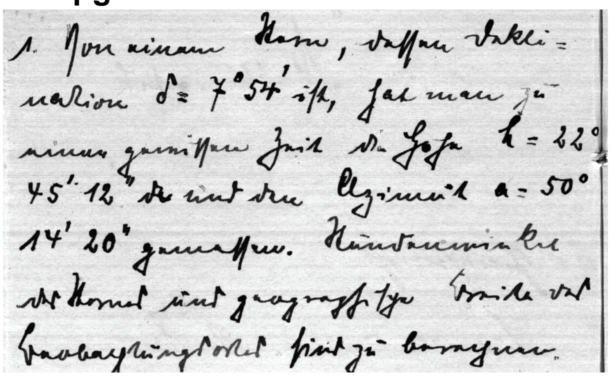
In 1923 deed Hans Freudenthal zijn Reifeprüfung (Abitur), zeg maar eindexamen, op de Friedrichsschule, thans Friedrich-Gymnasium, te Luckenwalde. De originele handschriften bevinden zich in het archief van de school. **Tom Goris** bezocht onlangs de voormalige school van Freudenthal en dat archief. Hij maakte samen met **Jenny-Jeanette Fechner** van dit fraaie tijdsbeeld een leesbaar document.

Het eindexamen wiskunde van Hans Freudenthal

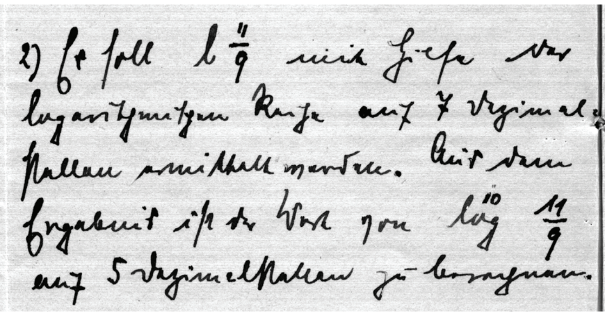
Inleiding

Ingenaaid met de examens van jaargenoten; grote stevige, inmiddels vergeelde vellen papier, zonder lijntjes. De rechterhelft werd beschreven, de linkerhelft was bestemd voor het commentaar van de docent. Het examen is geschreven in het Sütterlin handschrift, dat in de eerste helft van de vorige eeuw op Duitse scholen aangeleerd werd. Dankzij de inspanningen van Jenny-Jeanette Fechner, geschiedenisdocente en degene die de handschriften ontcijferd heeft, en Herr Michael Kohl, de rector van het Friedrich-Gymnasium, mag de *Nieuwe Wiskrant* dit examen integraal publiceren.

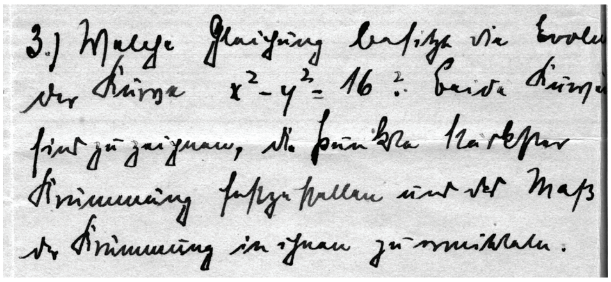
De opgaven



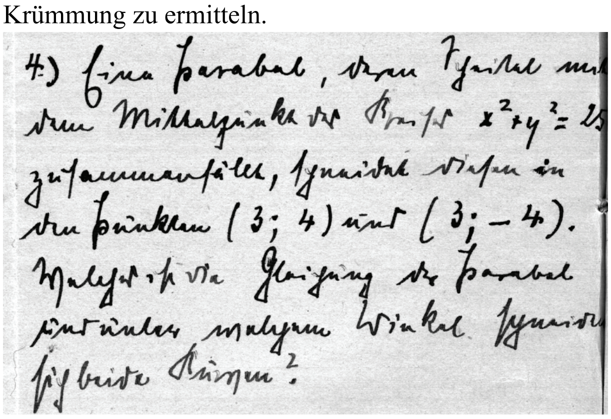
1.) Von einem Stern, dessen Deklination $\delta = 7° 54'$ ist, hat man zu einer gewissen Zeit, die Höhe $h = 22° 45' 12''$ und den Azimut $a = 50° 14' 20''$ gemessen. Stundenwinkel des Sternes und geographische Breite des Beobachtungsortes sind zu berechnen.



