Een holle en een bolle mok, welke van de twee heeft de grootste inhoud? Dat was de vraag waar **Thomas Banchoff** mee worstelde vlak voordat hij naar de Nationale Wiskunde Dagen kwam. En tevens het antwoord op de vraag of hij een artikel voor de *Nieuwe Wiskrant* wilde schrijven. Omdat hij Nederlands spreekt, was hij zeer benieuwd hoe we de woordspeling in de titel van het artikel zouden gaan vertalen...

Complementary Coffee Cups

Inleiding

Precies op de dag dat ik in mijn college 'integraalrekening' over omwentelingslichamen wilde gaan praten, was het mijn beurt om koffie te zetten. Ik nam twee mokken, een convexe uit Ierland en een concave die in Schotland was gemaakt. Allebei toevallig omwentelingslichamen, als je de oren tenminste buiten beschouwing laat. De profielen van de mokken pasten precies in elkaar; wel zo handig voor het mee naar boven dragen. In een galante bui wilde ik de mok met de meeste koffie aan mijn vrouw geven, maar ja, welke van de twee was dat? Ik kon niet zo eenvoudig zien welke van de twee het grootste volume had. Op dat moment had ik het gevoel dat er een nieuw integraalrekeningsprobleem ontstaan was.

fig. 1 'Complementaire' koffiemokken

Het probleem

Ik waste de mokken af en nam ze mee naar mijn college. Daar vertelde ik mijn studenten bovenstaand relaas en hield een stemming over welke mok het grootste volume had. Er bleek geen consensus te zijn.
Een student kwam met het idee het profiel van de mokken te benaderen met een parabool om vervolgens de formule voor het omwentelingslichaam te gebruiken. Voordat we dat gingen doen, werd er gesuggereerd om eerst maar eens de mokken met water te vullen. En omdat ik water meegenomen had, deden we dat eerst. Tot onze grote verbazing kon je makkelijk het water van de ene in de andere mok gieten, zonder water te verliezen. De mokken bleken, heel praktisch, dezelfde inhoud te hebben.

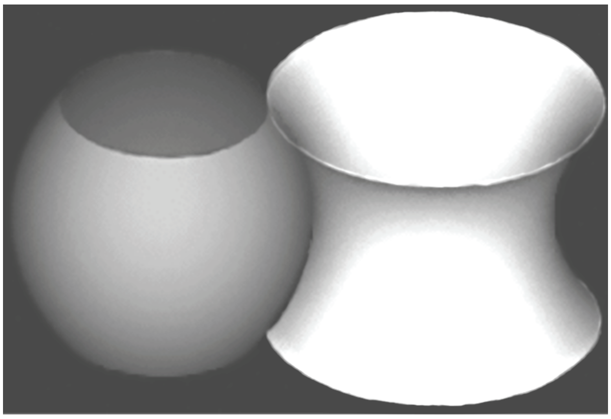

fig. 2 Gesimuleerde koffiemokken

In het college streefden we een theoretisch doel na; het onderzoeken van de eigenschappen van omwentelingslichamen, en nu hebben we een mooi probleem om er aan te werken. Gegeven de profielkromme voor een 'omwentelingsmok' rond een zekere as, waar ligt dan een tweede as, zodat de inhoud van de 'complementaire mok' even groot is als de inhoud van de eerste mok?
Het was duidelijk dat als je de tweede as te dicht bij de eerste kiest, het volume van de tweede mok veel te klein is. Aan de andere kant kun je het volume van de tweede mok zo groot krijgen als je wilt als je de as verder weg kiest. Welke afstand moet je nu nemen?
We formuleerden de voorwaarde van gelijke inhoud met behulp van de formules voor omwentelingslichamen. Traditioneel gezien is het makkelijker om omwentelingslichamen rond de x-as te beschrijven. Daarom beschouwden we een mok die verkregen werd door een positieve functie $f(x)$ op het interval van a tot b te wentelen. De inhoud wordt dan beschreven door de integraal van a tot b van de verticale oppervlaktes rondom x, van $\pi(f(x))^2$ dus.
De complementaire mok kan dan beschreven worden door dezelfde kromme te wentelen rond de horizontale lijn $y = k$, voor zekere k. De oppervlakte van een verticale doorsnede wordt daar dan $\pi(k - (f(x))^2$. De vraag wordt

dan: bij welke k zijn de volumes van beide mokken hetzelfde?
Het probleem was nu niet moeilijk meer:

$$\pi\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x = \pi\int_a^b (k-f(x))^2\mathrm{d}x$$

$$= \pi k^2(b-a) - 2k\pi\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \pi\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x$$

Daaruit volgt dat ofwel $k = 0$ – maar dat is een triviale oplossing – ofwel dat:

$$k(b-a) = 2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Dit betekent dat de oppervlakte van de rechthoek met hoogte k twee keer zo groot is als de oppervlakte onder de grafiek van f. Met andere woorden: de oppervlakte onder de grafiek van f moet even groot zijn als de oppervlakte erboven. De grafiek verdeelt de rechthoek dus in twee delen met gelijke oppervlakte, voorwaar een mooie, zij het enigszins mysterieuze conclusie.

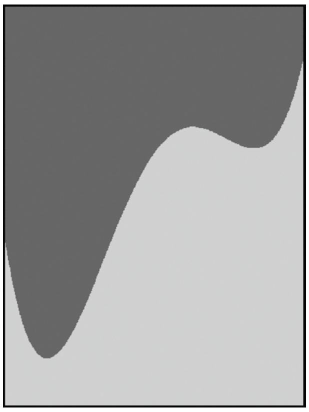

fig. 3 Oppervlakte onder en boven de grafiek even groot

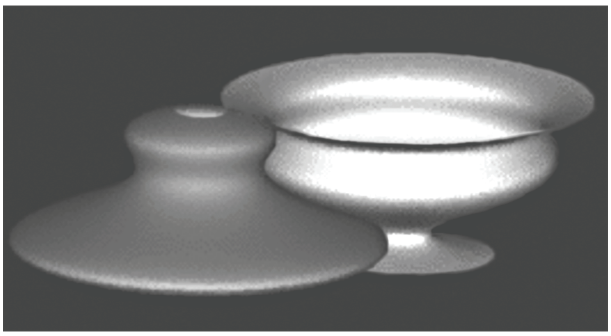

fig. 4 Bijbehorende complementaire lichamen

Als iets zo mooi uitkomt, dan moet er haast wel een goede meetkundige reden voor zijn. Ik vertelde deze ervaring in de collegezaal aan mijn collega Alan Landman. Hij dacht dat het wel eens iets te maken zou kunnen hebben met de prachtige stelling van Pappus over zwaartepunten, en inderdaad dat blijkt zo te zijn. Helaas is deze stelling uit de meeste analysedictaten verdwenen, waardoor de meeste studenten hem niet leren kennen. Jammer, het is zeker de moeite waard.

Zwaartepunten

Pappus van Alexandrië liet zien, in de derde eeuw van onze jaartelling, dat het omwentelingsvolume van een vlak rond een zekere as gelijk is aan de oppervlakte van dat vlak, vermenigvuldigd met de afstand die het zwaartepunt gedraaid heeft. Die afstand is gelijk aan $2\pi d$, waarin d de afstand van het zwaartepunt tot de as is.
In ons geval wordt de y-coördinaat y_Z van het zwaartepunt (x_Z, y_Z) van het vlak onder de grafiek van $y = f(x)$ gegeven door de betrekking:

$$y_Z = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$

en dus:

$$2\pi y_Z\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \pi\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x$$

en dat is weer gelijk aan het omwentelingsvolume.
Een van de elementaire eigenschappen van zwaartepunten is dat het gezamenlijke zwaartepunt van twee niet overlappende even grote vlakken precies in het midden tussen de zwaartepunten van die vlakken ligt.
Ofwel: het zwaartepunt van de rechthoek ligt precies tussen het zwaartepunt (x_Z, y_Z) van het gebied onder de grafiek en het zwaartepunt (x'_Z, y'_Z) van het gebied boven de grafiek. Daaruit volgt dat de afstand van y_Z tot de x-as even groot is als de afstand van y'_Z tot de andere horizontale zijde van de rechthoek en dus zijn de omwentelingsvolumes aan elkaar gelijk.

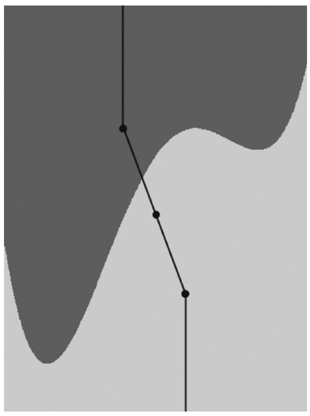

fig. 5 Zwaartepunten

Er is nog wel een kleine voorwaarde waar aan voldaan moet worden, willen de bovenstaande berekeningen kloppen. k is namelijk het dubbele van de gemiddelde hoogte van de grafiek van $y = f(x)$ op het interval. De gebruikelijke voorwaarde voor een omwentelingsvolume is dat de profielkromme de as niet snijdt. Daarom moeten we aannemen dat $f(x)$ in ieder punt kleiner is dan het dubbele van de gemiddelde functiewaarde op het interval. Voor de meeste koffiemokken klopt dat wel, maar bijvoorbeeld niet voor een Martini-glas.
Nu blijkt dat de bovenstaande analyse dan nog steeds wel werkt, zelfs als een deel van de grafiek boven de lijn $y = k$ ligt. Bij het wentelen rond deze lijn ontstaat dan wel een aantal losse omwentelingslichamen op de intervallen waar de grafiek helemaal boven of helemaal onder die lijn ligt. Vreemd genoeg lijkt het complementaire Martini-glas verdacht veel op het glaasje dat barkeepers gebruiken om de tweede helft van een dubbele Martini in te schenken. Maar dit liever niet bij het ontbijt!

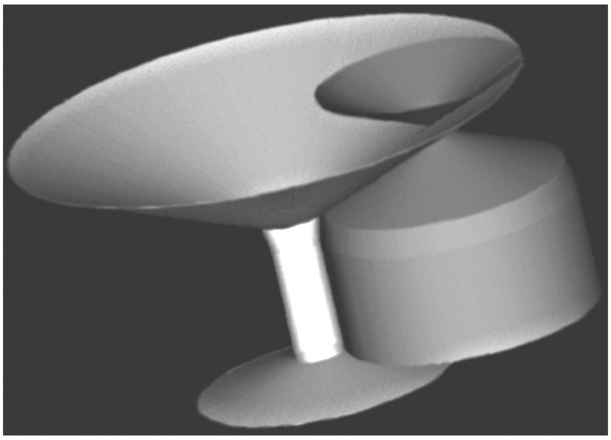

fig. 6 Complementaire Martini-glaasjes

Tot slot

Toen mijn vrouw en ik, kort na het complementaire koffiemokkenonderzoek in Korea waren, kwamen we in aanraking met het traditionele Celadon aardewerk. Een mooi voorbeeld is een paar bij elkaar passende vazen; zelfde profiel, maar om verschillende assen geroteerd. Deze vazen hebben zeker niet dezelfde inhoud, maar ik weet zeker dat de pottenbakker dat voor elkaar kan krijgen als we bovenstaand resultaat toesturen...

fig. 7 Celadon aardewerk

Welnu, is dit een nieuw probleem? Dat zullen we zien, wellicht eerst via brieven aan de auteur en vervolgens wanneer het probleem op wonderbaarlijke wijze ineens verschijnt in de volgende edities van alle concurrerende differentiaalrekeningboeken.

Thomas Banchoff
Brown University, Providence, Rhode Island, USA

Computer graphics: David Eigen
Vertaling: Tom Goris

This article was first published in the March 2006 issue of the *College Mathematics Journal*, an official publication of the Mathematical Association of America.