Leon van den Broek ging aan de slag met experimenteel materiaal voor analytische meetkunde voor het VWO. Twee docenten die het materiaal op verschillende wijze getest hebben, geven hun verslag. De derde docent weet dat er in de echte natuurkunde en techniek bijna geen 'gewoon' product bestaat, maar dat dat allemaal in- of uitproducten zijn. Moet daar niet iets aan gedaan worden?

Analytische meetkunde, terug van weggeweest; of toch liever vectoren?

Algebraïsche vaardigheden

Een van de onderwerpen van wiskunde D voor VWO is Analytische Meetkunde. Weliswaar is het onderwerp bekend van voor de Mammoet, maar het onderwijs is sindsdien zo sterk veranderd dat er opnieuw lesmateriaal geschreven moet worden. Op grond van het eerste deel van materiaal van Lia van Asselt heb ik een serie van twaalf lessen voor VWO 4 gemaakt die zich concentreert op rechte lijnen. Het is een goed idee om daarmee extra aandacht te geven aan rekenvaardigheden. Immers in Analytische Meetkunde wordt flink gerekend (wegwerken van haakjes, substitutie, snijden van figuren, …). Ook wordt het opstellen van vergelijkingen van rechte lijnen uit klas 3 herhaald, evenals het gebruik van de abc-formule. Ten slotte is het werken met een parameter een zinvolle uitbreiding van de derdeklasstof. Het experimentele materiaal is getest in VWO 4 op Regionale Scholengemeenschap Pantarijn te Wageningen (experimenteerschool van cTWO) en in VWO 5 als praktische opdracht bij wiskunde B12 op het Kandinsky College te Nijmegen. De tekst, planning, tussentoets, zelftoets en eindtoets zijn online[1] te vinden.

Over het materiaal

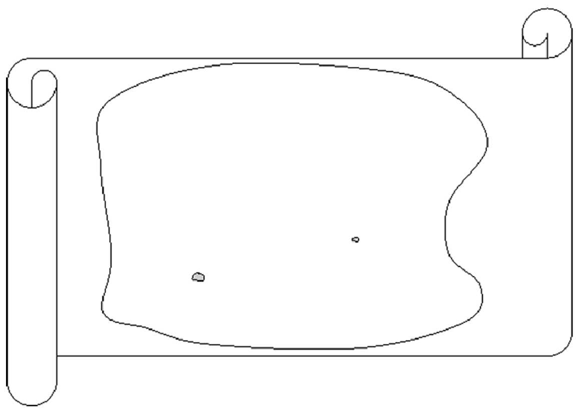
Schitterend is de puzzel waarmee wordt begonnen (zie figuur 1). Krommen en gebieden in het gecoördinatiseerde vlak worden beschreven. Figuren hebben een vergelijking en bij vergelijkingen kun je een figuur tekenen. In het bijzonder krijgen rechte lijnen aandacht. Stelsels vergelijkingen worden behandeld, ook in verband met bijzondere onderlinge ligging van lijnen.
Loodrechte stand en afstand hebben een speciale plaats. Veel verder gaat het materiaal niet. Een vervolg zou het onderwerp cirkels kunnen zijn en, algemener, kegelsneden.

In de volgende twee stukjes doen Maris van Haandel en Lambert Hofman verslag van hun bevindingen met het materiaal. Daarna laat ik Dolf van den Hombergh (Elzendaal College, Boxmeer) aan het woord. Hij ziet liever Rekenen met Vectoren dan Analytische Meetkunde.

Op rsg Pantarijn (Maris van Haandel)

Het materiaal is op mijn school (RSG Pantarijn te Wageningen) uitgetest in vier VWO 4-klassen met daarin leerlingen van alle profielen, ruim 100 in totaal. Er zijn twaalf lessen van 50 minuten aan besteed in de periode oktober-november van het afgelopen jaar. Daarin zijn de hoofdstukken 1 en 2 behandeld, met uitzondering van paragraaf 2.6.

Op een zolder heb je een oude kaart gevonden. Op een onbewoond Caraïbisch eiland is een schat begraven. De beschrijving is heel duidelijk:
Loop in een rechte lijn van de dikke eik naar de grote zwerfkei.
Sla bij de grote zwerfkei aangekomen linksaf (maak een rechte hoek) en leg eenzelfde afstand nog eens af.
Loop vervolgens in een rechte lijn naar de kleine zwerfkei.
Sla bij de kleine zwerfkei aangekomen linksaf (maak een rechte hoek) en leg de laatste afstand nog eens af.
De schat ligt precies midden tussen het punt dat je nu bereikt hebt en de dikke eik.



Jij gaat op zoek naar de schat. De twee zwerfkeien zijn goed herkenbaar, maar de dikke eik heeft de tijd niet overleefd. Onderzoek waar de schat ligt.

fig. 1 Waar ligt de schat?

Na twee weken werd tijdens een les een tussentoets gemaakt over hoofdstuk 1. De leerlingen moesten in groepjes van twee enkele krommen en een gebied tekenen op basis van gegeven vergelijkingen en een ongelijkheid (zie figuur 2). Daarbij moesten ze ook aangeven hoe ze aan hun antwoorden waren gekomen. Op één groepje na had iedereen een voldoende.

> Er zijn twee krommen gegeven door middel van een vergelijking en een gebied door middel van een ongelijkheid. Door voldoende punten uit te rekenen, lukt het altijd wel de krommen en het gebied te tekenen. Maar wij willen graag meer: weet je een systematische aanpak om de figuur te vinden? Ofwel: vertel je verhaal hoe je zo'n kromme en gebied verstandig vindt. Uiteraard willen we de tekening uiteindelijk ook zien.
>
> Kromme 1: $|x| + |y| = 5$
>
> Kromme 2: $\sqrt{25 - x^2} \cdot \sqrt{25 - y^2} = 0$
>
> Gebied: $y^2 \geq x^2$

fig. 2 Opdracht

De toets na afloop van de lessenreeks was middels een WA- en een WB-versie aangepast aan het niveau van de leerlingen. Tweederde deel van de leerlingen had een voldoende.
Mijn persoonlijke ervaringen:
- De leerlingen hebben aanvankelijk veel moeite met het formele taalgebruik en de compacte schrijfstijl van het materiaal. Als ze eenmaal begrijpen wat de bedoeling is, loopt het wel. Hiervoor was geregeld korte of langere klassikale uitleg nodig.
- De leerlingen hebben moeite met opgaven waarin een bewijs of een algemene redenering wordt gevraagd, maar dat is gezien hun achtergrond begrijpelijk.
- De leerlingen hebben nog niet allemaal de benodigde algebraïsche vaardigheden onder de knie of missen in elk geval de routine om deze vlot toe te passen. Ook dat was te verwachten, maar al doende wordt er snel behoorlijke progressie gemaakt.
- De introductieparagraaf 'Waar ligt de schat?' wordt als leuk en uitdagend ervaren, maar het is jammer dat het bij deze ene niet-wiskundig geformuleerde toepassing blijft.
- Ik ben achteraf gezien best tevreden over het materiaal, dat mijns inziens met enige aanpassingen beter geschikt gemaakt kan worden opdat het ook in VWO 4 redelijk zelfstandig kan worden doorgewerkt.

Op Kandinsky (Lambert Hofman)

VWO 5 WB12
In totaal hebben zeven leerlingen er twaalf lesuren (van 60 minuten) zelfstandig in de les aan gewerkt. Uiteraard mochten (moesten) ze er ook thuis aan werken. Ze konden overleggen en mij om raad vragen.
Een paar onderdelen heb ik klassikaal behandeld: absolute waarden, puntsymmetrie aantonen, ontbinden van kwadratische vormen zoals $x^2 - 6xy + 8y^2$ (zie figuur 3) en het opstellen van een vergelijking van een baan.
Iedere les heb ik gecontroleerd hoever iedereen was en gekeken of ze wiskundig geen vreemde dingen aan het doen waren. Pas nadat iedereen de hele stof klaar had, hebben ze de volledige uitwerkingen mogen inzien.
Op één leerling (volgens verwachting) na, hebben ze de toets over het onderwerp goed gemaakt. Het cijfer telt mee als PO-cijfer.
Ik laat de leerlingen aan het woord:
- De stof was niet te moeilijk (algemeen).
- Het rekenwerk was goed te doen (algemeen).
- Het was anders dan gewoonlijk, omdat je alles zelf moest uitzoeken.
- Erg lang met de opgaven bezig geweest, omdat we geen antwoordmodellen kregen.
- Je moest nu wel blijven nadenken over de stof.
- Ik begrijp het onderwerp nu wel goed.
- Wel prettig dat je tijdens de les nog iets kon vragen.
- Het bleek een leuk onderwerp te zijn (bijna iedereen merkt dit op).
- De uitleg in het materiaal was soms erg compact.
- Vooral op het eind had ik graag wat meer voorbeelden gehad.
- Soms was het onduidelijk waarom je iets moest toepassen.

> a. $x^2 - 4y^2 = 0$ bestaat uit twee lijnen. Welke?
> b. Beschrijf de figuur met vergelijking
> $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$
> c. Beschrijf de figuur met vergelijking
> $y^2 = y + 6$
>
> Bekijk de vergelijking $x^2 - 6xy + py^2 = 0$ voor elke waarde van p.
> a. Beschrijf de figuur voor $p = 8$, voor $p = 9$ en voor $p = 10$.
> b. Voor welke waarden van p bestaat de figuur met vergelijking $x^2 - 6xy + py^2 = 0$ uit twee lijnen?
>
> Stel een vergelijking op van het lijnenpaar dat bestaat uit de lijnen $3x + 5y = 6$ en $x = 4$.
>
> Stel de algemene vergelijking op van een lijnenpaar waarvan de lijnen richtingscoëfficiënt 1 en -1 hebben. Gebruik twee parameters.

fig. 3 Lijnenparen

Liever vectoren (Dolf van den Hombergh)

In de zestiger jaren had een student wiskunde, zoals ik, voor zijn kandidaatsexamen heel wat natuurkunde gezien. Het handboek voor de natuurkunde dat we gebruikten[2], had een uitgebreide inleiding 'Wiskundige hulpmiddelen in de natuurkunde'. Hierin speelde, buiten de onderwerpen differentiëren en goniometrische functies, het rekenen met vectoren een grote rol. Veel natuurkundige wetten werden met behulp van inproduct of uitproduct geformuleerd. Twee voorbeelden:

> Als een lichaam waarop een kracht F werkt, verschoven wordt over een vector s, dan is de verrichte arbeid W het inproduct van F en s : $W = F \cdot s$.
>
> Als een lading Q wordt verplaatst met snelheid $\boldsymbol{v}$ in een magnetisch veld met veldsterkte B, dan werkt daarop de Lorentzkracht gegeven door: $L = Q(v \times B)$.

Toen het wiskundeonderwijs bij de invoering van de Mammoetwet gemoderniseerd werd, kwam vectorrekening inclusief inproduct en uitproduct in het curriculum van Wiskunde II ten koste van onder andere Analytische Meetkunde. Het weer invoeren van Analytische Meetkunde is een stap terug, een doodlopende weg voor iemand die bijvoorbeeld natuurkunde gaat studeren.
Waarom het curriculum met Analytische Meetkunde belasten? Een van de redenen schijnt te zijn het leren van algebraïsche vaardigheden, maar die kun je op zoveel manieren leren. Ook om te leren redeneren, is de meetkunde niet het meest geschikte medium. Veel leerlingen vinden meetkunde leuk, maar er zijn er ook veel die aan meetkunde een hartgrondige hekel hebben. Als er dan zonodig Analytische Meetkunde gedaan moet worden, dan graag gecombineerd met vectorrekening.
Voorbeelden:

> De afstand van een punt tot een vlak is de absolute waarde van het inproduct van een normaalvector van het vlak van lengte 1 met de verschilvector van de plaatsvector van dat punt en de plaatsvector van een willekeurig punt van het vlak. Als je dat in coördinaten uitschrijft, krijg je de bekende afstandsformule van een punt tot een vlak uit de Analytische Meetkunde.
>
> Het uitproduct kun je gebruiken om een vergelijking van een vlak op te stellen of de inhoud van een parallellepipedum uit te rekenen.

Ook hier kunnen leerlingen algebraïsche vaardigheden ontwikkelen. Bij het rekenen met vectoren gebruik je namelijk soortgelijke regels als bij het rekenen met getallen en variabelen! Zo leer je de regels beter begrijpen.

De balans van voors en tegens

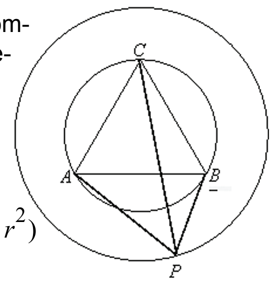
In de Analytische Meetkunde wordt vaak een meetkundige situatie geplaatst in een geschikt te kiezen assenstelsel. Dat is zonder meer nuttig. Bovendien zijn R_2 en R_3 twee goede voorbeelden van vectorruimten. Een kenmerk voor loodrechte stand kan handig zijn; loodrechte stand moet je eerst concreet onderzoeken (met het tekenen van rechthoekige driehoekjes in een gecoördinatiseerd vlak en daarna pas abstract met een inproduct. Het materiaal dat er nu ligt, is goed haalbaar op schoolniveau en is geschikt om rekenen en algebra extra aandacht te geven. Een vervolg met cirkels ligt voor de hand.
De vraag is hoe ver je wilt gaan in de Analytische Meetkunde. Op de HBS eindigde het onderwerp met allerlei stellingen over kegelsneden. Dat was een leuk onderwerp, maar ik denk dat een aanstaande bèta daar weinig aan zal hebben.
Analytische Meetkunde (zoals onderwezen tot 1968) en Vectoren (zoals onderwezen na 1968 in wiskunde II) zijn duidelijk verwant en verschillen voornamelijk in stijl en taal. Wat is een rechte lijn? In de Analytische Meetkunde is $ax + by = c$ een vergelijking van een rechte lijn (a en b niet beide 0); met vectoren wordt dat $\vec{n} \bullet \vec{v} = c$ (met $\vec{n} \neq \vec{0}$). Hoe beschrijf je een bol met straal r en middelpunt M? In de Analytische Meetkunde is dat de verzameling punten (x,y,z) (in een orthonormaal assenstelsel) waarvoor $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Met vectoren wordt dat de verzameling punten X waarvoor $|\overrightarrow{MX}| = r$. Rekenen met vectoren is superieur om de wetten van Kepler te beschrijven en algemeen bij parameterkrommen.

Het tijdschrift *Pythagoras* besteedde nummer 3 van de tweede jaargang (1962) geheel aan vectoren. Daarin trof ik de volgende stelling aan waarbij het gebruik van vectoren haar nut bewijst.

Als men concentrisch met de omgeschreven cirkel van een gelijkzijdige driehoek *ABC* een cirkel trekt met straal *r*, dan geldt voor elk punt *P* van deze cirkel

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3(R^2 + r^2)$$

waarbij *R* de straal is van de omgeschreven cirkel.



Wat waren trouwens de argumenten om in 1958 Analytische Meetkunde als schoolvak in te voeren en in 1968 weer uit het programma te halen?

Leon van den Broek
RSG Pantarijn, Wageningen

Noten

[1] http://www.fi.uu.nl/ctwo/WiskundeD/MateriaalDomeinenWiskundeD/AnalytischeMeetkundeVwo/welcome.html?
[2] Kronig, *Leerboek der natuurkunde*, Scheltema&Holkema, Amsterdam 1966