

Wat is eigenlijk de didactiek van wiskunde D? Die wordt uiteraard niet voorgescreven hetgeen voor zowel school als docent keuzevrijheden en dus mogelijkheden oplevert. Wel worden er op het SLO handreikingen geschreven. **Jenneke Krüger**, ook betrokken bij de ontwikkeling van het vak NLT, schetst drie voorbeelden van onderwijsmogelijkheden.

Dynamische modellen in vwo

Voorbeelden van onderwijsmogelijkheden

Inleiding

Modelleren in de natuurwetenschappelijke betekenis heeft betrekking op een proces waarin een cyclus van stappen onderscheiden kan worden. Heel globaal: een natuurwetenschappelijk verschijnsel wordt geanalyseerd, men definieert een probleem, dat wordt vertaald in wiskundige termen (het model), op basis van berekeningen met dat model kan een situatie verkend worden en voorspellingen getoetst. De uitkomsten vergelijkt men met observaties aan het verschijnsel en eventueel wordt dat model bijgesteld. Een belangrijke stap die in deze zeer globale omschrijving verborgen blijft, is het interpreteren van de uitkomsten van berekeningen, cruciaal voor werken met modellen. In het examenprogramma voor wiskunde D¹ heeft eindterm 7 in het bètabrede domein A2 betrekking op de activiteit Modelleren.

Dynamische modellen (domein C en eventueel F) heeft betrekking op een of meer onderdelen van de modelleercyclus: minimaal het mathematiseren van een nauwkeurig omschreven onderwerp (een dynamisch systeem) en het onderzoeken van de wiskundige eigenschappen van de formule.

Wat zijn bij Dynamisch modelleren nu de kaders en welke vrijheden zijn er voor docenten bij hun onderwijs in dit onderwerp? In dit artikel bespreek ik enkele mogelijkheden, gebaseerd op globale beschrijvingen van docenten en op experimenteel lesmateriaal, oorspronkelijk ontwikkeld als gezamenlijke module NLT-wiskunde D.

Kaders en vrijheden

De kaders zijn voor alle scholen die wiskunde D aanbieden bepaald door de eindtermen van het examenprogramma. Omdat wiskunde D afgesloten wordt met een schoolexamen, zijn die eindtermen globaal (zie figuur 1). Leerlingen moeten voor het schoolexamen voldoen aan deze eindtermen; hoe een leerling die bereikt, is een zaak tussen docent en leerling. Met andere woorden: er is geen onderwijsvorm, organisatievorm, volgorde, specificatie of wat men ook verder gewend was, voorgeschreven. De inrichting van het onderwijs is een zaak van de school.

Subdomein C1: Discrete dynamische modellen

19. De kandidaat kan rijen relateren aan recurrente betrekkingen, iteraties, webgrafieken en contexten en kan het gedrag ervan beschrijven in termen van stationair, convergerend of divergerend.

Subdomein C2: Continue dynamische modellen

20. De kandidaat kan in differentiaalvergelijkingen van de vorm $y = f(y, t)$ eigenschappen van f relateren aan eigenschappen van oplossingen, zoals het al dan niet stationair zijn, monotonie en asymptotisch gedrag en in eenvoudige gevallen een oplossing expliciet bepalen.

Subdomein C3: Toepassingen van discrete en continue dynamische modellen

21. De kandidaat kan de stof uit de subdomeinen C1 en C2 gebruiken in concrete toepassingen.

Domein F: Dynamische modellen 2

30. De kandidaat kan de stof van domein C gebruiken voor een profielspecifieke verdieping.

fig. 1 Wiskunde D vwo. Examenprogramma 2007 Domein C: Dynamische modellen 1 en Domein F: Dynamische modellen 2

Als een VWO-leerling in wiskunde D eindexamen doet, is Dynamische modellen 1 (domein C) verplichte stof, Dynamische modellen 2 (domein F) is een keuzedomein, gekoppeld aan Complexe getallen (domein E). Er is, zoals eerder opgemerkt, een eindterm over modelleren, in het domein Vaardigheden. Het gaat om eindterm 7 in het bètabrede subdomein A2 (zie figuur 2). Daarnaast zijn er de kaders die de schoolorganisatie biedt; die zijn verschillend per school.

Welke verplichtingen zijn besloten in de eindtermen van 2007?

Eindterm 19 (subdomein C1) heeft betrekking op discrete dynamische modellen, vergelijkbaar met wat in domein Hb van vwo B1,2 (1998) staat, maar uiteraard minder gedetailleerd. De leerling moet rijen kunnen relateren aan een aantal zaken, waaronder webgrafieken en contexten en moet het gedrag van een bepaalde rij kunnen beschrij-

ven als stationair, convergerend of divergerend. In deze eindterm wordt bijvoorbeeld niet voorgeschreven dat de leerling zelf vergelijkingen opstelt, zelf webgrafieken tekent of met limieten kan werken. *Relateren* en *beschrijven* zijn de hier gevraagde activiteiten. Meer mag natuurlijk wel, de docent bepaalt de inhoud van het aangeboden programma.

Eindterm 20 heeft betrekking op continue dynamische modellen, vergelijkbaar met domein Cb van VWO B1,2 (1998).

7. Modelvorming

De kandidaat kan een realistisch probleem in een context analyseren, inperken tot een hanteerbaar probleem, vertalen naar een model, modeluitkomsten genereren en interpreteren en het model toetsen en beoordelen.

fig. 2 Wiskunde D (HAVO en VWO). Examenprogramma 2007 Subdomein A2: Wiskundige en natuurwetenschappelijke vaardigheden.

Hier wordt iets meer gevraagd, de leerling moet niet alleen in differentiaalvergelijkingen eigenschappen van de functie kunnen *relateren* aan eigenschappen van de oplossing maar ook in eenvoudige gevallen die *oplossing* zelf kunnen *bepalen*. Vergeleken met het oude domein Cb wordt hier niet geëist dat een leerling een richtingsveld kan gebruiken om een grafisch beeld te krijgen, een differentiaalvergelijking kan opstellen of de eigenschappen van een oplossing in termen van het gemodelleerde proces kan interpreteren.

Toepassingen voor continue modellen komen aan de orde in eindterm 21, de derde verplichte eindterm in het examenprogramma. De leerlingen moet de in eindterm 19 en 20 genoemde technieken kunnen gebruiken in concrete toepassingen. Dat hoeft geen toepassing buiten het gebied van de wiskunde te zijn, maar het mag wel.

In het keuzedomein F (eindterm 30) wordt een profielspecifieke verdieping genoemd, dan denken we toch wel aan disciplines als natuurkunde, scheikunde, biologie of een interdisciplinair onderwerp zoals in NLT aangeboden wordt. Een economisch onderwerp kan mijns inziens ook binnen deze eindterm vallen, al is dit geen vak van het profiel NT. Een wiskundig onderwerp mag trouwens ook volgens deze eindterm, dus u kunt er voor kiezen om het hele onderwerp strikt wiskundig te houden.

Voor domein C geeft cTWO als omvang 80 slu, voor domein F 40 slu en aan het domein A (Vaardigheden) worden volgens de aanwijzingen van OCenW geen studielast-uren toegekend.

Deze slu's zijn indicaties: de leerlingen moeten voldoen aan de eindtermen; hoeveel tijd voor het onderwijs daarin uitgetrokken wordt, is in de eerste plaats een zaak van de school. Daarbij horen kwaliteit van onderwijs en goede leereffecten voor leerlingen bepalend te zijn.

Mogelijkheden

Aspecten die ook voor het onderwijs in dynamische modellen de komende jaren van belang zijn en waarover de docent beslissingen zou moeten nemen, zijn onder andere:

- de inhoud van het onderwijsaanbod, zie hierboven,
- wel of niet aansluiting bij het context-concept model: uitgaan van een niet-wiskundige context en van daaruit de begrippen leren of beginnen met de begrippen en al of niet een niet-wiskundige toepassing laten bestuderen;
- de gehanteerde werkvormen: frontaal, groepswerk, mate van zelfstandig werken;
- leermiddelen: boeken, internet, GR, computersoftware.

Aan deze aspecten probeer ik aandacht te besteden in het volgende overzicht. Daarbij bekijk ik ook steeds in hoeverre aan de eindtermen van het examenprogramma voldaan wordt. Daarbij moet men uiteraard bedenken dat er alleen gekeken wordt naar het voorkomen van onderwerpen; over het beheersingsniveau van leerlingen kan nog niets gezegd worden.

Docent A

Een globale beschrijving van een aantal lessen. De volgorde van de onderwerpen is discrete modellen, gevolgd door continue modellen; voorbeelden van rijen, verschillende methoden om oplossingen te berekenen, beperkingen van GR; uitrekenen van de tweeduizendste term van een rij maakt de noodzaak van opstellen van een formule duidelijk; parallellen met lineaire en exponentiële groei, waaruit de beperkingen van een GR duidelijk gemaakt worden en gebruik van logaritmen handig blijkt; introductie van webgrafieken als hulpmiddel om het gedrag van een rij te bekijken, limietbegrip en eigenschappen van enkele afbeeldingen. Vervolgens worden continue modellen geïntroduceerd met behulp van een veer die uitgerekt wordt; differentiaalvergelijkingen, de (on)mogelijkheid van een oplossing, ondersteuning met grafische afbeeldingen. Vervolgens gaan de leerlingen verder met 'programmaonderdelen zoals we die kennen uit het materiaal dat we al op het schoolexamen toetsten'.

Leermiddelen

Pen en papier, grafische rekenmachine, computer, eindexamenopgaven, internet

Context-concept

Discrete modellen, volgens de beschrijving alleen concepten.

Continue modellen: veer als voorbeeld, overigens geen contexten.

Werkvormen

Docentgestuurd, interactief. Explorerend, problemen stellend en oplossingen zoekend.

Zelfwerkzaamheid door lesmateriaal op internet te laten zoeken, aantekeningen van docent uitwerken.

Inhoud

Rijen en recurrente betrekkingen, webgrafieken, verschildrij, divergerend, limietbegrip (oneindig, min oneindig), dekpunt, eigenschappen van dekpunten, logistische afbeelding, tentafbeelding, periodieke punten, eigenschappen van de logistische afbeelding, discreet, continu. Differentiaalvergelijking, oplossingen, grafieken, stationaire punten, stabiel en onstabiel.

Verder de 'programmaonderdelen zoals we die kennen uit het materiaal dat we al op het schoolexamen toetsten'.

Vergelijking met eindtermen van domein C

- Subdomein C1 (eindterm 19): Aan deze eindterm is volgens de beschrijving van de docent bijna helemaal voldaan. Wat mist is 'rijen relateren aan contexten'.
- Subdomein C2 (eindterm 20): Aan voldaan, voor zover uit de beschrijving op te maken.
- Subdomein C3 (eindterm 21): Gezien de laatste zin van de inhoudsbeschrijving zal aan deze eindterm vermoedelijk voldaan zijn.

Tijdsbesteding

Onbekend

Docent B

Geplande lessenserie van dertien lessen over dynamische modellen, met als leerdoelen het kunnen herkennen, rekenen met en opstellen van dynamische modellen.

Vanuit een context griepiepidemie, gebracht via een rollenspel, wordt een discreet dynamisch model in de vorm van een eenvoudige vergelijking geanalyseerd. Doorrekenen met behulp van GR en verfijnen van model door leerlingen in interactie met docent. Voorspellen, simulatie uitvoeren, conclusie trekken op basis van resultaten². Leerlingen rekenen daarna in Powersim een model van een griepiepidemie door, breiden dat model uit, maken voor twee andere contexten een simulatie (afkoelende koffie en groei van gistcellen) en onderzoeken de invloed van de gebruikte variabelen en constanten op het model. Tijdens de volgende les onderzoeken leerlingen hoe de GR gebruikt kan worden om dynamische modellen door te rekenen. De volgende vijf lessen werken leerlingen met continue dynamische modellen van Profi en VU Diff. Tijdens de laatste drie lessen werken leerlingen in groepen van maximaal vier personen aan een afsluitende opdracht. Die bestaat uit het bestuderen van een hoofdstuk over het oplossen van differentiaalvergelijkingen of het oplossen van problemen met behulp van Powersim. In alle gevallen moeten leerlingen schriftelijk rapporteren met als doelgroep een lezer die onbekend is met dynamische modellen en moeten leerlingen aan klasgenoten de hoofdzaken van hun onderzoek mondeling presenteren. Interactie met de docent wordt aangemoedigd.

Leermiddelen

- Computers met internetverbinding, software (Powersim), grafische rekenmachine.
- Stencils van Continue Dynamische Modellen van Profi, april (tevens eindopdracht).
- Stencils Een griepmodel met programma powersim.
- Moderne Wiskunde deel 9V (eindopdracht).
- Calculus Adams 4th edition (eindopdracht).
- Dynasys door vd Giessen en Reuter (eindopdracht).
- Materiaal voor rollenspel.

Context-concept

Uitgangspunt is een context; gedurende de eerste vijf lessen bewegen de leerlingen van context naar concepten, maar ligt de nadruk op contexten. In de lessen zes tot en met tien ligt de nadruk meer op concepten. In de verwerking (les elf tot en met dertien) moeten leerlingen laten zien dat ze de concepten voldoende begrepen hebben om ze aan anderen te kunnen uitleggen.

Werkvormen

- Docentgestuurd, interactief.
- Simulatie rollenspel met klas.
- ICT met tweetallen.
- Onderzoek in klas in groepen.
- Afsluitende opdracht door middel van experts, zelfstandig analyseren, synthetiseren en presenteren.
- Leerlingen zijn veel zelf bezig, gestuurd door half open tot open opdrachten en begeleid door de docent.

Inhoud

(Dynamisch) model, variabelen, startwaarde, stapgrootte, constante, recurrente betrekkingen, kans, verwachting, simulatie, toenamesnelheid, evenredigheidsconstante, vergelijkingen opstellen, discreet, continu.

Differentiaalvergelijking, oplossingen, logistisch groei-model, remfactor, lineaire benadering, richtingsvelden, limiet.

Vergelijking met eindtermen van domein C

Subdomein C1 (eindterm 19): Webgrafieken lijken niet bestudeerd te worden. Niet duidelijk is of de begrippen 'stationair, divergerend, convergerend' bestudeerd worden.

Subdomein C2 (eindterm 20): Als monotonie door leerlingen bestudeerd is, is aan de eisen van deze eindterm voldaan.

Subdomein C3 (eindterm 21): Aan deze eindterm is voldaan.

Tijdsbesteding

Dertien lessen is aanzienlijk minder dan 80 studielasturen.

Dynamische modellen vwo

Testversie NLT module december 2006

Dit is de testversie van de module die gepland was als een gezamenlijke module voor wiskunde D en NLT. Deze test-

versie wordt bewerkt op basis van verschillende evaluatieprocessen en zal naar verwachting in juni 2007 beschikbaar komen in een meer definitieve vorm als module voor NLT.

In hoeverre voldoet de testversie aan de eindtermen van het domein C in wiskunde D 2007? In vier hoofdstukken komen achtereenvolgens aan de orde: modelbegrip en dynamische modellen, rekenen met modellen, modellen bouwen (met behulp van Powersim of Coach 6), de wiskunde in een model en toepassingen van dynamische modellen. Wiskunde komt voor het eerst echt in beeld in hoofdstuk 3. De nadruk ligt op begrip van de betekenis van dynamisch modelleren en een grafische modelleeromgeving. Het materiaal is sterk gericht op zelfwerkzaamheid van leerlingen; er wordt eerst ervaring opgedaan met modellen en daarna komt reflecteren op die ervaringen en uitleg. Er zijn veel contexten, als voorbeeld maar ook als uitgangspunt voor lessen. De vorm van het leerlingenmateriaal is stukjes tekst afgewisseld met opdrachten die variëren van iets uitrekenen, via uitleggen tot onderzoeken.

Leermiddelen

- Computers met internetverbinding, software (Powersim), grafische rekenmachine.
- Leerlingenboekje

Context-concept

Uitgangspunt in zowel hoofdstuk 1 als 2 is een context. Zo wordt in hoofdstuk 1 met het griepmodel gewerkt en is een griep epidemie dus een belangrijke context, in hoofdstuk 2 zijn vollopende emmers de belangrijkste context. In hoofdstuk 3 en 4 hebben contexten de rol van toepassingen.

Werkvormen

De gesuggereerde werkvorm is gestuurd ontdekken en veel zelfwerkzaamheid. Er worden geen uitspraken gedaan over al of niet in groepen werken. Het laatste hoofdstuk bevat een aantal keuzeopdrachten. Het materiaal kan zowel individueel als voor tweetallen of kleine groepen gebruikt worden.

Inhoud

(Dynamisch) model, variabelen, startwaarde, stapgrootte, constante, recurrente betrekkingen, kans, verwachting, simulatie, toenamesnelheid, evenredigheidsconstante, vergelijkingen opstellen, discreet, continu, terugkoppeling.

Differentiaalvergelijking, oplossingen, logistisch groei-model, exponentieel groei-model, lineair groei-model, lineaire benadering, richtingsvelden, limiet.

Vergelijking met eindtermen van domein C.

- Subdomein C1 (eindterm 19): webgrafieken lijken niet bestudeerd te worden. Niet duidelijk is of de be-

grippen ‘stationair, divergerend, convergerend’ bestudeerd worden

- Subdomein C2 (eindterm 20): als monotonie door leerlingen bestudeerd is, is aan de eisen van deze eindterm voldaan.
- Subdomein C3 (eindterm 21): aan deze eindterm is voldaan.

Tijdsbesteding

Dit materiaal is door enkele scholen getest, ongeveer 40 slu.

Materiaal van cTWO

Op de website wijst men op de mogelijkheid bestaande methoden (programma’s 1998) te gebruiken, in combinatie met deel 16 uit de Zebraserie (F. Verhulst. *Chaos en orde*) U kunt lesmateriaal van Johan Duprez en Jan Roels binnenhalen⁴. Dit heeft betrekking op subdomein C1: discrete dynamische modellen. Het is ontwikkeld ten behoeve van het Vlaamse onderwijs en maakt gebruik van een leerlingentekst, GR en computer met Excel. Er komen meer begrippen aan de orde dan in eindterm 19 worden genoemd. Leerlingen worden aangemoedigd te onderzoeken en verklaren.

Ook staat er een document met suggesties voor een niveau van invulling van de hand van twee commissieleden. Dit neemt de vorm van specificaties van de globale eindtermen, zoals in een syllabus voor een Centraal Eindexamen, met een uitgewerkte suggestie voor het keuzedomein.

Er zijn verschillende initiatieven om lesmateriaal voor Dynamische Modellen te ontwikkelen. Er zijn verschillende experimenteerscholen wiskunde D bezig met het onderwerp. Er is het plan voor een E-klas Discrete dynamische systemen van de werkgroep Dynamische modellen in Amsterdam. Deze opzet gaat uit van het door cTWO genoemde materiaal⁵. Zowel *Moderne Wiskunde* als *Getal en Ruimte* brengen boekjes voor wiskunde D op de markt. *Moderne Wiskunde* heeft in VWO wiskunde D deel 1 een hoofdstuk over modelleren en een hoofdstuk over rijen opgenomen. Het hoofdstuk over modelleren maakt gebruik van VU-Stat en Powersim; het begint met een inleiding over modelleren en behandelt daarna onder andere mathematiseren en recursieve betrekkingen. In deel 1 van *Getal en Ruimte* is Dynamische Modellen niet opgenomen.

Discussie

Met de opzet van Docent B en de module Dynamische modellen – NLT krijgt Dynamische modellen een plaats binnen de modelleercyclus (eindterm 7 van A2). Met de opzet van docent A ontbreekt dat aspect, maar strikt genomen is dat volgens de eindtermen van domein C ook niet noodzakelijk.

Zowel docent B als de module DM-NLT leggen meer nadruk op continue modellen dan op discrete modellen. Beiden gaan uit van contexten; het materiaal van docent B besteedt eerder en grondiger aandacht aan opbouw van wiskundige kennis en het uitvoeren van wiskundige activiteiten. De eindversie van de module DM-NLT zal naar verwachting ook op dit aspect verbeterd zijn. Docent A noemt contexten nauwelijks in zijn beschrijving. Beide docenten, A zowel als B, hechten waarde aan onderzoeken en verklaren.

Het examenprogramma voor wiskunde D biedt voldoende ruimte voor verschillende benaderingen, afhankelijk van kennis en belangstelling van docenten en hopelijk ook van leerlingen.

Jenneke Krüger
SLO, Enschede

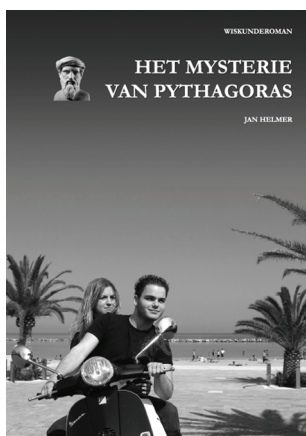
Noten

- [1] Zie voor de volledige tekst van het goedgekeurde examenprogramma www.slo.nl, sector VO-Tweede Fase.
- [2] <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models>.
- [3] Zie www.betavak-nlt.nl (docenten> downloads).
- [4] <http://www.fi.uu.nl/ctwo/WiskundeD/MateriaalDoemenenWiskundeD/DynamischeModellenVwo/docs/dsduprez.pdf>
- [5] <http://www.wiskunded.nl/amsterdam/dynamische-modellen.htm>

Gaat verschijnen

In *Het Mysterie van Pythagoras* (ISBN: 978-90-811843-1-1) beschrijft Jan Helmer het spannende verhaal van Matteo en Sophia. De problemen in hun avontuur lossen zij met wiskunde op. Letterlijk en figuurlijk komt Pythagoras daarbij tot leven. De lezer hoeft zich niet (meer) af te vragen waar die wiskunde allemaal voor nodig is.

Pythagoras als oude leermeester gebruikt de dialoog om Matteo de wiskunde te verduidelijken.



Het Mysterie van Pythagoras is in eerste instantie bedoeld voor scholieren tussen 12 en 16 jaar. Leerlingen die moeite hebben met wiskunde kunnen er veel van opsteken, en leerlingen die juist goed zijn in het vak, zullen het met veel belangstelling lezen. Het boek is zo geschreven, dat het ook de volwassen lezer nog veel te bieden heeft.

Wist u dat de Stelling van Pythagoras al veel ouder is dan Pythagoras en dat die al 2000 jaar voor zijn geboorte gebruikt werd en dat er van Pythagoras ook nooit een bewijs gevonden is? Het is waarschijnlijker dat hij zijn leven lang geprobeerd heeft te bewijzen dat de Stelling niet klopt. Op de site www.pythagorasproject.nl is nog informatie en fotomateriaal over het boek, de schrijver (interview) en Pythagoras te vinden. Het boek verschijnt in september en is via de website voor €16,90 te verkrijgen.