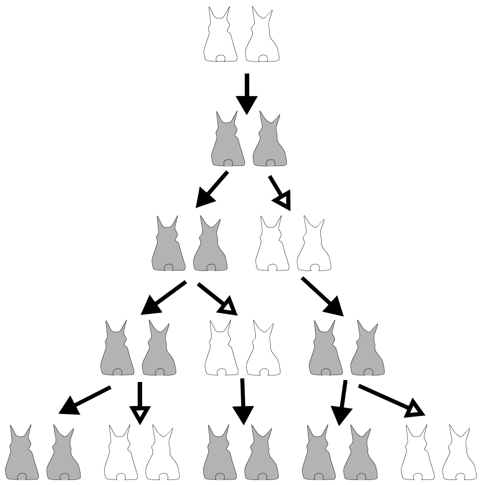
Wat te bewijzen is (35)

Rubriek



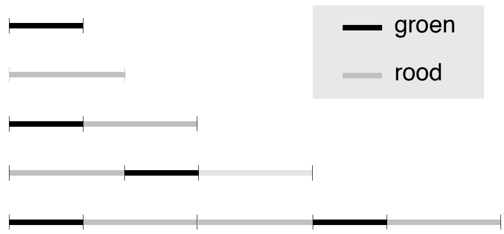
Eindelijk Fibonacci, zal de trouwe lezer van deze rubriek misschien wel verzuchten. Ja en eigenlijk had ik daartoe de vorige aflevering moeten benutten, want 34 is een heus Fibonacci-nummer. Ik heb daar toen niet aan gedacht, maar ik wil niet wachten tot het volgende Fibonacci-getal (rekent u even mee, dat zou bij voortzetting van deze rubriek precies over vijf jaar zijn).
Daar gaan we dan. De konijntjes van Leonardo van Pisa (1170 - 1240), alias Fibonacci (= ‘zoon van de goedzak’) schijnen het eeuwige leven te hebben en dat is maar goed ook, want anders zou de rij

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, …

ergens afbreken. Die rij is een schoolvoorbeeld van recursie en is ook zonder konijntjes, bijen, bloemblaadjes enzovoort, of allerlei combinatorische problemen, in zichzelf intrigerend genoeg. In 1980 werden op de ICME in Berkely T-shirts verkocht met een begin van de rij (tot en met 13) en als je daar getooid in dat shirt, met de borst fier vooruit, op straat liep waren er steevast voorbijgangers die naar de betekenis vroegen of die het volgende getal probeerden te raden. Ik zou er niet tegenop zien om pardoes in een brugklas de eerste zes of zeven Fibonacci-getallen op het bord te schrijven. Ik weet bijna zeker dat veel leerlingen hierdoor uitgedaagd zouden worden om het patroon te ontdekken.
Daar zou ik het dan niet bij laten, want de Fibonacci-rij is een rijke bron van allerlei rekenkundige wetmatigheden. Ik zou bijvoorbeeld kunnen voorstellen om een groepje van zomaar vijf opeenvolgende getallen uit de rij te kiezen, het eerste en laatste getal bij elkaar op te tellen en te letten op het middelste getal van het groepje.
Al gauw zou het vermoeden ontstaan dat de som van de buitenste termen 3 maal de middelste term is.

Gaat dit altijd zo door en hoe kun je dat zeker weten?
Stel dat de klas nog niet behept is met enige kennis van algebra. Een veelbelovende aanpak lijkt het me om dan twee opvolgende getallen uit de rij voor te stellen door lijnsegmenten van verschillende kleur (groen en rood).

Het kortste lijnstuk stelt het eerste getal voor van een rijtje van vijf. Het tweede lijnstuk moet natuurlijk langer zijn dan het eerste, maar hoeveel langer weten we niet. Hoewel ..., als je op de verhouding van twee opvolgende getallen in de rij let, dan lijkt die na wat schommelingen in het begin aardig constant te zijn. Ik maak dat tweede lijnstuk dan maar zo’n beetje 1,6 keer zo lang. De volgende drie lijnstukken kan ik nu met behulp van de optelregel tekenen en zo komt er dit op het bord:



De som van het eerste en het laatste getal kan nu worden voorgesteld door 3 groene en 3 rode lijnstukjes en dat is duidelijk 3 keer zo groot als het middelste getal dat door 1 groen en 1 rood lijnstukje wordt vertegenwoordigd.
Dit is algebra in de stijl van de oude Grieken. Dat zij destijds niet de stap naar het rekenen met letters hebben gemaakt, kan voor ons geen beletsel zijn om dat wel te doen. Noem het eerste lijnstuk a en het tweede b; de volgende drie zijn dan:

$$a + b,\ b + a + b \text{ en } a + b + b + a + b$$

Dit kan op een natuurlijke manier worden verkort tot:

$$a + b,\ a + 2b \text{ en } 2a + 3b$$

Het ‘moderne’ bewijs komt dan neer op:

$$a + 2a + 3b = 3 \times (a + b)$$

Dit zou in vogelvlucht het begin van een serie lessen in algebra kunnen zijn. Waarom doen we vaak zo spastisch bij de invoering van variabelen? De behoefte aan een manier om willekeurige getallen aan te duiden en om daarmee te rekenen of te redeneren is in dit voorbeeld duidelijk aanwezig. Bovendien is er hier iets wezenlijks wiskundigs gebeurd: in één adem worden oneindig veel gevallen behandeld! Ik merk nog dat de hier bewezen eigenschap niet een specialiteit is van de rij van Fibonacci, maar van een familie van rijen, namelijk van alle rijen waarvan elke term de som is van zijn beide voorgangers. Zo’n rij ligt vast door de keus van de eerste twee termen.

Een bekend voorbeeld is de rij van Lucas (1877):

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ...

Het aardige is nog dat zulke Fibonacci-achtige rijen veel meer van dit type 'lineaire eigenschappen' bezitten, zodat er onmiddellijk nog wat geoefend en onderzocht kan worden. Zo geldt bijvoorbeeld dat de som van de eerste en de laatste term van een willekeurig deelrijtje van 9 termen 7 keer de middelste term is, of dat de som van een serie van 6 opvolgende termen in een Fibonacci-achtige rij juist 4 keer de vijfde term in dat rijtje is.

Producten van paren Fibonacci-getallen

Ik keer weer terug naar rijtjes-van-vijf uit de originele Fibonacci-rij. Bijvoorbeeld:

1, 1, 2, 3, **5**, **8**, **13**, **21**, **34**, 55, 89, 144, 233, 377, …

We weten al $5 + 34 = 3 \times 13$.

Er is ook een mooi verband tussen het product van de buitenste termen en de middelste term: $5 \times 34 = 13^2 + 1$.

Dat is nog niet alles, want ook: $8 \times 21 = 13^2 - 1$

Je zou kunnen zeggen: 13 is bijna-middelevenredig tussen 5 en 34 en tussen 8 en 21. Dit blijkt voor elk Fibonacci-getal te gelden: het is bijna-middelevenredig tussen zijn twee buren (met dien verstande dat de afwijking beurtelings + 1 en −1 is) en tussen de buren van zijn buren (ook weer met van teken wisselende afwijking).

Voor het bewijs van deze eigenschappen probeer ik weer de strategie met het willekeurige deelrijtje:

$$..., a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b, ...$$

Let eerst op de eerste drietermen. Het verschil D van het product van a en $a + b$ met het kwadraat van de tussenterm b, is gelijk aan $a^2 + ab - b^2$.

Nu bij de volgende drie termen:

$$D_+ = b(a + 2b) - (a + b)^2 = -a^2 - ab + b^2$$

En ziedaar: $D_+ = - D$.

De Fibonacci-rij start met $a = b = 1$ en dit ingevuld in $a^2 + ab - b^2$ geeft $D = 1$. Bij elke stap naar het volgende tripel, verandert de 'D' van teken, zodat de D-waarde de hele rij door blijft schommelen van +1 naar −1, naar +1, naar −1, enzovoort.

Voor een rijtje van vijf vind ik:

$$a(2a + 3b) - (a + b)^2 = a^2 + ab - b^2$$

en daarvan weten we intussen dat het gelijk is aan 1 of −1.

De genoemde eigenschappen zijn niet precies zo geldig voor alle Fibonacci-achtige rijen; de startgetallen a en b moeten immers voldoen aan $a^2 + ab - b^2 = \pm 1$. Bij andere Fibonacci-achtige rijen moet de ±1 worden vervangen door een andere van teken wisselende constante. Zo geldt voor de Lucas-rij dat het verschil tussen het kwadraat van een term en het product van zijn buren steeds ±5 is.

Als we de 'echte' rij van Fibonacci aanduiden met

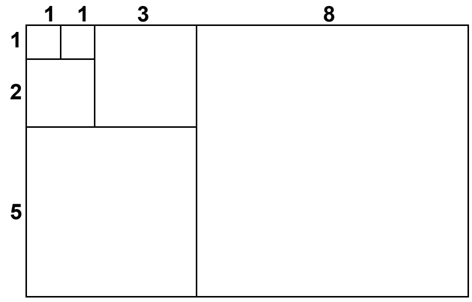
$$F_0, F_1, F_2, F_3, \dots$$

dan geldt voor $n = (1), 2, 3, 4, ...$

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^{n+1} = F_n^2 - F_{n-2}F_{n+2}$$

Het gulden-snede getal

Een bekende aanschouwelijke manier om de Fibonacci-getallen te presenteren is de volgende:



Begin met een vierkant van 1 bij 1 en plak daar eenzelfde vierkant aan vast. Plak aan de zo ontstane rechthoek (van 1 bij 2) een vierkant vast aan de lange zijde, zo komt er een rechthoek van 2 bij 3. Plak aan de lange zijde daarvan weer een vierkant vast, enzovoort, enzovoort. Dat zowel de lengte- als de breedtegetallen tot de rij van Fibonacci behoren is vanzelfsprekend.

De vorm van de rechthoek benadert na enkele stappen al de vorm van de zogeheten *gulden rechthoek,* dat is de rechthoek waarvan breedte en lengte zich verhouden als 1 en τ met $\tau = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1,6180339\dots$

Tussen twee haakjes: het scherm van een TI-83 heeft de afmetingen 3,9 bij 6,3 cm, dus lengte en breedte verhouden zich als de opvolgende Fibonacci-getallen 13 en 21.

Dat de verhouding van twee opvolgende Fibonacci-getallen op den duur vrijwel gelijk aan het gulden-snede-getal τ is, kan bijvoorbeeld aldus worden begrepen.

Als a en b twee opvolgende Fibonacci-getallen zijn, geldt

$$\left|a^2 + ab - b^2\right| = 1$$

Hieruit volgt na deling door a^2:

$$\left|\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a} - 1\right| = \frac{1}{a^2}$$

Nu is het duidelijk dat de termen van de Fibonacci-rij onbeperkt groter worden, zodat het rechterlid van deze vergelijking onbeperkt dicht bij nul komt.

Daaruit volgt dan dat het quotiënt b / a naar het positieve nulpunt van de veelterm $t^2 - t - 1$ convergeert, en dat is nu juist het getal τ.

Hierbij merk ik op dat deze eigenschap geen privilege is van de Fibonacci-rij, maar dat zij voor alle Fibonacci-achtige rijen geldt. Het enige verschil in de bewijsvoering is dat het getal 1 in het rechterlid wordt vervangen door een ander vast getal.

Fibonacci-hyperbolen

De paren opvolgende termen van de Fibonacci-rij voldoen afwisselend aan de vergelijkingen:

$$x^2 + xy - y^2 = \pm 1$$

Deze vergelijkingen worden in een Oxy-vlak gerepresenteerd door twee (orthogonale) hyperbolen, waarvan de asymptoten de lijnen $y = \tau x$ en $y = (1 - \tau)x$ zijn.

In het blad *The Mathematical Intelligencer* (volume 28) vond ik een leuk stukje van de Fibonacci-kenner Irving Adler. Hij laat daarin zien dat het hyperbolenpaar

$$x^2 - 3xy + y^2 = \pm 1$$

de 'Fibonacci-punten' (1, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 8), ... en (dan vanzelf) ook (2, 1), (3, 1), (5, 2), (8, 3),... , kortom alle punten (F_n, F_{n+2}) en (F_n, F_{n-2}) bevat.
Inderdaad, rekening houdend met de eerder hier gesignaleerde eigenschappen, te weten
$F_{n-2} + F_{n+2} = 3F_n$ en $F_{n-2}F_{n+2} = F_n^2 + (-1)^n$
komt er na substitutie $x = F_n$ in het linkerlid van de hyperboolvergelijking:

$$F_n^2 - 3F_n y + y^2 =$$
$$F_{n-2}F_{n+2} + (-1)^n - (F_{n-2} + F_{n+2})y + y^2 =$$
$$(y - F_{n-2})(y - F_{n+2}) + (-1)^n$$

Dit was min of meer de aanpak van Adler.
Zijn artikeltje inspireerde mij tot een verder onderzoek van de Fibonacci-rij. Het leuke van zo'n activiteit is dat je een aantal verschillende wegen inslaat, die resultaten opleveren die achteraf slechts bakens blijken te zijn geweest op weg naar een eindresultaat. Dat bestaat in dit geval uit een oneindige rij paren hyperbolen waarvan de roosterpunten in het eerste kwadrant, Fibonacci-coördinaten hebben. Hier komt een begin van die rij vergelijkingen met daarachter de serie roosterpunten, waarbij ik me heb beperkt tot die met $x \le y$,

$x^2 + xy - y^2 = \pm 1$	(1,1), (1,2), (2,3) , (3,5), ...
$x^2 - 3xy + y^2 = \pm 1$	(1,2), (1,3), (2,5) , (3,8), ...
$x^2 + 4xy - y^2 = \pm 4$	(1,3), (1,5), (2,8) , (3,13), ...
$x^2 - 7xy + y^2 = \pm 9$	(1,5), (1,8), (2,13) , (3,21), ...
$x^2 + 11xy - y^2 = \pm 25$	(1,8), (1,13), (2,21) , (3,34), ...
$x^2 - 18xy + y^2 = \pm 64$	(1,13), (1, 21), (2,34) , (3,55), ...
enzovoort	

Hoezovoort?

- Wel, de getallen achter het plus-minusteken in het rechterlid zijn juist de kwadraten van de getallen in de Fibonacci-rij.
- De coëfficiënten van *xy,* afwisselend positief en negatief, zijn in absolute waarde gelijk aan $F_{n-1} + F_{n+1}$ voor n = 0, 1, 2, ... (en met $F_{-1} = 0$); merk op dat dit juist de getallen van de Lucas-rij zijn.
- De coördinatenparen vertonen achtereenvolgens een sprong van 1, 2, 3, 4, ... in de Fibonacci-rij.

Narekenen en constateren dat het klopt, geeft uiteraard noch zekerheid, noch inzicht. Laat staan dat het de herkomst van de vergelijkingen onthult.

Van groeifactor naar hyperboolvergelijking

De Fibonacci-rij heeft een 'quasi-exponentieel' karakter: de groeifactor is variabel, maar convergeert naar τ. Daaruit volgt de convergentie van de tweestapsgroeifactor naar τ^2, van de driestapsgroeifactor naar τ^3, enzovoort.
Nu geldt: $\tau^2 = \tau + 1$, $\tau^3 = \tau^2 + \tau = 2\tau + 1$, $\tau^4 = 2\tau^2 + \tau = 3\tau + 2$, $\tau^5 = 3\tau^2 + 2\tau = 5\tau + 3$, ...
Mer volledige inductie is eenvoudig te bewijzen dat:

$$\tau^n = F_n\tau + F_{n-1}$$

Op de vorige bladzijde is er een verband gelegd tussen de vergelijking $x^2 + xy - y^2 = \pm 1$ en de veelterm $t^2 - t - 1$ met zijn positieve nulpunt τ.
De vergelijking van Adler kan op analoge wijze in verband worden gebracht met de veelterm $t^2 - 3t + 1$; het positieve nulpunt van dit polynoom is $\tau + 1$ ofwel τ^2.
Nu draai ik de zaak om en maak een tweedegraadsveelterm met gehele coëfficiënten en nulpunt τ^3 (= $2 + \sqrt{5}$).
Zo'n veelterm is $(t-2)^2 - 5$ ofwel $t^2 - 4t - 1$.
Vervang ik nu t door y / x dan ontstaat na vermenigvuldiging met $-x^2$ juist de vorm in het linkerlid van de derde Fibonacci-hyperbool in de tabel.
Nu algemeen:

$$\tau^n = F_n\tau + F_{n-1} = \tfrac{1}{2}F_n + F_{n-1} + \tfrac{1}{2}F_n\sqrt{5}$$

De 'karakteristieke veelterm' van τ^n is:

$$(t - \tfrac{1}{2}F_n - F_{n-1})^2 - \tfrac{5}{4}F_n^2$$

Uitwerking van deze vorm levert op:

$$t^2 - (F_{n-1} + F_{n+1})t + (-1)^n$$

en via $t = y / x$ krijg ik

$$x^2 + (-1)^n(F_{n-1} + F_{n+1})xy + (-1)^{n+1}y^2$$

Daarmee is nog niet het constante rechterlid van de vergelijking gevonden en evenmin het bewijs dat al de coördinatenparen (F_k, F_{k+n+1}) aan de vergelijking voldoen.
Stel $F_k = a$, $F_{k+1} = b$, dan is F_{k+n+1} een lineaire combinatie van a en b, waarvan de coëfficiënten opvolgende Fibonacci-getallen zijn: $F_{k+n+1} = F_{n-1}a + F_n b$
Bewijs? Volledige inductie!
Nu substitueer ik $x = a$ en $y = F_{n-1}a + F_n b$ in bovenstaande vorm en sla aan het rekenen.
Gebruikmakend van

$$1 + (-1)^n F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^n F_n^2$$

en van

$$F_nF_{n+1} - F_{n-1}F_n = F_n^2$$

leidt dit tot

$$(-1)^n F_n^2(a^2 + ab - b^2)$$

Hiermee heb ik als Grimms kleermakertje twee vliegen in één klap geslagen: de constanten in het rechterlid zijn $\pm F_n^2$ en de Fibonacci-coördinatenparen voldoen om en om aan de beide vergelijkingen.

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl