Wat te bewijzen is (34)

Rubriek

De niet meer zo piepjonge lezer zal zich misschien het liedje nog wel herinneren waarvan het refrein begint met:

wat heb ik nou aan algebra,
nu ik voor de keuze sta.

Een piepjonge β-student, gebogen over de meerkeuzevragen van de wiskunde-ingangstoets van een van onze universiteiten of hogescholen zou op dezelfde wijs kunnen neuriën:

nu ik voor de keuze sta,
mis ik wel degelijk algebra

Als de arme abituriënt 's avonds terugblikt op de geleverde wanprestatie, zouden gedachten van spijt en twijfel kunnen bovenkomen.
Zo van: *waarom moest ik altijd maar weer die formulekaart raadplegen? Waarom was ik zo'n GR-junk? En waarom heb ik mijn wiskundeleraar, als ik die bij toeval in de kantine tegen 't lijf liep, niet om meer oefensommetjes gevraagd? Waarom ....?*
En nog wat later:
Maar het is niet alleen mijn eigen schuld. Mijn oude opa heeft mij wel eens een algebraboek laten zien, dat hij als twaalfjarige moest doorworstelen; nou, die sommen die daarin stonden waren nog een stuk ingewikkelder dan die ik vanmiddag voorgeschoteld kreeg. Zou het dan toch waar zijn, wat vorig jaar in alle kranten stond, dat het wiskundeonderwijs op het VWO niks meer voorstelt?
De lezer die denkt dat dit alles ironisch bedoeld is, moet ik (naar keuze) teleur/geruststellen. Hoewel het manco aan algebravaardigheden bij onze leerlingen al jarenlang waarneembaar is, ben ik zeker ook geschokt door de sterk toegenomen ernst ervan. Echter, veel van de 'terug-naar-de-basis-reacties' boezemen mij misschien nog wel meer schrik in:

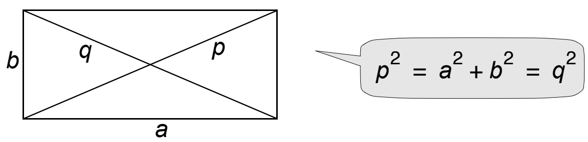
– dat er serieus gedacht wordt dat de klok wel even teruggezet kan worden en bijvoorbeeld de grafische rekenmachine bij het oud vuil moet worden gezet;
– dat het maken van veel stereotiepe rijtjes oefensommen de vaardigheid in algebra omhoog zal stuwen;
– dat, als je maar genoeg sommen maakt, het inzicht vanzelf doorbreekt;
– dat realistisch wiskundeonderwijs moet worden teruggedraaid naar mechanistisch wiskundeonderwijs.
– .....

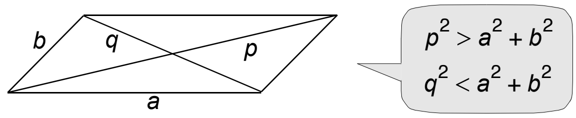
Voorstanders van de 'oefenideologie' overschatten schromelijk de effectiviteit ervan. Ik citeer in dit verband graag Günther Malle [Didaktische Probleme der elementaren Algebra, Vieweg 1993]:

> Ich erinnere mich an zahlreiche Klagen von Lehrern, die nicht verstehen konnten, warum ihre Schüler trotz 'hunderter' Übungsaufgaben immer noch Fehler beim Termumformen oder Gleichunglösen machen.

De 'Übungsaufgaben' waar Malle op doelt, en waar nu weer propaganda voor wordt gemaakt, zijn van het geïsoleerde type en gericht op reproductieve actie. Ik heb er nooit een geheim van gemaakt, dat ik geloof in een andere, meer productieve stijl van oefenen, waarbij de leerling regelmatig wordt uitgedaagd om te denken in plaats van uitsluitend werktuiglijk te handelen en om algebra toe te passen in daarvoor geschikte problemen.

Algebra in de meetkunde
In een vorige aflevering van deze rubriek (26), heb ik al eens expliciet gewezen op de wenselijkheid doorlopend aan algebra te doen. 'Geen week zonder algebra' zou het devies moeten zijn. In de meetkundelessen zijn er talrijke mogelijkheden om algebraïsche activiteiten op te roepen en regels (zoals de merkwaardige producten!) toe te passen. Neem bijvoorbeeld de stelling van Pythagoras.
Ik ga nu even voorbij aan de interessante getaltheoretische kwestie van de zogenaamde Pythagorese drietallen (daarover wellicht in een volgende aflevering), maar richt me op de berekening van lengten van lijnstukken.
Neem de rechthoek met zijden *a* en *b*.
De lengte van de diagonaal kan dan rechtstreeks worden berekend uit de lengten van de zijden. Nu druk ik, als bij de huls van een luciferdoosje, de bovenkant van de rechthoek wat naar opzij, zodat er een parallellogram ontstaat. De ene diagonaal wordt dan langer, de andere korter:

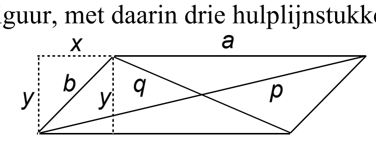




Het verrassende is dat de *som* van de kwadraten van de diagonalen niet verandert. Er geldt namelijk:

$$p^2 + q^2 = 2a^2 + 2b^2$$

Dit kan eenvoudig worden bewezen door twee keer de cosinusregel toe te passen en te gebruiken dat de hoeken aan één zijde van het parallellogram samen 180° zijn.
Maar de cosinusregel behoort niet meer tot de stof van de onderbouw, en de vraag is of deze toch wel intrigerende eigenschap in 2 (of 3) HAVO/VWO behandeld zou kunnen worden. Ik denk dat dit heel goed kan. Kijk naar onderstaande figuur, met daarin drie hulplijnstukken (x, y, y).



Twee keer Pythagoras toegepast, met p en q beurtelings in de rol van schuine zijde, geeft dan:

$$p^2 = (a+x)^2 + y^2$$
$$q^2 = (a-x)^2 + y^2$$

Tel op, gebruik merkwaardige producten en er komt:

$$p^2 + q^2 = 2a^2 + 2x^2 + 2y^2$$

De wetenschap dat

$$x^2 + y^2 = b^2$$

geeft ten slotte het gewenste resultaat.
Ik merk op dat het luciferdoosje ook helemaal plat kan worden gedrukt zodat een ontaard parallellogram ontstaat, waarbij $p = a + b$ en $q = a - b$
De stelling komt nu neer op één regel algebra:

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

Ik maak even een uitstapje naar de 'vectoralgebra' die een tijdlang nogal populair is geweest in de schoolwiskunde.
Laat $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{b}$ vectoren zijn, en $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ hun scalair product.
Het product $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$ kort ik af met $\boldsymbol{a}^2$. Dan geldt er volgens de regels van de lineaire algebra:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = 2\boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{b}^2$$

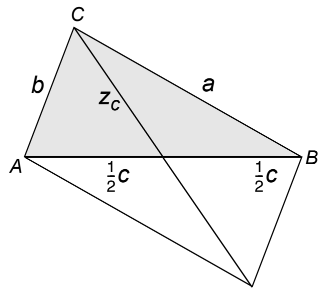
Omdat $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ en $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ de diagonaalvectoren zijn van het parallellogram dat wordt opgespannen door $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{b}$, staat hier in één klap het bewijs van de 'luciferdoos-stelling'.
Dit oogt een stuk efficiënter dan de klassieke aanpak. Maar de lezer moet bedenken dat deze oplossing een stuk abstracter is en dat er meer theorie onder zit (bijvoorbeeld het verband tussen de eigenschappen van het 'inproduct' en de stelling van Pythagoras). Het is een van de misvattingen van de 'New Math' geweest, dat de structuralistische opzet van de wiskunde een didactisch succes zou kunnen zijn. In dit verband herinner ik me de woorden van een Belgische wetenschapsjournalist die mij een interview afnam. Deze afgestudeerde fysicus vertelde mij van drie traumatische ervaringen met de Bourbakistisch georiënteerde wiskunde die hij in het voortgezet onderwijs had doorstaan. Een daarvan was: het bewijs van de stelling van Pythagoras met behulp van het inproduct van vectoren ...

Hoe lang is een zwaartelijn?

Ik kwam op het idee van de stelling over de diagonalen van een parallellogram omdat ik bij een meetkundig vraagstuk, waarbij afstanden een rol speelden, me plotseling uit een ver verleden het bestaan van de zwaartelijnformule herinnerde. In oude schoolboeken kan men die vinden: de lengte van de zwaartelijn uit C in driehoek ABC is bepaald door:

$$z_c^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{4}c^2$$

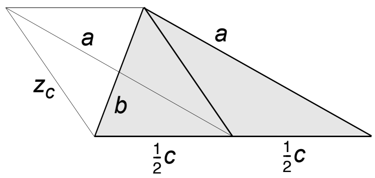
Die formule kan namelijk direct worden afgeleid uit de luciferdoos-stelling door een driehoek met zwaartelijn op te vatten als een langs een diagonaal in tweeën geknipt parallellogram:



Met $p = 2z_c$ en $q = c$ volgt uit $p^2 + q^2 = 2a^2 + 2b^2$ dat:

$$4z_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

en na deling door 4 verschijnt de zwaartelijnformule.
Een aardige alternatieve afleiding is om de zwaartelijn uit C zo te verschuiven dat zijn voetpunt in A belandt, waardoor een ander parallellogram ontstaat:



Omdat de diagonalen van dit parallellogram (met zijden z_c en $\frac{1}{2}c$) de lengte a en b hebben, volgt weer onmiddellijk de zwaartelijnformule.

Het kennen van die zwaartelijnformule paste in de in vroeger jaren zo gecultiveerde 'microscopie' van de driehoek. Het is dan ook niet verwonderlijk dat zij na de drastische sanering van de klassieke meetkunde in 1968, van het toneel is verdwenen. Maar het afleiden ervan kan natuurlijk wel een mooie uitdaging zijn, te meer daar hierbij meetkundig inzicht en algebraïsche vaardigheid samengaan.
Het is dan een waardevolle vervolgactiviteit om die formule nog op enkele merites te bekijken:
– de formule is symmetrisch in a en b, geen wonder;
– als alle zijden van een driehoek met een zelfde factor worden vermenigvuldigd, gebeurt dat ook met de zwaartelijn (de formule is *homogeen*!);
– als de driehoek rechthoekig is mag $a^2 + b^2$ worden vervangen door c^2 en dat leidt tot $z_c = \frac{1}{2}c$, een resultaat dat zo niet reeds bekend, dan toch direct langs meetkundige weg kan worden geverifieerd;
– als de driehoek gelijkbenig is (met $a = b$), vertelt de formule dat $z_c^2 = a^2 - \frac{1}{4}c^2$ en ook dit is meetkundig direct aantoonbaar.

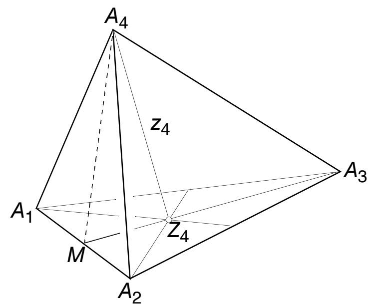
Een ander vervolg kan zijn om een relatie tussen de afstanden van het zwaartepunt Z tot de hoekpunten en de zijden van de driehoek te ontdekken:

$$|ZA|^2 + \left|ZB^2\right| + |ZC|^2 = \tfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Stuk voor stuk zinvolle oefeningen in algebra!

De ruimte in

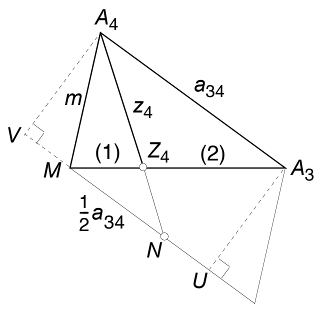
Je zou je nu de vraag kunnen stellen of hier generalisatie mogelijk is. Dat wil zeggen of er een analoge zwaartelijn-formule is in de stereometrie, of een stapje hogerop, in de meerdimensionale meetkunde. Dat lijkt een onderzoekje waard. Wel, het driedimensionale analogon van de driehoek is het viervlak en de zwaartelijn van een viervlak gaat van een hoekpunt van het viervlak naar het zwaartepunt van de overstaande driehoek.



Stel nu de lengte van ribbe $A_jA_k = a_{jk}$ ($j, k = 1,2,3,4, j \neq k$)
Wat is nu een verstandige prognose voor de lengte van z_4? Ik verwacht in elk geval een homogene formule, invariant voor permutaties van de ribben die in A_4 samenkomen en ook voor permutaties van de ribben in het grondvlak. Als het ook kwadraten worden (en dat ligt voor de hand omdat Pythagoras weer op de achtergrond aanwezig is), hoef ik alleen nog de fracties te gokken.
Die zullen toch iets met de dimensie hebben te maken, dus waarom niet 2 vervangen door 3 en 4 (= 2^2) door 9.
Kortom, ik hoop op:

$$z_4^2 = \tfrac{1}{3}(a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2) - \tfrac{1}{9}(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2)$$

Bij de afleiding gebruik ik de hulplijn MA_4 en probeer ik het kwadraat van z_4 uit te drukken in de kwadraten van de zijden van driehoek MA_3A_4.
Als die driehoek wordt uitgebreid tot een parallellogram met diagonaal A_3M, snijdt A_4Z_4 na verlenging de zijde parallel aan A_3A_4 in het midden N, een kwestie van gelijkvormige driehoeken.



Stel nu

$$|MA_4| = m, |MA_3| = p, |NA_4| = q$$

dan volgt, na twee keer de stelling van Pythagoras (in driehoek A_3MU en A_4NV) gevolgd door wat algebra:

$$p^2 + 2q^2 = 1\tfrac{1}{2}a_{34}^2 + 3m^2$$

Omdat $z_4 = \frac{2}{3}q$ volgt hieruit:

$$z_4^2 = \tfrac{1}{3}a_{34}^2 + \tfrac{2}{3}m^2 - \tfrac{2}{9}p^2 \qquad (*)$$

Het is nu nog zaak om m^2 en p^2 uit te drukken in de (kwadraten van) de ribben van het viervlak.
Dat is een louter een kwestie van de tweedimensionale versie van de zwaartelijnformule, achtereenvolgens in de driehoeken $A_1A_2A_4$ en $A_1A_2A_4$.
Resultaat

$$m^2 = \tfrac{1}{2}(a_{14}^2 + a_{24}^2) - \tfrac{1}{4}a_{12}^2$$

en:

$$p^2 = \tfrac{1}{2}(a_{13}^2 + a_{23}^2) - \tfrac{1}{4}a_{12}^2$$

Substitutie in (*) leidt na accuraat algebrawerk inderdaad tot de verhoopte formule.

De zwaartelijn in de simplex

De hier geschetste aanpak kan stapsgewijs worden voortgezet in hogere dimensies. Maar eenmaal op dit niveau aangeland verkies ik de elegantie van de lineaire algebra. Het n-dimensionaal analogon van de driehoek kent de naam *simplex*. Een simplex in de n-dimensionale ruimte heeft n + 1 hoekpunten (die niet in één hypervlak liggen) en $\frac{1}{2}n(n + 1)$ ribben.
Een van die hoekpunten promoveer ik tot oorsprong (O) en de andere hoekpunten laat ik corresponderen met de vectoren $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ... , $\boldsymbol{a}_n$. Het zwaartepunt Z van deze n punten correspondeert dan met:

$$\boldsymbol{z} = \frac{1}{n}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_n)$$

Het kwadraat van de lengte van de zwaartelijn OZ is nu volgens een ‘merkwaardig inproduct’ gelijk aan:

$$\frac{1}{n^2}\sum_k \boldsymbol{a}_k^2 + \frac{2}{n^2}\sum_{k \neq m} \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}_m$$

waarbij k en m de getallen 1, 2, ... , n doorlopen.
Generalisatie van de zwaartelijnformule wil dat dit gelijk zal zijn aan:

$$\frac{1}{n}\sum_k \boldsymbol{a}_k^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{k \neq m} (\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_m)^2$$

Uitwerking van de tweede term geeft:

$$\frac{1}{n^2}\left((n-1)\sum_k \boldsymbol{a}_k^2 - 2\sum_{k \neq m} \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{a}_m\right)$$

en uit:

$$\frac{1}{n} - \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

volgt dat de voorziene vlieger opgaat.
Moraal: *wat er ook in de toekomst met het algebraonderwijs gebeurt, houd de merkwaardige producten in ere!*

Martin Kindt, martin@fi.uu.nl