2.) Es soll L $\frac{11}{9}$ mit Hilfe der logarithmischen Reihe auf 7 Dezimalstellen ermittelt werden. Aus dem Ergebnis ist der Wert von ${}^{10}\log \frac{11}{9}$ auf 5 Dezimalstellen zu berechnen.



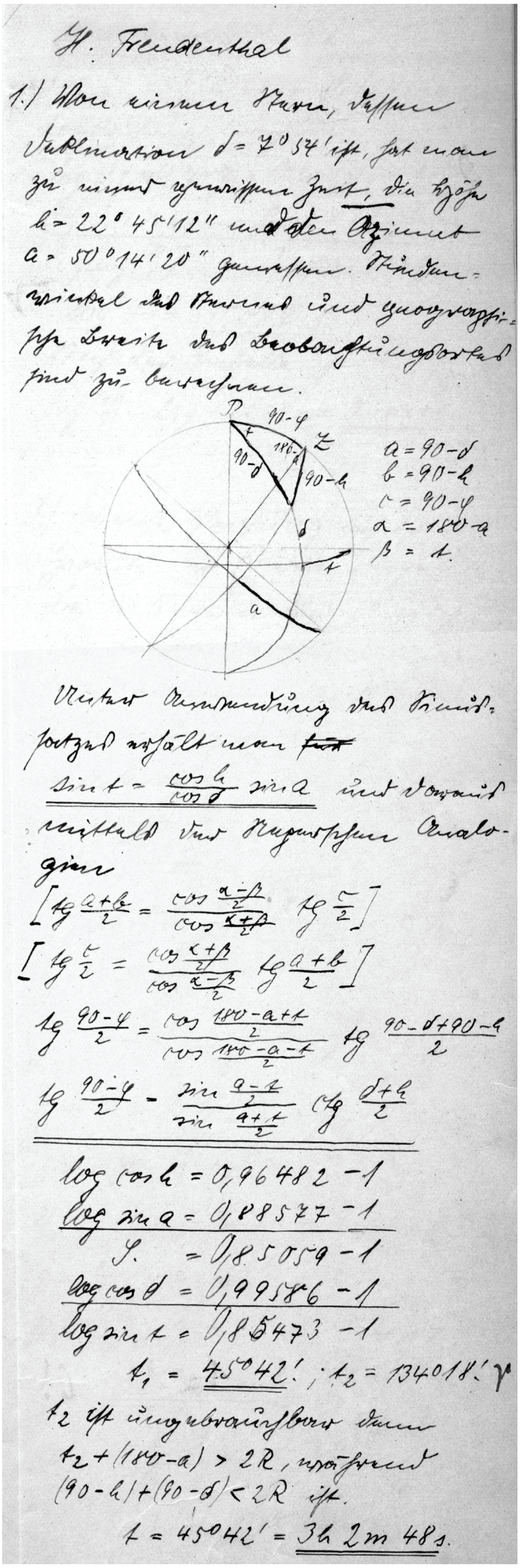
3.) Welche Gleichung besitzt die Evolute der Kurve $x^2 - y^2 = 16$? Beide Kurven sind zu zeichnen, die Punkte stärkster Krümmung festzustellen und das Maß der Krümmung zu ermitteln.



4.) Eine Parabel, deren Scheitel mit dem Mittelpunkt des Kreises $x^2 + y^2 = 25$ zusammenfällt, schneidet diesen in (3; 4) und (3; -4) . Welches ist die Gleichung zur Parabel und unter welchem Winkel schneiden sich diese Kurven?

Het examen

Op de volgende bladzijden ziet u het volledige examen, voorzien van 'vertaling' van de tekst. Ook het schaarse commentaar dat de corrector ernaast geschreven had, is in de rechterkolom verwerkt. Het examen is uiteindelijk met een 'gut' beoordeeld. Een mooie afsluiting van het HF100-jaar...


H. Freudenthal

1.) Von einem Sterne, dessen Deklination $\delta = 7^\circ 54'$ ist, hat man zu einem gewissen Zeit, die Höhe $h = 22^\circ 45' 12''$ und den Azimut $a = 50^\circ 14' 20''$ gemessen. Stundenwinkel des Sterns und geographische Breite des Beobachtungsortes sind zu berechnen.

