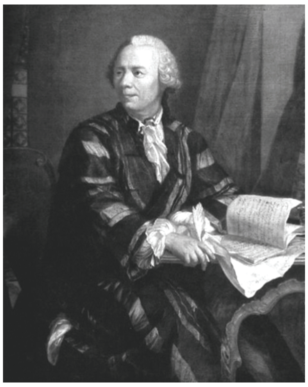
Wat te bewijzen is (37)

Rubriek

15 april 2007. Het is precies 300 jaar geleden dat Leonhard Euler in de buurt van Bazel werd geboren. Zijn naam – door wiskundigen, waar ook ter wereld, met gepaste eerbied uitgesproken – leeft voort in een grote verscheidenheid aan wiskundige uitdrukkingen en stellingen.



Leonhard Euler

(1707 – 1783)

Zo hebben we de 'rechte van Euler', 'constante van Euler', 'indicator (of ϕ-functie) van Euler', 'Euler-graaf' het getal e, 'algoritme van Euler' ... En staat niet ook de misschien wel meest 'sexy' formule uit de wiskunde, te weten $e^{\pi i} = -1$, op zijn naam!

Sommen van stambreuken

Op het bord staan zeven sommen van oneindige rijen, waarvan de termen allemaal stambreuken zijn en waarvan de laatste drie op Euler's conto staan.

$$(H)\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots = \infty$$

$$(D)\quad 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\ldots = 2$$

$$(A)\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots = 2$$

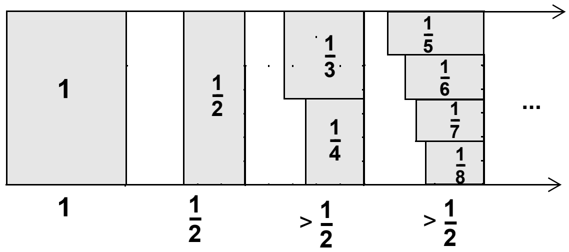
$$(B)\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\ldots = 3\frac{3}{4}$$

$$(K)\quad 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$(F)\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5040}+\ldots = e-1$$

$$(P)\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\ldots = \infty$$

De moeder van alle rijen op het bord is de harmonische rij (H). Als je het de eerste keer ziet, geloof je het bijna niet, maar de partiële sommen van die rij worden onbeperkt groot. Nicolas Oresme (1323 – 1382) toonde dit al aan door het handig 'minoreren' van groepjes termen. Zijn bewijs is hieronder gevisualiseerd:



De som van 2^n opvolgende termen van de harmonische rij is groter dan $1 + \frac{1}{2}n$ en rijst dus, heel langzaam maar heel zeker, de pan uit.

Uitdunnen

De andere rijen op het bord zijn door uitdunning van de harmonische rij ontstaan. Wil er een eindige som uitkomen, dan moet die uitdunning op de lange duur heel drastisch zijn. Oneindige uitdunning met een constant aantal termen bijvoorbeeld helpt niet, ook niet als er per keer gigantisch veel termen worden weggelaten. Het favoriete reuzengetal uit mijn kindertijd was 'triljoen' en daarom bekijk ik nu even de rij (T):

$$1, \frac{1}{1+10^{18}}, \frac{1}{1+2\cdot 10^{18}}, \frac{1}{1+3\cdot 10^{18}}, \ldots$$

De partiële sommen van deze rij mogen dan triljoen keer trager groeien dan die van de harmonische rij, ook zij overstijgen elke vooraf bedachte grens.

Hoe zit het als we progressief uitdunnen? Een eenvoudig patroon is te zien in (D). Daar zijn achtereenvolgens één, twee, drie, ... termen weggelaten met als resultaat dat de limietsom 2 is. Het venijn zit hem natuurlijk in de staart, want eer het uitdunningsniveau van (T) is bereikt zijn we al aardig ver heen!

Het bewijs van de convergentie van (D) naar 2 valt mee. De noemers van de rij zijn de bekende driehoeksgetallen:

$$1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ 1+2+3+4,\ \ldots$$

De n-de term van de rij is daarom gelijk aan

$$\frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

De som van de eerste n termen is dus:

$$\frac{2}{1}-\frac{2}{2}+\frac{2}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{4}+\ldots+\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1} = 2-\frac{2}{n+1}$$

en de limiet hiervan voor $n \to \infty$ is 2. Klaar.

De rij (A), ook met som 2, herinnert aan het verhaal van Achilles en de schildpad. Het is het standaardvoorbeeld van een sommeerbare *meetkundige rij*. Net als bij (D) kan zo'n rij 'telescopisch' worden gesommeerd.
Ik generaliseer hier maar meteen:

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\ldots =$$

$$\frac{1}{m-1}\left(m-1+1-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}-\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^2}-\frac{1}{m^3}+\ldots\right) = \frac{m}{m-1}$$

Twee voorbeelden:

$$1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{27}+\tfrac{1}{81}+\ldots = 1\tfrac{1}{2}$$

$$1+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{25}+\tfrac{1}{125}+\tfrac{1}{625}+\ldots = 1\tfrac{1}{4}$$

Deze uitkomsten en die van (A) gebruik ik bij de opheldering van (B). Die B staat hier voor de Babyloniërs die breuken voorstelden als 'kommagetallen', maar dan zestigdelig in plaats van tiendelig. Bij hun berekeningen gebruikten zij een tabel van omgekeerden van natuurlijke getallen die geen andere priemfactoren dan 2, 3 en 5 hebben, zodat hun sexagesimale voorstelling netjes eindig is, en dat zijn juist de termen in (B). De eerste twee stambreuken die mankeren zijn $\frac{1}{7}$ en $\frac{1}{11}$, maar er volgen daarna nog onnoemelijk veel uitvallers.
Door nu de limietsommen van de meetkundige rijen met reden respectievelijk $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{5}$ met elkaar te vermenigvuldigen, vinden we de limietsom van (B):

$$2\cdot 1\tfrac{1}{2}\cdot 1\tfrac{1}{4} = 3\tfrac{3}{4}$$

Verklaring: elke term van (B) is van de vorm:

$$\frac{1}{2^a3^b5^c} \quad \text{(met } a, b, c \text{ niet-negatief geheel)}$$

en is dus gelijk aan het product van drie termen afkomstig uit de drie meetkundige rijen; omgekeerd elk product van drie termen uit de bedoelde rijen geeft één term van (B).

Nu kom ik dan bij Euler die dit inzicht gebruikte voor een alternatief bewijs van de oneindigheid van de verzameling priemgetallen. Zijn redenering kwam neer op het volgende: stel dat er eindig veel priemgetallen bestaan, zeg 2, 3, 5, ... , *P*. Uit het feit dat elk natuurlijk getal eenduidig in priemfactoren is te ontbinden, volgt dat de som van omgekeerden van *alle* natuurlijke getallen gelijk is aan het eindige product

$$2\cdot 1\tfrac{1}{2}\cdot 1\tfrac{1}{4}\cdot 1\tfrac{1}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{P}{P-1}$$

terwijl we sinds Oresme weten dat de harmonische rij geen eindige som heeft. Tegenspraak derhalve.
Er valt misschien nog wel wat werk te doen om deze redenering om te werken tot een streng betoog dat acceptabel is voor ieder wiskundig tijdschrift – want hoe zit het bijvoorbeeld precies met het term voor term vermenigvuldigen van eindeloze reeksen en moet er niet zorgvuldig met het limietbegrip worden omgegaan? – maar het gaat mij hier om het kernidee, en dat is mooi.

Omgekeerde kwadraten
Een interessant fragment uit de geschiedenis van de wiskunde betreft voorbeeld (K). Dat de omgekeerde kwadraten een eindige som hebben, volgt direct uit het feit dat zij één voor één kleiner zijn dan de termen van rij (D):

$$1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\ldots < 1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{10}\ldots = 2$$

Maar daarmee is de som van deze rij nog lang niet gevonden! Voor de Bernoullis en Leibniz, om maar eens een paar grootheden te noemen, was het vinden van die som een brug te ver. In zijn meesterlijke boek *Induction and Analogy in Mathematics* beschrijft George Polya hoe ingenieus Euler dit moeilijke probleem aanpakte. Als vertrekpunt koos Euler de hoofdstelling van de algebra, die zegt dat ieder polynoom in evenveel lineaire factoren kan worden ontbonden als zijn graad bedraagt.
De gebruikelijke formule is dan

$$a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0 = a_n(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

waarbij x_1, x_2, ... x_n de nulpunten zijn van de veelterm links. Maar als we het geval dat 0 een nulpunt is, buitensluiten, kan het ook zó:

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n = a_0\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{x_n}\right)$$

Merk op dat x_1, x_2, ... x_n complexe getallen kunnen zijn en niet noodzakelijk van elkaar verschillen.
Uit de laatste ontbinding volgt dan:

$$a_1 = -a_0\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)$$

Euler paste het principe van *analogie* toe op een 'oneindige veelterm' ofwel machtreeks. Newton had al uitgevonden dat sin *x* gelijk is aan de alternerende machtreeks

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

Met $V(x) = \frac{\sin x}{x}$ komt er dan:

$$V(x) = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots$$

De nulpunten van $V(x)$ zijn bekend:

$$\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi, \ldots$$

Er volgt dan, aldus Euler:

$$V(x) = \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\ldots$$

en dus ook:

$$V(x) = \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

De coëfficiënt van x^2 in $V(x)$ is enerzijds gelijk aan: $-\frac{1}{3!}$
en anderzijds gelijk aan de som:

$$-\frac{1}{\pi^2}\left(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{25}+\ldots\right)$$

met als gevolg de beroemde formule:

$$1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{25}+\ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

Bovenstaande analogie-redenering gold, ook in Euler's tijd, niet als een legitiem bewijs. Afgezien van het voorkomen van een 'oneindig product' was er het bezwaar dat de oneindige veelterm $V(x)$ ook irreële nulpunten (paarsgewijs toegevoegd complex) zou kunnen hebben en die zouden dan een bijdrage aan de (reële) som van de nulpunten kunnen hebben. Maar Euler had voldoende reden om zijn resultaat te vertrouwen. Dat de rij een eindige som heeft, was evident en het getal $\frac{1}{6}\pi^2$ kwam overeen met numerieke resultaten. Bovendien leidde zijn gedurfde aanpak tot andere, reeds degelijk bewezen resultaten zoals Leibniz' formule:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

Hoewel Euler weinig twijfels kende met betrekking tot de juistheid van zijn methode, rustte hij niet voor hij een aanvaardbaar streng bewijs had gevonden voor zijn bewering over de hyperharmonische reeks.

Het getal e

Bij de invoering van het getal e, maakt Euler gebruik van de lineaire benadering van een exponentiële functie met grondtal a ($a > 0$) in de buurt van 0:

$$a^{\varepsilon} = 1 + A\varepsilon$$

waarbij ε staat voor wat Euler een 'oneindig klein' getal noemt. Hierin is A een constante die afhangt van het grondtal a. Bij een gegeven getal x maakt hij nu het oneindig grote getal $N = x / \varepsilon$. Er volgt dan:

$$a^x = a^{N\varepsilon} = (1 + A\varepsilon)^N = \left(1 + \frac{Ax}{N}\right)^N$$

Dit werkt hij uit met het binomium van Newton:

$$1 + \binom{N}{1}\frac{Ax}{N} + \binom{N}{2}\left(\frac{Ax}{N}\right)^2 + \binom{N}{3}\left(\frac{Ax}{N}\right)^3 + \ldots$$

