Op de Nationale Wiskunde Dagen van 2005 gaf **Klaas Landsman** in een gloedvol betoog het antwoord op de vraag of toeval bestaat. In dit artikel geeft hij niet alleen nogmaals het antwoord op die vraag, maar ook op de vraag hoe je van zo'n fascinerend thema onderwijs kunt maken en waarom de gloed in zijn eerste pogingen daartoe nog niet helemaal op volle sterkte straalde.

# Bestaat toeval?

## Inleiding

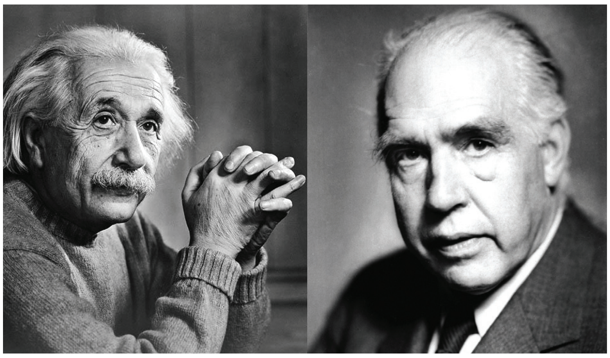
Bestaat toeval? Deze vraag lijkt absurd, omdat iedereen dagelijks met toeval te maken heeft. Neem de eeuwige vraag of de trein op tijd rijdt ('de kans dat een trein van de NS op tijd aankomt is momenteel 84,7% ofwel 0,847'), of de luchthartige opmerking dat de kans dat de komende honderd jaar een planetoïde op aarde inslaat gelijk is aan 0,0014. Dit soort voorbeelden betreffen echter toeval dat wordt veroorzaakt door onwetendheid, oftewel gebrek aan informatie die *in principe* wel beschikbaar is. Neem de trein. De NS weet meestal donders goed of je trein op tijd rijdt of niet; soms, in een royale bui, geven ze dat zelfs op het perron aan. En in de zeldzame gevallen dat de NS het ook niet meer weet, zoals op de beruchte vrijdagavond 25 november 2005 (toen half Nederland, inclusief de auteur van dit artikel, van 17 tot 24 uur op Utrecht CS voor aap stond), hadden ze door het in kaart brengen van alle bomen aan spoorlijnen en het maximale draagvermogen van takken belast met sneeuw, het vooraf berekenen van de windbestendigheid van de seinen en de bekabeling boven het spoor, en alle andere relevante bronnen van informatie in combinatie met een precieze kennis van het weer *in principe* kunnen voorspellen welke treinen zouden uitvallen en wanneer ze weer zouden kunnen gaan rijden[1]. Ook de kans van 0,0014 op een meteoorinslag is een gevolg van onwetendheid, in dit geval over de precieze banen van alle planetoïden rond de zon. De vraag of ons hetzelfde lot wacht als de dinosauriërs zal overigens binnen enkele jaren worden beantwoord: in juni 2006 werd een telescoop op Hawaii in gebruik genomen die de banen zo precies in kaart zal brengen dat men hoopt dat de inslagkans tot nul zal worden teruggebracht (over het alternatief één, dat uiteraard op dit moment niet is uitgesloten, heeft niemand het).
De vraag of toeval bestaat slaat daarom op intrinsiek ofwel *zuiver* toeval, dat per definitie *geen* gevolg is van onwetendheid of gebrek aan informatie. Om helemaal precies te zijn, moeten we eigenlijk ook nog definiëren wat toeval zelf is, zuiver of niet, maar het begrip is intuïtief duidelijk en we kunnen niet aan de gang blijven, temeer daar een bekend Nederlands hoogleraar in de waarschijnlijkheidsrekening van mening is dat een goede definitie van toeval helemaal niet bestaat![2] De vraag of *zuiver* toeval bestaat zal ik in dit artikel gaan beantwoorden, en wel op een manier die in principe goed aan leerlingen uit te leggen zou moeten zijn (of dit ook in de praktijk zo is zal aan het eind blijken ...).

## Waarom toeval?

Maar eerst wil ik kort uitleggen waarom toeval mij een goed onderwerp lijkt om leerlingen wiskundig te prikkelen. Ten eerste is er een continue overgang van toeval in het dagelijks leven naar een eenvoudige wiskundige beschrijving van toeval, en dan naar diepere resultaten. Het antwoord op de vraag of zuiver toeval bestaat, is conceptueel heel diep en een hoogtepunt van de twintigste-eeuwse wetenschap, maar het is wiskundig gezien eenvoudig genoeg om aan VWO-6 uit te leggen. Daarmee wordt wat heet *cutting edge* research toegankelijk gemaakt voor leerlingen; en volgens mensen die het kunnen weten, is dat een goed middel om onze leerlingen enthousiast te maken voor bèta. Verder heeft toeval een lange en interessante geschiedenis[3]. Ik zal daar iets van vertellen, en zelfs uit dat heel weinige zal blijken dat toeval een goed kruispunt is van wiskunde en cultuur. Uiteraard heeft toeval ook nog eens toepassingen in vrijwel alle takken van de wetenschap, en dan zelfs niet eens alleen in de exacte wetenschap, maar ook in psychologie, rechten (men zie het geval Lucia de B.![4]), economie, enzovoort. Ten slotte lijken me pogingen om wie dan ook te boeien voor wat dan ook alleen kansrijk als je zelf iets met het onderwerp hebt. En wie is niet gefascineerd door toeval? Bijna alles wat we meemaken is toevallig, maar toch zit er structuur en een duidelijke lijn in de meeste levens. Is dat niet verbazingwekkend?
Hoe dan ook, er is in de geschiedenis een duidelijk keerpunt aan te wijzen in het denken over toeval. Dat is de twintigste eeuw. Tot die tijd dacht vrijwel iedereen dat toeval uitsluitend een gevolg kon zijn van onwetendheid en menselijke onvolmaaktheid. Tot de wetenschappelijke revolutie in de zeventiende eeuw was het: 'de mens wikt, God beschikt'. God wist alles en toeval zou een beledi-

ging zijn voor zijn alwetendheid en volmaaktheid. Alles *is* dus bepaald, alleen weten wij mensen niet *hoe* het bepaald is. Vervolgens kwam er een natuurkundig argument: de wetten van Newton maken het in principe mogelijk de toekomst te voorspellen. Maar omdat wij de begincondities niet precies kennen en ook niet goed genoeg kunnen rekenen en voorspellen, denken wij als illusie dat veel gebeurtenissen toevallig zijn. Dit argument is gek genoeg niet afkomstig van Newton zelf, die zeer religieus was en God boven zijn wetten plaatste[5], maar van Laplace. Dat was een zeer zelfverzekerd persoon, die zich als de opvolger van Newton beschouwde en op zekere dag tegen zijn baas Napoleon zei dat hij God niet meer nodig had. De kansrekening werd in ieder geval door alle partijen als iets vulgairs gezien en werd dan ook in eerste instantie ontwikkeld in de context van gokspelen. De eerste gepubliceerde wiskundige verhandeling over kansrekening, *Van rekeningh in spelen van geluck*, werd geschreven door Christiaan Huygens in het midden van de zeventiende eeuw[6] en later zou gek genoeg juist Laplace er ook een belangrijk werk over schrijven. Pas in de twintigste eeuw kwam de gedachte op dat toeval intrinsiek zou kunnen zijn. Dat is vooral aan de opkomst van de kwantummechanica te danken, die de klassieke mechanica van Newton verving[7].

## Het Bohr-Einstein debat



*Albert Einstein (1879 - 1955) en Niels Bohr (1885 - 1962)*

Maar het feit dat deze gedachte opkwam, betekent niet dat deze noodzakelijk juist was! De belangrijkste geleerde die zich daar niet in kon vinden, was Albert Einstein, en zijn grote tegenstander was Niels Bohr. Die beweerde dat processen als radio-activiteit fundamenteel toevallig zijn, waarop Einstein antwoordde dat hij dat alleen maar dacht omdat de juiste theorie nog niet was gevonden. Zij voerden meer dan twintig jaar een debat over de vraag of zuiver toeval bestaat, dat uiteindelijk verzandde en onbeslist eindigde met hun beider dood[8]. Het was wel zo dat de meeste fysici (inclusief toppers als Dirac, Heisenberg en Pauli) Bohr gelijk gaven, maar een echt hard argument was er niet. Een andere fysicus, John Bell, behoorde tot de minderheid die vond dat Einstein gelijk had en toeval dus niet echt bestaat, en dat probeerde hij wiskundig te bewijzen[9].

Een cruciaal inzicht van Bell was dat je aan kansen op enkelvoudige gebeurtenissen niet kunt zien of het toeval echt is of niet. Daarom was het Bohr-Einstein debat ook verzand. Bell begreep dat je moet kijken naar *correlaties*, dus naar kansen dat twee of meer toevallige gebeurtenissen tegelijk plaatsvinden. En daarmee kon hij het debat uiteindelijk, en ironisch genoeg gezien zijn eigen minderheidsstandpunt, beslechten in het voordeel van ... Bohr![10]

## De ongelijkheid van Bell

*John Bell (1928 - 1990)*

Hoe pakte Bell het aan? We beginnen met een eenvoudig voorbeeld van toeval in het dagelijks leven, namelijk een enquête met drie vragen. Het punt dat Bell scoort, lukt helaas niet met een of twee vragen. Men kan denken aan een marktonderzoek in opdracht van Philips, waarin wordt gevraagd of mensen een CD-speler, een DVD-speler, en een televisie hebben. We noemen de drie vragen $A$, $B$ en $C$, en de twee mogelijke antwoorden 'ja' en 'nee' op iedere vraag noteren we als + en –. De marktonderzoekster gaat de markt op en maakt een tabel van de antwoorden die ze krijgt. Die zou er als volgt uit kunnen zien.

| A | B | C |
|---|---|---|
| + | – | – |
| – | + | + |
| – | – | + |
| + | – | – |
| + | + | – |
| + | + | + |
| + | – | – |
| – | – | + |
| – | + | + |
| – | + | – |

Uit die antwoorden bepaalt ze kansen als relatieve frequenties. De kans op $A$, dus de kans dat iemand een CD-speler heeft, is aantal plusjes onder $A$ gedeeld door de lengte van de tabel, tien in dit voorbeeld. Dit geeft $P(A) = 5/10$. Enzovoort. Maar Bell zegt ons dat je naar correlaties moet kijken om uit te vinden of het om zuiver toeval gaat, en het precieze soort correlaties blijkt van de vorm te zijn: de kans dat het antwoord op vraag $A$ verschillend is van vraag $B$ ($P(A \neq B)$). Dat kunnen we ook makkelijk uittellen: uit de tabel volgt:

$$P(A \neq B) = 6/10,\ P(A \neq C) = 8/10,\ P(B \neq C) = 4/10.$$

Wat Bell opviel, is dat nu geldt:

$$P(A \neq C) \leq P(A \neq B) + P(B \neq C) \qquad (1)$$

Dit heet de *ongelijkheid van Bell* en die hebben we nu in een enkele tabel vastgesteld. Bell bewees echter dat hij voor iedere mogelijke tabel geldt. Het bewijs is heel simpel. Laat de tabel lengte $N$ hebben en noteer het aantal keren dat de serie antwoorden +++ voorkomt als #(+++), enzovoort. Dan volgt:

$$P(A \neq C) = \#(++-)/N + \#(+--)/N + \#(--+)/N + \#(-++)/N;$$
$$P(A \neq B) = \#(-+-)/N + \#(+--)/N + \#(+-+)/N + \#(-++)/N;$$
$$P(B \neq C) = \#(++-)/N + \#(-+-)/N + \#(+-+)/N + \#(--+)/N.$$

De ongelijkheid (1) is dan equivalent met
$0 \leq 2(\#(-+-) + \#(+-+))/N$, wat klopt omdat de termen per definitie positief zijn.

## Toeval en informatie

Het toevalskarakter van een dergelijke enquête ligt in het feit dat de uitkomst een kansverdeling bepaalt op de verzameling $\{+++,++-,+-+,-++,+--,-+-,--+,---\}$ van alle mogelijke uitkomsten. In bovenstaand voorbeeld bepaalt de marktonderzoekster deze verdeling uit haar tabel als $P(+++) = 1/10$, $P(++-) = 1/10$, $P(+--) = 2/10$, enzovoort. Bij een onbekend persoon zou je dan kunnen zeggen dat er een kans is van 1/10 dat deze de bewuste apparaten alle drie in huis heeft, enzovoort. Maar in werkelijkheid heeft die persoon een CD-speler of niet: er is helemaal geen sprake van toeval! Vanuit het standpunt van het marktonderzoek is het toeval manifest een gevolg van onwetendheid ofwel gebrek aan informatie. De bovenstaande berekening is daarom een speciaal geval van de volgende stelling:

> Als een toevalsproces wordt veroorzaakt door gebrek aan informatie, dan voldoen de bijbehorende correlaties aan een Bell-ongelijkheid van het type (1).

De precieze vorm van de ongelijkheid hangt af van het aantal variabelen of vragen, maar het geval van drie vragen is voldoende om het idee te illustreren. De aanname dat het toeval door onwetendheid wordt veroorzaakt, houdt in dat de antwoorden op alle vragen al vaststaan voordat deze gesteld worden: er is dus een lijst met antwoorden. In het geval van drie vragen is die lijst $\{+++,++-,+-+,-++,+--,-+-,--+,---\}$. Maar men kent het antwoord niet en dicht iedere mogelijke combinatie van antwoorden $X$ daarom een bepaalde kans $P(X)$ toe. Nu zijn er mensen die zeggen dat ze iets 200% zeker weten, politici bijvoorbeeld. Die mensen hebben trouwens vrijwel altijd ongelijk. Voor dat soort kansen geldt de stelling dan ook niet. Er zijn bepaalde regels waaraan kansen moeten voldoen. De kans op een gegeven gebeurtenis moet bijvoorbeeld tussen 0 en 1 liggen, en de kans op twee gebeurtenissen die elkaar uitsluiten is de som van de kansen op iedere gebeurtenis apart. Dat soort regels kun je, voor kansen die uit onwetendheid voortkomen, afleiden uit de zogenaamde *Dutch Book* stelling[11]. In die stelling wordt precies gemaakt wat toeval door onwetendheid betekent: er wordt namelijk aangenomen dat iemand die gebeurtenissen bepaalde kansen toedicht, bereid is zekere weddenschappen aan te gaan op basis van zijn of haar kansen. Een weddenschap die je altijd verliest, dus onafhankelijk van de uitkomst, heet een Dutch Book. *Heads I win, tails you lose*, bijvoorbeeld. Het blijkt dat iemand je tot een Dutch Book kan dwingen zodra je kansen niet aan de gebruikelijke regels voldoen. Iemand die rationeel wedt, en dus zijn weddenschappen niet bij voorbaat verliest, moet kansen toekennen die aan de regels van de kansrekening voldoen. En zodra je weet dat die regels van toepassing zijn, volgt de ongelijkheid van Bell uit een zelfde soort berekening als zojuist voor drie vragen voorgedaan is. De Dutch Book stelling staat verder los van de Bell-ongelijkheden en is op zich al de moeite waard om aan leerlingen uit te leggen!

De bovenstaande stelling kan als volgt worden omgedraaid:

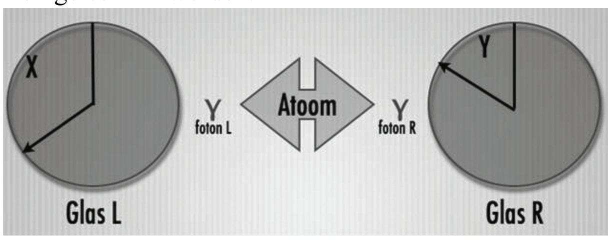
> Als de correlaties van een bepaald toevalsproces de Bell-ongelijkheid schenden, dan kan het toeval geen gevolg zijn van een gebrek aan informatie.

Het toeval is dan zuiver. Om aan te tonen dat een bepaald toeval zuiver is, is het dus voldoende om aan te tonen dat de bijbehorende correlaties de Bell-ongelijkheid schenden.

## De beslissing

Dat klinkt heel eenvoudig, maar het blijkt ongelofelijk moeilijk om een toevalsproces te vinden waarvan je heel precies kunt vaststellen dat het de ongelijkheid van Bell *schendt*. Die schendingen zijn namelijk heel klein, als ze al bestaan. Het idee voor een dergelijk experiment kwam, opnieuw ironisch genoeg, van Einstein zelf (in 1935), maar werd pas veel later (in 1982) uitgevoerd. Einstein wilde (net als Bell) dus juist aantonen dat zuiver toeval *niet* bestaat, maar hij gaf zijn tegenstanders daarmee het gereedschap om op experimenteel gebied hun gelijk te halen.
Het experiment gaat met fotonen, lichtdeeltjes dus, die door een polaroidglas worden gestuurd waarvan de polarisatie-as een gegeven hoek maakt met bijvoorbeeld de $z$-as. De vraag is: wordt het foton doorgelaten? Antwoord: ja of nee. Bij nee wordt het geabsorbeerd, en daar berust de

werking van een polaroid zonnebril op. De reden dat het experiment zo moeilijk is, is dat als het foton onder een hoek $X$ is geabsorbeerd, je het niet meer kunt vragen of het onder hoek $Y$ wordt doorgelaten. Dat kan worden omzeild met een truc die van Einstein afkomstig is: je neemt zogenaamde gecorreleerde fotonparen, dat zijn twee fotonen die zich gedragen als eeneiige tweelingen. Als je ze beide precies dezelfde vraag stelt, geven ze altijd ook precies hetzelfde antwoord. Dat gedrag heet in de natuurkunde een EPR-correlatie, naar Einstein en zijn medewerkers Podolsky en Rosen uit 1935. Dergelijke fotonparen kun je maken in het laboratorium. Je stuurt nu de een naar links en de ander naar rechts, zo ver van elkaar dat de ene meting de andere niet kan beïnvloeden[12]. Dan kun je het linkerfoton vragen of het door een polaroidglas onder hoek $X$ wordt doorgelaten, en het rechterfoton of het onder hoek $Y$ wordt doorgelaten. Op een dergelijke wijze komen correlaties tot stand, waarmee de ongelijkheid van Bell getest kan worden.




*Het experiment van Bell*

## Toeval bestaat!

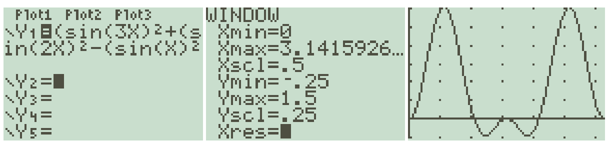
De meetuitkomst is een correlatiefunctie die afhangt van het verschil tussen de hoeken $X$ en $Y$. Als je voor ieder van deze hoeken drie mogelijkheden toelaat, heb je een toevalsproces met drie vragen. Zowel de kwantumtheorie van licht als het experiment geven voor de correlaties de uitkomst:

$$P(X \neq Y) = \sin^2(X - Y) \tag{2}$$

Hier staan $X$, $Y$ en $Z$ dus voor de hoeken $A$, $B$ en $C$. Door een handige keuze van deze drie hoeken blijft een variabele over, en kun je kijken of aan de Bell-ongelijkheid voldaan is. Slim is bijvoorbeeld de keuze $A = 0$, $B = 3x$, $C = x$. De algemene Bell-ongelijkheid (1) wordt dan:

$$0 \leq \sin^2(3x) + \sin^2(2x) - \sin^2(x) \tag{3}$$

Of dit zo is dat de ongelijkheid juist wordt geschonden, kan iedere scholier zo nagaan op de grafische rekenmachine:




*Bell-ongelijkheid op de grafische rekenmachine*

Je kunt $x$ klaarblijkelijk zo kiezen dat de Bell-ongelijkheid is geschonden. Volgens de stelling van daarnet is het onderliggende toeval, dat bepaalt of een enkel foton wordt doorgelaten door een polaroidglas, dus zuiver. Een soortgelijk correlatie-experiment zou volgens de kwantumtheorie ook aangeven dat radio-activiteit door intrinsiek toeval gedreven is, maar dat is helaas nog niet gedaan.

## Vertaling naar het onderwijs

Dat zuiver toeval bestaat, is een fundamenteel resultaat van de moderne wetenschap, met talloze implicaties, van nanotechnologie tot vrije wil. Is het te vertalen naar onderwijs voor het VWO? Ik denk dan aan lesmateriaal zoals een zebra-boekje dat kan dienen als basis voor een profielwerkstuk of een keuzeonderwerp in het veelbelovende nieuwe vak wiskunde D[13]. In ieder geval is het doel om leerlingen met dergelijk materiaal te prikkelen, met de hoop dat ze wiskunde gaan studeren in het achterhoofd... Mijn filosofie daarbij is dat de leerlingen op school meer uitgedaagd moeten worden, vrijwel iedereen vindt dat trouwens tegenwoordig! – en dit project gaat in die richting.
Het tot nu toe gebruikte – obsolete – lesmateriaal is te vinden op de website http://www.dkss.nl/vakdidactiek/serendipity/uploads/Statistiekenkans/toeval.pdf
Dit materiaal werd in het najaar van 2005 gebruikt bij de begeleiding van profielwerkstukken in het kader van het Ratio-project *Wiskundig Denken*[14]. Daartoe kwamen zeven leerlingen zeven middagen (toeval?) uit het hele land naar de Radboud Universiteit Nijmegen. Men ziet dat de leerlingen net als wij in dit artikel beginnen met het oefenen met tabellen met plusjes en minnetjes. Dan bewijzen ze dat voor dergelijke tabellen de Bell-ongelijkheden gelden, waarna ze naar het experiment met fotonen en polaroidglazen overgaan[15]. Als ze handig zijn, kunnen ze dat op school (met behulp van de TOA) tot op zekere hoogte nadoen. Wat in principe tot het project behoort (maar uit tijdgebrek is overgeslagen), is een afleiding van de sinuskwadraatformule (2) die uiteindelijk tot de schending van de Bell-ongelijkheden leidt. De basis daarvoor is een mini-cursus 'kwantumtheorie voor beginners', waarvan de wiskunde bestaat uit de meetkunde van het platte vlak, dus vectoren met lengte en hoeken daartussen, en het inproduct[16]. Het project eindigt in een wolk van marihuanarook, met verbanden tussen Bell-ongelijkheden en de vrije wil. Daar kunnen de leerlingen van maken wat ze willen; in onze groep leidde het tot dolle pret.

***Hoe liep dit af?***
Het positieve dat te melden valt, betreft de trouwe opkomst en de goede sfeer: iedereen is tot het eind blijven komen, soms van verre (bijvoorbeeld Amsterdam). Maar helaas: ondanks hun enthousiasme en goede wil kwamen de leerlingen nauwelijks aan het eigenlijke project toe. Hoe is dat mogelijk? De tekst had wiskundig het juiste niveau en zat goed in elkaar[17], het onderwerp is boeiend, en

de leerlingen deden vrijwillig (en tegen een behoorlijke tijdsinvestering) mee. Eerst dacht ik dat het kwam omdat de leerlingen grote moeite hadden met relatief eenvoudige algebraïsche manipulaties. Om die reden, zo meende ik, was het huiswerk nooit af, werd er voor het bord vaak maar wat geknoeid, enzovoort. Ze bereikten dus niet de fase waarin ze open hadden kunnen staan voor de fascinatie en diepgang van het onderwerp. Op eentje na overigens, die al voor het project begon zeer gemotiveerd was voor dit onderwerp[18].

Maar na een periode van reflectie en discussies met een groot aantal wiskundedocenten en twee vakdidactici is mijn conclusie dat het vooral misging omdat zowel het didactisch concept als de presentatie van het materiaal niet in orde waren. De gebruikte tekst was veel te veel vanuit de universiteit geschreven en sloot niet goed aan bij de bestaande kennis of belevingswereld van de leerlingen[19]. De opgaven waren niet alleen soms algebraïsch lastig; een veel belangrijker euvel was dat ze niet goed in de verhaallijn waren geïntegreerd en daardoor vaak niet tot zinvol nadenken over het geleerde leidden[20]. Bovendien ging het allemaal veel te snel: een zo grote hoeveelheid toch tamelijk lastig en conceptueel diep materiaal kan niet zomaar binnen twee maanden in de arme leerlingenhoofden worden geperst. Aan de lay-out was geen noemenswaardige aandacht besteed, terwijl die kennelijk voor de huidige generatie leerlingen heel belangrijk is. Het is beschamend, maar pas nu heb ik een kijkje genomen in een reeks als *Moderne Wiskunde*[21]. Wat zie ik daar? Geen enkel onderwerp duurt langer dan twee bladzijden. Op iedere bladzijde komen minstens vijf kleuren voor en bovendien staan er altijd wel een paar plaatjes, kadertjes, of andere *special effects*. Inhoudelijk vind ik het maar een saaie (en soms ook misleidende) boel, maar qua geliktheid kan mijn huidige tekst uiteraard niet in de schaduw van een dergelijk boek staan. Dat zet een standaard neer die de leerlingen verwachten, al is het maar schijn.

***De toekomst van het project***

Beter ten halve gekeerd dan ten hele gedwaald! Moet de tekst dan in een formaat worden gebracht dat de leerlingen op het schermpje van hun *iPod 30GB video* af kunnen spelen? Realistischer (maar minstens even veel werk!) is het volgende professionaliseringstraject:

1. Grondige herziening van de tekst met speciaal oog voor didactisch concept, aansluiting op voorkennis en lay-out;
2. Uittesten van deze tekst op een resonansgroep bestaande uit docenten, vakdidactici, studenten en eventueel leerlingen;
3. Opnieuw aanbieden van de herziene tekst aan een groep leerlingen (VWO-6);
4. Eliminatie van laatste kinderziekten en voltooiing.

Dit proces is inmiddels in gang gezet, in samenwerking met Mirte Dekkers en onder vakdidactische begeleiding van Rainer Kaenders. De nieuwe tekst zal in het najaar van 2006 worden ingezet en het is in principe de bedoeling het project ook daarna jaarlijks op de Radboud Universiteit Nijmegen aan te bieden. Leerlingen die in het najaar van 2007 mee willen doen (en dus hun profielwerkstuk in het schooljaar 2007-2008 aan dit onderwerp willen wijden), kunnen mij nu al een mailtje sturen. Uiteraard zijn docenten ook van harte uitgenodigd het materiaal zelf in de klas in te zetten!

*Klaas Landsman*
*Radboud Universiteit Nijmegen (landsman@math.ru.nl)*

## Noten

[1] Het erge van dat soort voorvallen is niet zozeer de vertraging zelf, maar de onzekerheid: kom ik vanavond überhaupt nog wel thuis? Of moet ik in de Jaarbeurs overnachten? Uiteraard is op zo'n moment de batterij van de mobiele telefoon op, of anders wel het beltegoed.

[2] Ronald Meester, *Het pseudoniem van God* (Ten Have, Baarn, 2003).

[3] Ian Hacking, *The emergence of probability : a philosophical study of early ideas about probability, induction and statistical inference* (Cambridge University Press, Cambridge, 1975). Ian Hacking, *The taming of chance* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990). Jan von Plato, *Creating Modern Probability: Its Mathematics, Physics and Philosophy in Historical Perspective* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994). Donald Gillies, *Philosophical theories of probability* (Routledge, London, 2000).

[4] Michiel van Lambalgen en Ronald Meester, Wat zeggen al die getallen eigenlijk? *Nieuwe Wiskrant 24*(4).

[5] A. Rupert Hall, *Isaac Newton: Adventurer in thought* (Cambridge University Press, Cambridge,1992).

[6] Rienk Vermij, *Christiaan Huygens: De mathematisering van de werkelijkheid* (Veen, Diemen, 2004).

[7] Zie Klaas Landsman, *Requiem voor Newton* (Contact, Amsterdam, 2005) voor een populaire geschiedenis. Voor een goed leesbare technische uiteenzetting, zie Bas van Fraassen, *Quantum mechanics: An empiricist view* (Clarendon Press, Oxford, 1991).

[8] Andrew Whitaker, *Einstein, Bohr, and the quantum dilemma* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996). Klaas Landsman, When champions meet: Rethinking the Bohr-Einstein debate. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 37, 212-242 (2006).

[9] Het oorspronkelijke werk van Bell is verzameld in J.S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge,1987). Zijn artikelen zijn echter voor wiskundigen moeilijk te lezen; die kunnen beter te raden gaan bij Van Fraassen (op.cit.).

[10]De overwinning van Bohr wordt door een kleine minderheid van fysici en filosofen aangevochten. Om haar gelijk te halen is deze groep, oorspronkelijk aan-

gevoerd door David Bohm (1917-1992), genoodzaakt de localiteit van de natuurwetten te ontkennen (een eenvoudige versie van dit principe is dat de lichtsnelheid de hoogste signaalsnelheid is). Deze ontkenning is in de kwantumtheorie van eenvoudige systemen nog net vol te houden, maar niet in de fysica als geheel. Om deze reden gaan publicaties van de 'Bohmianen' vrijwel altijd over de natuurkunde van een enkel deeltje. Daar scoren ze dan hun punt, maar vrijwel niemand luistert meer naar ze. Zoals het een sekteleider betaamt, begon Bohm zich in zijn latere jaren overigens steeds meer als een guru te gedragen, die nauwelijks meer met fysici of wiskundigen omging, maar des te meer met personen als Krishnamurti.

[11]Zie bijvoorbeeld de al genoemde boeken van Gillies en Von Plato.

[12]Op dit punt moet men dus een localiteitsaanname doen; vergelijk noot 10.

[13]Het onderwerp past dan zowel in 'Statistiek en kans' als in 'Wiskunde in wetenschap'.

[14]Hierbij werd ik met verve bijgestaan door Evelien Bus.

[15]De *Dutch Book* stelling ontbreekt in deze versie nog.

[16]Dit kan zelfs over de reële getallen; in het algemeen is het wiskundig formalisme van de kwantumtheorie gebaseerd op complexe getallen, maar die zijn niet nodig om het fotonexperiment te begrijpen.

[17]Dat kan ik zelf wel zeggen, maar dit oordeel is bevestigd door een groep studenten aan de lerarenopleiding wiskunde van de TU Delft (TULO), die mijn tekst van hun docent Rainer Kaenders kregen voorgelegd. 'Alles ziet er helder en duidelijk uit' was een typisch commentaar.

[18]Een deel van het project is ook getest op de zogenaamde Nijmeegse Tweedaagse (een wervingsactiviteit voor VWO-5 en -6). Daarin is een hele dag aan het onderwerp besteed. Dat ging beter wat de uitwerkingen betrof, maar opnieuw is het me niet gelukt mijn fascinatie over te brengen. Er was na afloop slechts één vraag: 'Waarom is er niets aan financiële wiskunde gedaan?'

[19]Een treffend commentaar uit Delft was bijvoorbeeld: 'Deze passage is eigenlijk de eerste en laatste keer dat er goed wordt aangesloten bij de voorkennis van de leerlingen.'

[20]Wederom uit Delft: 'Het is echter de vraag of de leerling echt goed inziet wat hij of zij aan het doen is, en of de leerling begrijpt wat er met de betreffende opdracht bewezen of aangetoond wordt.'

[21]En dan uiteraard in het deel over toeval en kansrekening; dat is deel 2 voor VWO bovenbouw wiskunde A1 en B1 (7e editie).