$a = 90 - \delta$
$b = 90 - h$
$c = 90 - \varphi$
$\alpha = 180 - a$
$\beta = t$

Unter Anwendung des Sinussatzes erhält man ~~t~~ $\sin t = \frac{\cos h}{\cos \delta} \sin a$ und daraus mittels der Napierschen Analogien

$$\left[\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \operatorname{tg}\frac{c}{2}\right]$$

$$\left[\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\right]$$

$$\operatorname{tg}\frac{90-\varphi}{2} = \frac{\cos\frac{180-a+t}{2}}{\cos\frac{180-a-t}{2}} \operatorname{tg}\frac{90-\delta+90-h}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{90-\varphi}{2} = \frac{\sin\frac{a-t}{2}}{\sin\frac{a+t}{2}} \operatorname{ctg}\frac{\delta+h}{2}$$

log cos h = 0,96482 −1
log sin a = 0,88577 −1
S. = 0,85059 −1
log cos δ = 0,99586 −1
log sin t = 0,85473 −1

$t_1 = 45^\circ 42'$; $t_2 = 134^\circ 18'$

t_2 ist unbrauchbar, denn $t_2 + (180 - a) > 2R$, während $(90 - h) + (90 - \delta) < 2R$ ist.

$t = 45^\circ 42' = 3h\ 2m\ 48s$.

H. Freudenthal

1) Van een ster, waarvan de inclinatie $\delta = 7^\circ\ 54'$ is, heeft men op een zeker tijdstip de hoogte $h = 22^\circ\ 45'\ 12''$ en het azimuth $a = 50^\circ\ 14'\ 20''$ gemeten. De uurhoek van de ster en de geografische breedte van de waarnemingsplaats moeten berekend worden.

$a = 90 - \delta$
$b = 90 - h$
$c = 90 - \phi$
$\alpha = 180 - a$
$\beta = t$

Door het toepassen van de sinusregel vindt men

$$\sin t = \frac{\cos h}{\cos \delta} \sin a$$

en hieruit met behulp van Napierse vergelijkingen:

$$\left[\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \operatorname{tg}\frac{c}{2}\right]$$

$$\left[\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\right]$$

$$\operatorname{tg}\frac{90-\varphi}{2} = \frac{\cos\frac{180-a+t}{2}}{\cos\frac{180-a-t}{2}} \operatorname{tg}\frac{90-\delta+90-h}{2}$$

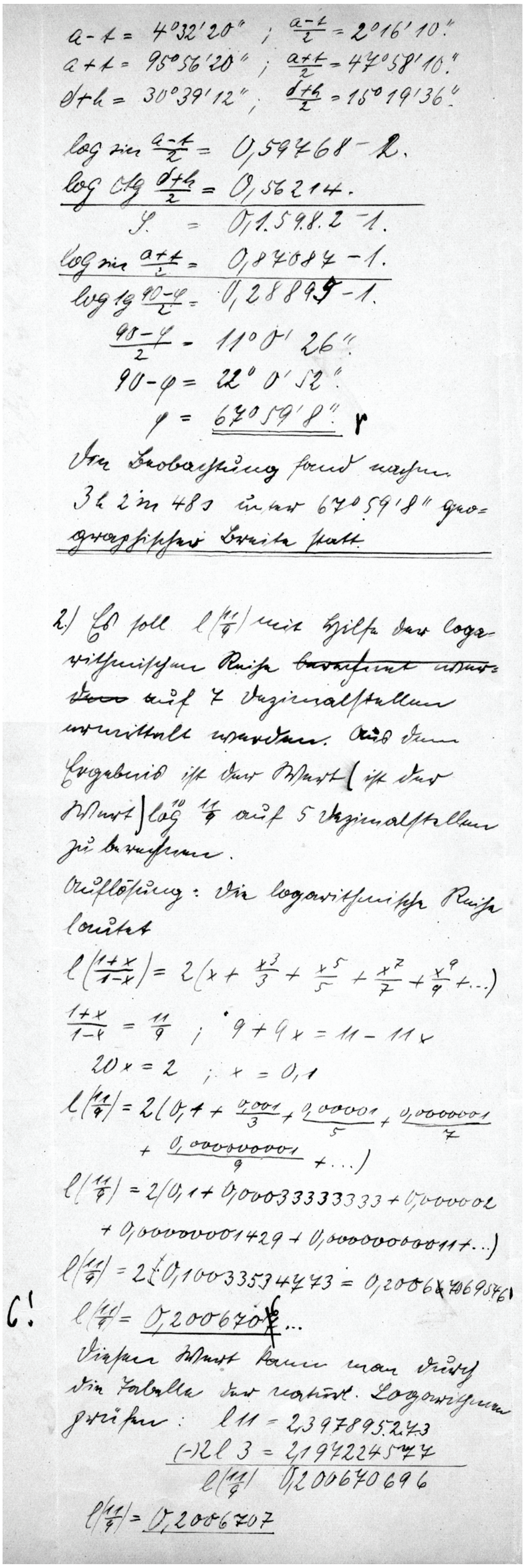
$$\operatorname{tg}\frac{90-\varphi}{2} = \frac{\sin\frac{a-t}{2}}{\cos\frac{a+t}{2}} \operatorname{ctg}\frac{\delta+h}{2}$$

log cos h = 0,96482 - 1
log sin a = 0,88577 - 1
$S.$ = 0,85059 - 1
log cos δ = 0,99586 - 1
log sin t = 0,85473 - 1

$t_1 = 45^o42'$; $t_2 = 130^o18'$

t_2 is onbruikbaar omdat
$t_2 + (180 - a) > 2R$, omdat
$(90 - h) + (90 - \delta) < 2R$ is.

$t = 45^\circ\ 42' = 3h\ 2m\ 48s$


$a-t = 4^\circ 32'20''$; $\frac{a-t}{2} = 2^\circ 16'10''$
$a+t = 95^\circ 56'20''$; $\frac{a+t}{2} = 47^\circ 58'10''$
$\delta+h = 30^\circ 39'12''$; $\frac{\delta+h}{2} = 15^\circ 19'36''$

$\log \sin \frac{a-t}{2} = 0{,}59768 - 2$
$\log \operatorname{ctg} \frac{\delta+h}{2} = 0{,}56214$
$S = 0{,}15982 - 1$
$\log \sin \frac{a+t}{2} = 0{,}87087 - 1$
$\log \operatorname{tg} \frac{90-\varphi}{2} = 0{,}28895 - 1$
$\frac{90-\varphi}{2} = 11^\circ 0'26''$
$90-\varphi = 22^\circ 0'52''$
$\varphi = \underline{67^\circ 59'8''}$

Der Beobachtung fand nachm. 3h 2m 48s unter 67°59'8" geographischer Breite statt.

2) Es soll $l(\frac{11}{9})$ mit Hilfe der logarithmischen Reihe ~~berechnet werden~~ auf 7 Dezimalstellen ermittelt werden. Aus dem Ergebnis ist der Wert (ist der Wert) $\log^{10} \frac{11}{9}$ auf 5 Dezimalstellen zu berechnen.

Auflösung: Die logarithmische Reihe lautet

$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \ldots\right)$

$\frac{1+x}{1-x} = \frac{11}{9}$; $9 + 9x = 11 - 11x$

$20x = 2$; $x = 0{,}1$

$l(\frac{11}{9}) = 2\left(0{,}1 + \frac{0{,}001}{3} + \frac{0{,}00001}{5} + \frac{0{,}0000001}{7} + \frac{0{,}000000001}{9} + \ldots\right)$

$l(\frac{11}{9}) = 2(0{,}1 + 0{,}00033333333 + 0{,}000002 + 0{,}00000001429 + 0{,}00000000011 + \ldots)$

$l(\frac{11}{9}) = 2(0{,}10033534773 = 0{,}2006\cancel{7}0695461$

C! $l(\frac{11}{9}) = \underline{0{,}200670\cancel{7}}\ldots$

Dieser Wert kann man durch die Tabelle der natürl. Logarithmen prüfen: $l\,11 = 2{,}397895273$
$(-)2l\,3 = 2{,}197224577$
$l(\frac{11}{9})\ 0{,}200670696$

$l(\frac{11}{9}) = \underline{0{,}2006707}$

$a - t = 4^{\circ}32'20''$; $\frac{a-t}{2} = 2^{\circ}16'10''$
$a + t = 95^{\circ}56'20''$; $\frac{a+t}{2} = 47^{\circ}58'10''$
$\delta + h = 30^{\circ}39'12''$; $\frac{\delta+h}{2} = 15^{\circ}19'36''$

$\log\sin \frac{a-t}{2} = 0{,}59768 - 2$

$\log\operatorname{ctg} \frac{\delta+h}{2} = 0{,}56214$
$S = 0{,}15982 - 1$
$\log\sin \frac{a+t}{2} = 0{,}87087 - 1$

$\log\operatorname{tg} \frac{90-\varphi}{2} = 0{,}28895 - 1$

$\frac{90-\varphi}{2} = 11^{\circ}0'26''$
$90 - \phi = 22^{\circ}0'52''$
$\phi = \underline{\underline{67^{\circ}59'8''}}$

De waarneming vond 's middags 3h 2m 48s plaats op 67° 59′ 8′′ geografische breedte.

2.) ln ($\frac{11}{9}$) moet met behulp van de logaritmische reeks op 7 decimalen nauwkeurig berekend worden. Met behulp van het resultaat moet log $\frac{11}{9}$ op 5 decimalen nauwkeurig berend worden.

Oplossing: de logaritmische reeks is:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \ldots\right)$$

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{11}{9} \quad ; \quad 9 + 9x = 11 - 11x$$

$$20x = 2 \quad ; \quad x = 0{,}1$$

$$\ln(\tfrac{11}{9}) = 2\left(0{,}1 + \frac{0{,}001}{3} + \frac{0{,}00001}{5} + \frac{0{,}0000001}{7} + \frac{0{,}000000001}{9} + \ldots\right)$$

$$\ln(\tfrac{11}{9}) = 2(0{,}1 + 0{,}00033333333 + 0{,}000002 + 0{,}00000001429 + 0{,}00000000011 + \ldots)$$

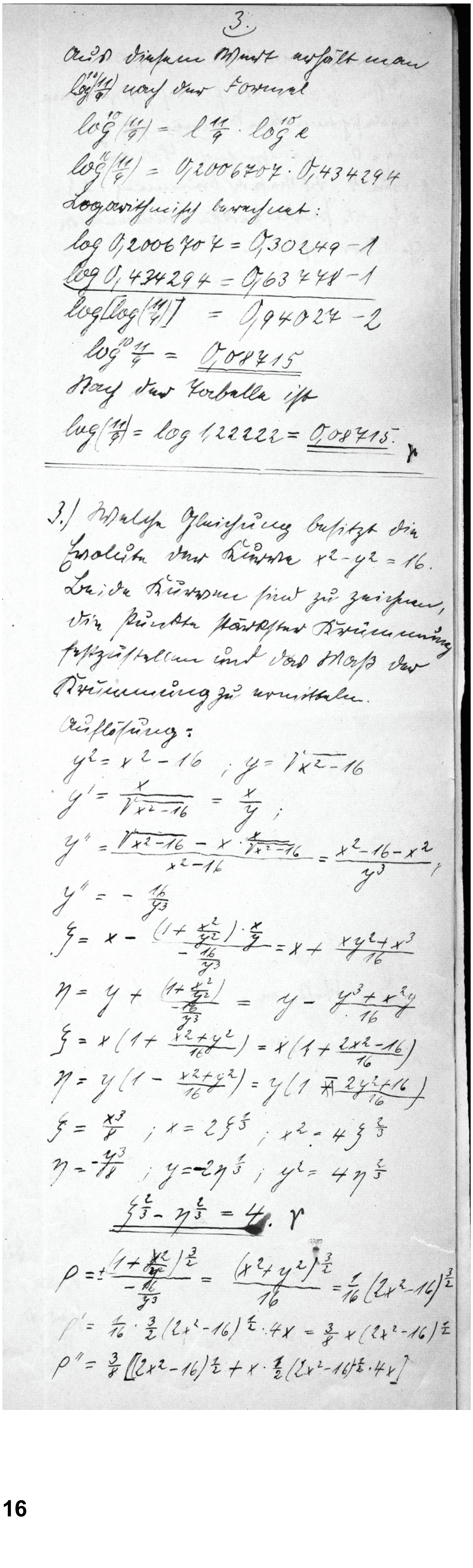
$$\ln(\tfrac{11}{9}) = 2(0{,}10033534773 = 0{,}2006\cancel{6}70695461$$

$\ln(\frac{11}{9}) = 0{,}2006707\ldots$ (De corrector heeft van de 7 een 6 gemaakt...)

Deze uitkomst kan men met behulp van de tabellen voor de natuurlijke logaritme bewijzen:

$\ln 11 = 2{,}397895273$
$(-)2\ln 3 = 2{,}197224577$
$\ln(\frac{11}{9})\ \ 0{,}200670696$

$\ln(\frac{11}{9}) = 0{,}2006707$


3.

Aus diesem Wert erhält man $\log^{10}(\frac{11}{9})$ nach der Formel

$\log^{10}(\frac{11}{9}) = l\frac{11}{9} \cdot \log^{10} e$

$\log^{10}(\frac{11}{9}) = 0{,}2006707 \cdot 0{,}434294$

Logarithmisch berechnet:

$\log 0{,}2006707 = 0{,}30249 - 1$

$\log 0{,}434294 = 0{,}63778 - 1$

$\log[\log(\frac{11}{9})] = 0{,}94027 - 2$

$\log^{10}\frac{11}{9} = \underline{0{,}08715}$

Nach der Tabelle ist

$\log(\frac{11}{9}) = \log 1{,}22222 = \underline{\underline{0{,}08715}}$

3.) Welche Gleichung besitzt die Evolute der Kurve $x^2 - y^2 = 16$. Beide Kurven sind zu zeichnen, die Punkte stärkster Krümmung festzustellen und das Maß der Krümmung zu ermitteln.

Auflösung:

Uit deze uitkomst haalt men log $(\frac{11}{9})$ met de formule:

log $(\frac{11}{9})$ = ln $(\frac{11}{9})$ · log e

log $(\frac{11}{9})$ = 0,2006707 · 0,434294
logaritmisch berekend:
log 0,2006707 = 0,30249 – 1
log 0,434294 = 0,63778 – 1

log (log $(\frac{11}{9})$) = 0,94027 – 2

log $\frac{11}{9}$ = 0,08715
Volgens de tabel is:

log $\frac{11}{9}$ = log 1,22222 = $\underline{\underline{0{,}08715}}$

3.) Welke vergelijking heeft de omhullende van de kromme $x^2 - y^2 = 16$. Teken beide krommen, bepaal de punten met de sterkste kromming en bereken de grootte van die kromming.

Oplossing:

$$y^2 = x^2 - 16 \quad ; \quad y = \sqrt{x^2 - 16}$$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}} = \frac{x}{y} \quad ;$$

$$y'' = \frac{\sqrt{x^2 - 16} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}}}{x^2 - 16} = \frac{x^2 - 16 - x^2}{y^3}$$

$$y'' = -\frac{16}{y^3}$$

$$\xi = x - \frac{(1 + x^2/y^2) \cdot x/y}{-16/y^3} = x + \frac{xy^2 + x^3}{16}$$

$$\eta = y + \frac{(1 + x^2/y^2)}{-16/y^3} = y - \frac{y^3 + x^2 y}{16}$$

$$\xi = x\left(1 + \frac{x^2 + y^2}{16}\right) = x\left(1 + \frac{2x^2 - 16}{16}\right)$$

$$\eta = y\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{16}\right) = y\left(1 - \frac{2y^2 + 16}{16}\right)$$

$$\xi = \frac{x^3}{8} \quad ; \; x = 2\xi^{1/3} \quad ; \; x^2 = 4\xi^{2/3}$$

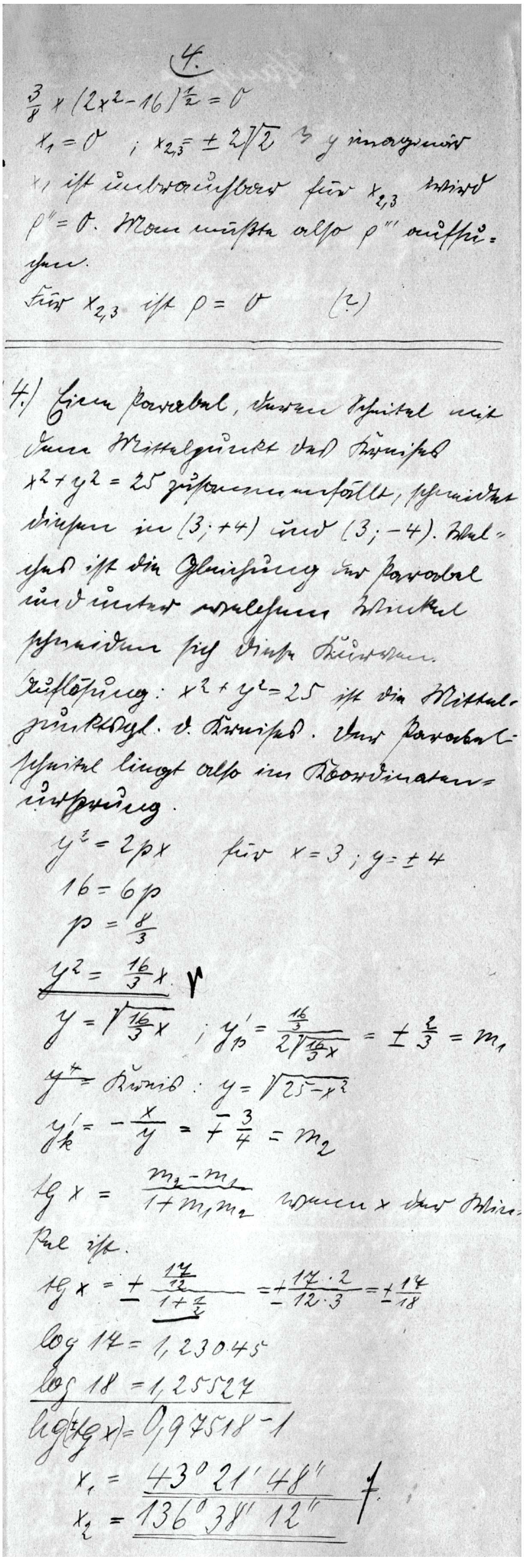
$$\eta = -\frac{y^3}{8} \quad ; \; y = -2\eta^{1/3} \quad ; \; y^2 = 4\eta^{2/3}$$

$$\underline{\underline{\xi^{2/3} - \eta^{2/3} = 4}}$$

$$\rho = \pm\frac{(1 + x^2/y^2)^{3/2}}{-16/y^3} = \frac{(x^2 + y^2)^{3/2}}{16} = \frac{1}{16}(2x^2 - 16)^{3/2}$$

$$\rho' = \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{2}(2x^2 - 16)^{1/2} \cdot 4x = \frac{3}{8}x(2x^2 - 16)^{1/2}$$

$$\rho'' = \frac{3}{8}\left[(2x^2 - 16)^{1/2} + x \cdot \frac{1}{2}\left((2x^2 - 16)^{1/2} \cdot 4x\right)\right]$$


4.

$\frac{3}{8}x(2x^2-16)^{\frac{1}{2}} = 0$

$x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 2\sqrt{2}$; y imaginär

x_1 ist unbrauchbar für $x_{2,3}$ wird $\rho'' = 0$. Man müßte also ρ''' aufsuchen.

Für $x_{2,3}$ ist $\rho = 0$ (?)

4.) Eine Parabel, deren Scheitel mit dem Mittelpunkt des Kreises $x^2 + y^2 = 25$ zusammenfällt, schneidet diesen in $(3;+4)$ und $(3;-4)$. Welches ist die Gleichung der Parabel und unter welchem Winkel schneiden sich diese Kurven.

Auflösung: $x^2 + y^2 = 25$ ist die Mittelpunktsgl. d. Kreises. Der Parabelscheitel liegt also im Koordinatenursprung.

$y^2 = 2px$ für $x = 3$; $y = \pm 4$

$16 = 6p$

$p = \frac{8}{3}$

$y^2 = \frac{16}{3}x$

$y = \sqrt{\frac{16}{3}x}$; $y_p' = \frac{\frac{16}{3}}{2\sqrt{\frac{16}{3}x}} = \pm\frac{2}{3} = m_1$

Kreis: $y = \sqrt{25-x^2}$

$y_k' = -\frac{x}{y} = \mp\frac{3}{4} = m_2$

$\mathrm{tg}\,x = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ wenn x der Winkel ist.

$\mathrm{tg}\,x = \pm\frac{\frac{17}{12}}{1+\frac{1}{2}} = \pm\frac{17 \cdot 2}{12 \cdot 3} = \pm\frac{17}{18}$

$\log 17 = 1{,}23045$

$\log 18 = 1{,}25527$

$\log(\pm\mathrm{tg}\,x) = 0{,}97518 - 1$

$x_1 = 43^\circ 21' 48''$

$x_2 = 136^\circ 38' 12''$

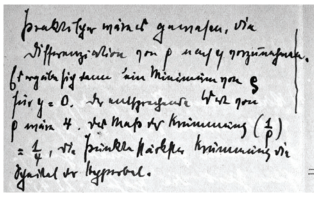
$$\frac{3}{8}x(2x^2-16)^{1/2} = 0$$

$x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 2\sqrt{2}$ y imaginair

x_1 is onbruikbaar voor $x_{2,3}$ wordt $\rho'' = 0$. Men moet dan ρ''' bepalen.

Voor $x_{2,3}$ is $\rho = 0$ (?)

Commentaar corrector:


Praktischer wäre gewesen, die Differentiation von ρ nach y vorzunehmen. Es ergibt sich dann ein Minimum von ρ für $y = 0$. Der entsprechende Wert von ρ wäre 4. Das Maß der Krümmung $(\frac{1}{\rho}) = \frac{1}{4}$, die Punkte stärkster Krümmung die Scheitel der Hyperbel.

Het was handiger geweest om van ρ naar y te differentiëren. Dat levert een minimum van ρ voor $y = 0$. De bijbehorende waarde van ρ is dan 4, de maat van de kromming $(\frac{1}{\rho}) = \frac{1}{4}$, het punt met de sterkste kromming de top van de parabool.

4. Een parabool heeft als top het middelpunt van de cirkel $x^2 + y^2 = 25$ en snijdt deze cirkel in (3,4) en (3,-4). Wat is de vergelijking van deze parabool en met welke hoek snijden deze krommen?

Oplossing: $x^2 + y^2 = 25$ is de middelpuntsvgl. vd. cirkel. De top van de parabool ligt dus in de oorsprong.

$y^2 = 2px$ voor $x = 3$; $y = \pm 4$

$16 = 6p$

$p = \frac{8}{3}$

$y^2 = \frac{16}{3}x$

$$y = \sqrt{\frac{16}{3}x} \quad ; \quad y_p' = \frac{16}{3}/2\sqrt{\frac{16}{3}x} = \pm\frac{2}{3} = m_1$$

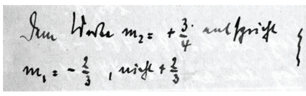
cirkel: $y = \sqrt{25 - x^2}$

$$y_k' = -\frac{x}{y} = \mp\frac{3}{4} = m_2$$

$\mathrm{tg}x = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$, als x de hoek is.

$$\mathrm{tg}x = \pm\frac{17/12}{1 + 1/2} = \pm\frac{17 \cdot 2}{12 \cdot 3} = \pm\frac{17}{18}$$

Commentaar corrector:


Dem Werte $m_2 = +\frac{3}{4}$ entspricht $m_1 = -\frac{2}{3}$, nicht $+\frac{2}{3}$

De waarde $m_2 = +\frac{3}{4}$ geeft

$m_1 = -\frac{2}{3}$, niet $+\frac{2}{3}$

log 17 = 1,23045

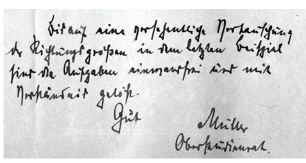
log 18 = 1,25527

$\log(\pm\mathrm{tg}x) = 0{,}97518 - 1$

$x_1 = 43^\circ 21' 48''$

$x_2 = 136^\circ 38' 12''$

Commentaar corrector:


Bis auf eine grundsätzliche Verwechslung der Richtungsgrößen in dem letzten Beispiel sind die Aufgaben einwandfrei und mit Verständnis gelöst.
Gut
Müller
Oberstudienrat

Op een abusievelijke verwisseling van de richtingen in de laatste uitwerking na, zijn de opgaven foutloos en met inzicht gemaakt. Goed.

Müller, Oberstudiënrat

Met in de zijlijn nog de opmerking dat de prestaties in de klas ‘zeer goed’ waren.

Jenny-Jeanette Fechner,

Friedrich-Gymnasium, Luckenwalde, D

Tom Goris,

Freudenthal Instituut & Fontys Lerarenopleiding Tilburg