De coëfficiënt van $A^m x^m$ in deze ontwikkeling is

$$\frac{(N-1)(N-2)\ldots(N-m+1)}{m! \cdot N^{m-1}} A^m$$

Omdat N oneindig groot is, vervangt hij

$$\frac{N-1}{N}, \frac{N-2}{N}, \ldots, \frac{N-m+1}{N}$$

stuk voor stuk door 1 en krijgt zo de reeksontwikkeling:

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{2!} + \frac{A^3x^3}{3!} + \ldots \text{ ad inf.}$$

Dan geeft hij het grondtal van de exponentiële functie met de eigenschap $A = 1$ de naam e en er komt:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \text{ ad inf.}$$

Substitutie van $x = 1$ leidt dan tot de zesde formule op het schoolbord. Euler berekende ter plekke met behulp van zijn reeks het getal e in 23 decimalen. Zijn vrij( )moedige aanpak is nu natuurlijk niet meer te verkopen, maar zij voedt wel de intuïtie.

Ik merk op dat het onderwerp reeksontwikkeling bij ons nooit echt is doorgedrongen in het analyseprogramma van het voortgezet onderwijs; misschien iets om over na te denken voor wiskunde D?! Wel vond ik in een uitzonderlijk schoolboek uit 1919 (dr. W.L. van de Voorden, *Grenswaarden, eene inleiding tot de differentiaal en integraalrekening*) een min of meer Euleriaanse behandeling van e. Via de Neperse logaritme als oppervlakte onder de hyperbool $xy = 1$ voert de auteur ons naar

$$e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Na uitwerking van de vorm achter het limietsymbool (binomium!) leidt dit dan tot de machtreeks voor e^x.

Omgekeerde priemgetallen

In 1737 vond Euler dat na uitdunning van de harmonische rij, waarbij omgekeerden van niet-priemgetallen worden weggelaten, nog steeds een oneindige som overblijft.

Zijn bewijs is zo mogelijk nog gedurfder dan de twee staaltjes die ik hier heb getoond. De geïnteresseerde lezer kan dit nalezen in William Dunham's boek getiteld *Euler, the Master of us all* (een uitgave van de Mathematical Association of America). Ook op internet is er van alles over te vinden. Dat de divergentie van de reeks omgekeerde priemgetallen tergend traag verloopt, laat zich denken. Zo is bijvoorbeeld de som van de eerste triljoen termen minder dan 4.

Van de intrigerende stelling van Euler zijn inmiddels veel mooie bewijzen gegeven. Dit zijn dan typisch bewijzen uit het ongerijmde. Een zo'n bewijs (van James Clarkson uit 1966) volgt hier. De veronderstelling dat de rij omgekeerden van priemgetallen een eindige som zou hebben leidt tot de hypothese dat de er een groot getal bestaat, zeg 10^r, met de eigenschap dat de 'staartsom' van alle termen met een noemer groter dan 10^r kleiner is dan $\frac{1}{2}$.

We noemen die priemgetallen in de staart nu eventjes de 'megapriemen' en de limietsom van de omgekeerden hiervan S. Laat nu T het product zijn van alle niet-megapriemen. De rij (M)

$$\frac{1}{1+T}, \frac{1}{1+2T}, \frac{1}{1+3T}, \ldots$$

ontstaat door 'lineaire' uitdunning van de harmonische rij en heeft dus een oneindige som. De noemers van de termen zijn stuk voor stuk onderling ondeelbaar met T en bevatten daarom uitsluitend mega-priemfactoren.

Daaruit volgt echter de tegenspraak, namelijk dat de rij een limietsom heeft van ten hoogste 1.

Als de som van de exponenten van de (mega)-priemfactoren van $1 + mT$ gelijk is aan k, dan verschijnt $(1 + mT)^{-1}$ als term bij de uitwerking van S^k.

Zo komt elk getal van de rij (M) eenmalig voor in een van de sommen $S, S^2, S^3, \ldots$, die op hun beurt kleiner zijn dan respectievelijk de breuken $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$. En van al deze majoranten is de som 1...

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl