

Wiskunde C krijgt vanaf 2011 een invulling die past bij het profiel Cultuur en Maatschappij. De werkgroep wiskunde C onderzocht welke onderwerpen kansrijk zijn. **Michiel Doorman** deed verslag van de stand van zaken in het vorige nummer van de *Nieuwe Wiskrant*. Vanwege enkele foutjes in de opmaak van het artikel hierbij een herziene versie waar letterlijk en figuurlijk muziek inzit.

Wiskunde C: daar komt muziek in

Inleiding

Reeds aan het eind van de jaren negentig bestond de wens voor een wiskundevak toegesneden op leerlingen uit het C&M-profiel. Het *Wiskunde C rapport* (De Lange e.a., 1998) bevatte inspirerende onderwerpen en mogelijkheden voor zo'n vak, maar is destijds helaas in de ijskast beland. De ambtenaren waren het echter niet vergeten. Na alle reducties op contacturen wiskunde werd het weer tevoorschijn getoverd als doekje voor het bloeden. We zijn natuurlijk zeer verheugd dat het nu gerealiseerd kan worden, maar de geschiedenis laat weer eens zien hoe onvoorspelbaar onderwijsbeleid verloopt.

Dit schooljaar is een werkgroep wiskunde C, onder de hoede van cTWO, bezig met het formuleren van een kader voor de richting waarin dit vak zich zou kunnen ontwikkelen; een richting die per 2011 kan worden geïmplementeerd en die aansluit bij de mogelijkheden, belangstellingen vervolgoledingen van deze leerlingen. Lastig hierbij is dat de wiskunde voor C&M-leerlingen per 2007 al wiskunde C heet. Dan is het echter grotendeels het huidige wiskunde A1-programma en komt nog nauwelijks tegemoet aan de ambities voor een nieuwe invulling.

Dit artikel geeft alvast een beeld van de richting waarin we binnen de werkgroep denken en werken. Wellicht is het voor u mogelijk om al in de komende schooljaren in de vrije ruimte van wiskunde C activiteiten te initiëren die aansluiten bij deze ambities.

De ambities

Wiskunde C is in eerste instantie gericht op de leerling in het profiel Cultuur en Maatschappij en bereidt voor op universitaire studies in de sociale, juridische en taal- en gedragswetenschappen. Het programma richt zich op algemene wiskundige en statistische vorming, in samenhang met de historische en culturele plaats van wiskunde in wetenschap en maatschappij. Bij een eerste samenstelling van onderwerpen en werkvormen zijn we onder meer uitgegaan van de volgende uitgangspunten:

1. Wiskunde C is algemeen vormend in de zin dat het leerlingen voorbereidt op de (informatie)maatschappij.

2. Wiskunde C bereidt voor op universitaire vervolgoledingen, enerzijds met aandacht voor specifieke vaardigheden (zoals bijvoorbeeld statistische vaardigheden voor de sociale wetenschappen), anderzijds door aandacht te geven aan redeneren, argumenteren en reflecteren.
3. Binnen wiskunde C wordt gewerkt in contexten die passen in het C&M-profiel. Dit betekent ook dat er minder nadruk ligt op het verwerven en reproduceren van wiskundige technieken en meer aandacht is voor de cultuurhistorische waarde van wiskunde in onze maatschappij.

Net als bij wiskunde A zal er expliciete aandacht zijn voor het ontwikkelen van gecijferdheid en een kritische houding ten aanzien van wiskundige representaties en methoden. Een mooi voorbeeld is nog altijd de volgende opdracht uit het Hewet-project (De Lange & Verhage, 1982):

In een land staat in het jaar 1980 op de begroting voor defensie 30 miljoen. De totale begroting omvat 500 miljoen. Een jaar later staat er voor defensie 35 miljoen op de begroting, op een totaal van 605 miljoen. De inflatie in de periode tussen de twee begrotingen is 10%.

