naast de docenten, nu ook hun leerlingen, familie en vrienden de mogelijkheid krijgen om kennis te maken met wiskunde en de alledaagse relevantie te ervaren. Hiermee willen we laten zien hoe onmisbaar wiskunde in het dagelijkse leven is. De vorm is informeel: toegankelijke workshops met 'open deuren' en een enkele lezing. Kortom: iedereen is welkom, de drempel is laag en de inschrijving gratis!

Waarom kent poker winnaars en verliezers? Zonder compressietechnieken geen modern vermaak en de derde dimensie van tv-kijken. High-tech, spiksplinternieuw en ter plaatse te toetsen. Dat wordt spannend. We mikken met het programma op deelnemers vanaf veertien jaar.

De vormgeving zal anders zijn dan die van de NWD. Werkgroepen hebben veel meer een inloop-karakter met op bepaalde tijdstippen een bijzondere attractie. Attracties vinden niet alleen plaats in zalen, maar we zetten ook tenten neer waarin je iets bijzonders te wachten staat...

Eerdere bezoekers van de reguliere NWD sturen we begin december een aantal ansichtkaarten die ze zelf mogen verspreiden. Dat moet een fantastische mix van geïnteresseerde bezoekers opleveren!

Nu al geïnteresseerd? Geef je op voor meer informatie en kaarten via f.vanderblij@fi.uu.nl