Je houdt een lezing voor een pacifistisch gezelschap en wilt uitleggen dat de defensie-uitgaven toch maar mooi gedaald zijn het laatste jaar. Hoe?

Je houdt een toespraak op de K.M.A. en vertelt ze vol trots dat de defensie-inspanningen aanmerkelijk zijn toegenomen. Hoe?

Gebruikelijk is om de eindtermen voor wiskunde te beschrijven in algemene vaardigheden en vervolgens de wiskundige domeinen langs te lopen die aan bod moeten komen. In wiskunde C willen we echter ook een accentverschuiving (zie punt 3 hierboven) met aandacht voor de rol en de waarde van wiskunde:

- in het dagelijkse leven, de maatschappij en vervolgstudies,
- in de kunst & cultuur (inclusief geschiedenis), en
- in (het ontstaan van) de wiskunde als zelfstandige discipline.

De uitdaging is om te onderzoeken hoe we deze aandacht kunnen realiseren in activiteiten voor leerlingen en hoe eindtermen die hierop gericht zijn, getoetst kunnen worden.

Onderwerpen en activiteiten

In ieder geval zullen in het wiskunde C-programma enkele onderwerpen worden opgenomen die in samenhang met wiskunde A kunnen worden aangeboden: statistiek, kansrekening en verbanden (functies en grafieken in een op dit profiel toegesneden vorm). Daarnaast onderzoeken we de mogelijkheden van onderwerpen die specifiek voor deze doelgroep van belang zijn vanwege de profielkleur en de mogelijke vervolgopleidingen. Hierbij denken we aan hoeveelheid (getalbegrip), meetkunde en logica. Deze onderwerpen hebben nog geen definitieve vorm gekregen. Ze zijn in eerste instantie in globale termen beschreven voor een conceptexamenprogramma per 2011. Onderstaande voorbeelden geven een eerste indruk van de mogelijke activiteiten voor leerlingen. In het ene voorbeeld staat de vorm voorop en in het andere ligt meer nadruk op het type inhoud dat we aan de orde willen stellen.

Hoeveelheid

Leerlingen in het profiel C&M hebben in ieder geval een zeker beheersingsniveau en vertrouwen in rekenvaardigheden nodig. Daarvoor willen we activiteiten ontwikkelen waarmee enerzijds inzicht in bijvoorbeeld het rekenen met breuken wordt ondersteund en tegelijk het gebruik ervan in herkenbare en relevante contexten plaatsvindt. Een aantal van deze leerlingen zal naar de PABO gaan en voor hen is het dus handig als ze kunnen uitleggen wat de samenhang is tussen staartdelen en herhaald aftrekken.

Het bestuderen van de geschiedenis van specifieke getallen (bijvoorbeeld 0) en van verschillende telsystemen lijken zinvolle activiteiten om getalbegrip te vormen. Zo kunnen leerlingen verklaren waarom men met de Egyptische notatie (ca 1700 v. Chr.) vooral gebruikmaakte van verdubbelen en vertienvoudigen bij hun berekeningen terwijl wij kolomsgewijs kunnen cijferen.

Een ander voorbeeld is het mengen van breuken. Stel je hebt een vaas waarin twee van de vijf knikkers rood zijn en een vaas waarin drie van de zeven knikkers rood zijn. Het bij elkaar mengen van de twee inhouden levert een vaas waarin vijf van de twaalf knikkers rood zijn. Dit kan een ingang vormen om een nieuwe operatie te introduceren: $\frac{2}{5} \oplus \frac{3}{7} = \frac{5}{12}$. Hoe verschilt dit van de gebruikelijke optelling en wanneer kom je in de problemen? Dit zijn vragen waarmee je zeker een les bezig kunt zijn (zie ook het artikel van Kindt, 2002).

Een andere context voor rekenactiviteiten is muziek. Veel leerlingen uit dit profiel zullen muzikale ervaringen hebben en bovendien is basisinformatie gauw op internet gevonden. Muzieknoten geven toonhoogte en toonduur aan. Deze toonduur is relatief en wordt niet in seconden uitgedrukt. Er wordt gewerkt met de hele noot, de halve noot, de kwartnoot, de achtste, de zestiende, enzovoorts. De verschillende duurwaarden worden weergegeven via de vormgeving van de noot: een ronde, al dan niet gevulde, notenkop met eventueel een stok, die weer van vlaggen kan worden voorzien. Toevoeging van een punt verlengt de duur met de helft.

De toonduur is echter ook afhankelijk van de maat van het muziekstuk. De maatsoort wordt aangegeven met twee getallen, waarvan de bovenste het aantal tellen in de maat weergeeft en de onderste de waarde van de teleenheid. Zo ontstaan combinaties als 2/2, 3/4 en 6/8. Als voorbeeld van de 2/4-maat hieronder het begin van het slotdeel (Presto) van de klaviersonate KV 310 van Mozart (ontleend aan Rasch, 2006).

Voor leerlingen kan het een aardige oefening zijn om te ontcijferen of de samenstellingen in dit deel inderdaad in de bedoelde maten passen en of de linkerhand en de rechterhand evenveel tijd vragen in iedere maat. Naast maat, vormen ook toonsoorten, modulaties en stemmingen een rijke bron voor wiskundig onderzoek (zie bijvoorbeeld Van de Craats & Takens, 2001).

Geen wonder dat regelmatig wordt beweerd dat muzikale vorming ook haar invloed heeft op de ontwikkeling van reken-wiskundige inzichten. In het artikel *Wiskunde en culturele vorming* citeert S.J. Doorman de filosoof-wiskundige Leibniz: 'Muziek is een onbewuste oefening in rekenkunde, waarbij het intellect niet weet dat het aan het tellen is' (Doorman, 1999). In dat artikel wordt een opvallende overeenkomst tussen wiskunde en muziek benadrukt. Die overeenkomst betreft de axiomatische methode waarmee ordening en structuur gearticuleerd kunnen worden. Zowel het componeren van muziek als het luisteren naar muziek omvat een vorm van constructie waarbij patronen worden herkend en bewerkingen op die patronen worden gevolgd. Een wiskundige benadering van muziek, en van andere kunstvormen, kan vanwege haar exactheid en het constructieve karakter een goed begrip van artistieke activiteiten ondersteunen.

Meetkunde

Een meetkundig onderwerp dat menigeen verwacht in wiskunde C betreft de gulden snede. Een van de docenten



in de werkgroep wiskunde C (Bart Zevenhek, docent aan het Barlaeus gymnasium te Amsterdam) leest met zijn wiskunde A1-groep *De ontstelling van Pythagoras – Over de geschiedenis van de goddelijke proportie* van Albert van der Schoot. Iedere week presenteert een leerling een hoofdstuk uit dit boek. Voorafgaand aan die presentatie moet een samenvatting worden ingeleverd.

Een presentatie betreft de rol van Pacioli in het ontstaan van de mythe rond de gulden snede. De leerling heeft een kopie van een schilderij van Pacioli op het bord gehangen (zie de *Nieuwe Wiskrant* 20(1) voor een zeer lezenswaardig artikel van Michel Roelens over dit schilderij).



fig. 1 Het portret, Luca Pacioli, Museo di Capodimonte, Napels

De presentatie begint met het leven van Pacioli, een Franciscaner monnik, rond 1445 geboren in het dorpje waar ook zijn leermeester Piero della Francesca opgroeide. Pacioli leefde in een tijd vol van nieuwe ontwikkelingen in de wetenschap en de kunst aan het begin van de Renaissance. De leerling schetst de grote rol van Pacioli op het gebied van de wiskunde, zijn interesse voor Arabische wiskunde en het vele reizen dat wetenschappers in die tijd deden. Pacioli schreef een soort encyclopedie van de wiskunde die, ondanks veel kritiek, een standaardwerk werd.

Bovendien schreef Pacioli de *Divina Proportioni* over de gulden snede en Platonische lichamen met illustraties van Leonardo da Vinci. Dit boek werd gezien als een brug tussen kunst en wetenschap. Het was niet erg wetenschappelijk geschreven, maar wel toegankelijk voor de doelgroep uit de kunstwereld (architecten, schilders, beeldhouwers).

Een mooie presentatie waarin verschillende aspecten een rol spelen: geschiedenis, culturele inbedding en de relatie tussen wiskundige ontwikkelingen en haar toepassingen. Pacioli is geen beroemde wiskundige geworden, maar zorgde wel voor een stroomversnelling door ‘bruikbare’ toepassingen te beschrijven en tegelijk een mythe over de rol van wiskunde te laten ontstaan.

Het zal niemand verbazen dat talrijke situaties waarin leerlingen meetkundige inzichten kunnen toepassen en verdiepen, gevonden kunnen worden in de schilderkunst, architectuur en in diverse podiumkunsten. Enig zoekwerk levert interessante en toegankelijke literatuur, zoals bijvoorbeeld over sociale meetkunde in de architectuur: de kunde van het organiseren van ontmoetingen (fysiek en oogcontact) in het ontwerp van gebouwen.

Logica en redeneren

Een heel ander onderwerp waarover al lang fantasieën bestaan, is logica en redeneren. Een belangrijke samenhang moet daar gevonden kunnen worden tussen taal en wiskunde, tussen argumenteren en logisch redeneren. Reeds in het wiskunde C-rapport stond:

Logisch redeneren, of zelfs gewoon redeneren en argumenteren lijkt een bedreigde discipline te worden voor de gewone burger: de maatschappij lijkt steeds meer te vervlakken. In het voorgaande is reeds duidelijk geworden dat ‘redeneren’ een centrale plaats moet hebben binnen een wiskunde-curriculum, en zeker ook voor studenten die het profiel Cultuur en Maatschappij kiezen. Maar enig begrip voor logica is ook van belang voor sommige vervolgstudies voor studenten in dit profiel, waaronder letteren en rechten.

(...) Prachtige historisch-filosofische (con)teksten zoals van Aristoteles, Spinoza en Lewis Carroll kunnen uitgangspunten bieden voor problemen op het gebied van redeneren en argumenteren. (De Lange e.a., 1998).

Argumentatieve vaardigheden vormen een domein voor het vak Nederlands. Activiteiten van leerlingen zijn daar bijvoorbeeld:

Geef de argumenten bij je standpunt in de vorm van zeven zinnen die telkens als volgt zijn opgebouwd:
 _____ DUS _____ WANT _____

Toelichting: eerst refereer je aan een gegeven feit. Na DUS komt je bewering. Na WANT komt de rechtvaardiging / de reden.

Eigenlijk is het onbegrijpelijk dat we in de wiskundeles nauwelijks gebruikmaken van dergelijke stijlvormen. Aandacht voor als-dan-redeneringen, voor het onderscheid tussen voldoende en noodzakelijke voorwaarden en voor het onderscheid tussen (verzwegen) aannames en redeneerstappen lijkt vanzelfsprekend. We besluiten deze paragraaf met een bekend voorbeeld.

Gegeven zijn vier kaarten met op iedere kant een letter of een cijfer.

Regel: Als er een klinker staat op de ene kant, dan staat er een oneven getal op de andere kant.

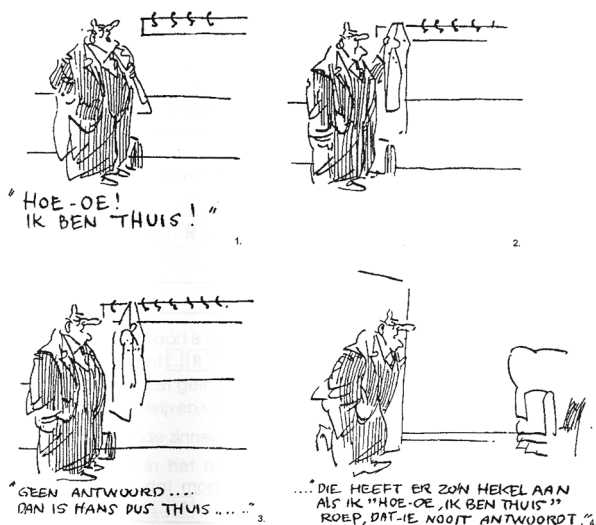
Op de vier kaarten is te zien: A, T, 4, 7

Welke kaarten moet je omdraaien om dat te controleren?

Veel mensen doen dit verkeerd, terwijl ze met het volgende voorbeeld meestal minder problemen hebben:

Gegeven zijn vier kaarten met op iedere kant een leef-
tijd en een bijbehorend drankje.
Regel: als je jonger dan 16 bent, dan mag je geen al-
coholische drankjes drinken.
Op de vier kaarten is te zien: 14, 19, bier, cola
Welke kaarten moet je omdraaien om dat te controleren?

Wat is het gemeenschappelijke in deze twee voorbeelden en waardoor zouden de resultaten zo verschillend kunnen zijn? Wat is de invloed van context en het gebruik van alledaagse kennis bij redeneringen? Zelfs met strips kun je vorm en geldigheid van redeneringen aan de orde stellen. Zie bijvoorbeeld de strip hieronder van Peter van Straaten (Eemeren, Grootendorst & van Straaten, 1996).



Vervolg

Vorig schooljaar is een werkgroep wiskunde C begonnen met het vormen van een kader voor een nieuw wiskunde C-programma per 2011. In *Euclides* heeft u ook al over de eerste gedachten kunnen lezen (Daemen, 2007, en Koolstra, 2007). Informatie over de werkgroep wiskunde C is bovendien te vinden via de website van cTWO (<http://www.ctwo.nl/>).

Dit schooljaar zullen we vooral aan de slag gaan met het ontwikkelen en uitproberen van 'voorbeeldmatige' lesmaterialen. De materialen zullen nieuwe werkvormen en nieuwe onderwerpen illustreren die richtinggevend moeten zijn voor een vernieuwend wiskunde C-programma. Een programma waar muziek in zit.

Michiel Doorman
Freudenthal Instituut

Literatuur

- Bronkhorst, H. (2006). *Logica in de bovenbouw van het vwo*, Scriptie aan de RUG: Department of Mathematics and Computing Science.
- Craats, J. van de & F. Takens (2001). De juiste toon, de juiste stemming. *Nieuw Archief voor de Wiskunde*, 5/2(2), 136-145.
- Daemen, J. (2007). Wiskunde C, op weg naar 2010. *Euclides*, 82(4), 140-143.
- Doorman, S.J. (1999). Wiskunde en culturele vorming. *Nieuwe Wiskrant. Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, 19(2), 13-16.
- Eemeren, F. van, R. Grootendorst & P. van Straaten (1996). *Leren argumenteren met Vader en Zoon*, Amsterdam/Antwerpen: Contact.
- Koolstra, G. (2007). Leesbaarheid gevangen in formules. *Euclides*, 82(6), 228-231.
- Lange, J. de & H.B. Verhage (1982). Kritisch kijken. *Nieuwe Wiskrant. Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, 1(4), 19-28.
- Lange, J. de, e.a. (1998). *Wiskunde C rapport* (zie de site van de werkgroep Wiskunde C op www.ctwo.nl)
- Kindt, M. (2002). Wat te bewijzen is. *Nieuwe Wiskrant Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, 22(1), 42-43.
- Rasch, R. (2006). *NOOTZAKEN, Syllabus Beginselen van Muziektheorie* (<http://www.let.uu.nl/~Rudolf.Rasch/personal/Muziektheorie.htm>).
- Roelens, M. (2000). Een schilderij komt tot leven. *Nieuwe Wiskrant. Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, 20(1).